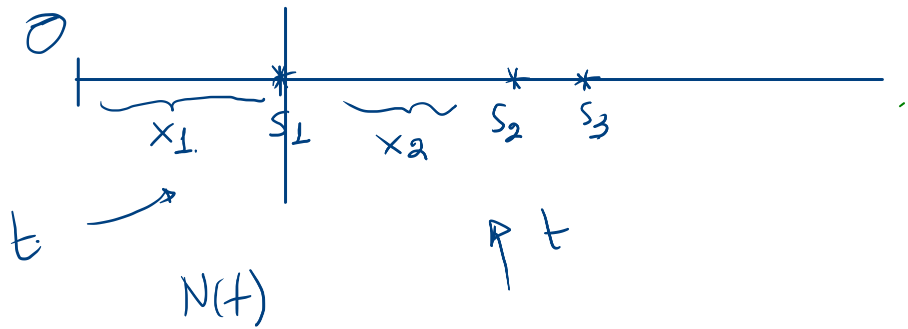
Ανανεωτικός Συλλογισμός

Ιδέα: Δεσμεύω ως προς το χρόνο του $1^{ου}$ γεγονότος, τη $1^{η}$ ανανέωση.

Η ανανεωτική διαδικασία ξεκινά πιθανοθεωρητικά από την αρχή, όταν έχω ανανέωση



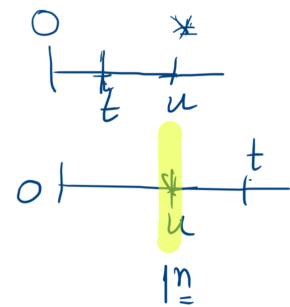
$h(t)$

- Ανανεωτικός συλλογισμός για την $P(N(t)=n)$

$$\overset{P_n(t)}{P(N(t)=n)} = \int_0^\infty \underbrace{P(N(t)=n \,/\, S_1=u)}_{*} \, dF_X(u)$$

$\underline{\underline{n>0}}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \#\text{γεγ. στο } (0,t]}}{P(N(t)=n} \,/\, S_1=u) = \begin{cases} 0 & u>t \\ P(\underset{\substack{\# \\ \text{γεγ.} \\ \text{στο } (u,t]}}{N(t-u)}=n-1) & u \le t \end{cases}$$



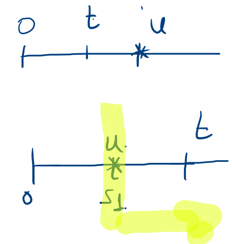
$$\overset{P(N(t)=n)}{P_n(t)} = \int_0^t P_{n-1}(t-u)\, dF_X(u). \qquad n>0$$

$$P_0(t) = P(N(t)=0) = P(S_1>t) = 1-F_X(t)$$

• Ανανεωτικός συλλογισμός για την $m_X(t) = E[N(t)]$ (αναν. συνάρτηση)

$h(t)$

$$m_X(t) = \underline{\underline{E[N(t)]}} = E\big[E[N(t)/S_1]\big] \qquad S_1 = X_1$$



$$E[N(t)/S_1 = u] = \begin{cases} 0 & \text{για } u > t \\ E[N(t-u)] + 1 & \text{για } u \le t \end{cases}$$

$$m_X(t) = \int_0^t [1 + m_X(t-u)]\, dF_X(u) + \cancel{\int_t^\infty 0\, dF_X(u)} \to 0$$

$$m_X(t) = \int_0^t dF_X(u) + \int_0^t m_X(t-u)\, dF_X(u)$$

$$m_X(t) = F_X(t) + \int_0^t m_X(t-u)\, dF_X(u)$$ ανανεωτική εξίσωση για την $m_X(t)$

ή

$$m_X(t) = F_X(t) + (m_X * F_X)(t)$$

Άσκηση 1.4 *Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων Uniform$([0,1])$, δηλαδή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f_X(t) = 1, \ 0 \le t \le 1.$$

Να αποδειχθεί ότι για την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ ισχύει

$$m(t) = e^t - 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

Έχουμε δείξει ότι

$$m_X(t) = \underline{F_X(t)} + \int_0^t m_X(t-u)\, d\underline{F_X(u)}$$

Για $0 \le t \le 1$ $\quad F_X(t) = t.$

$$m_X(t) = t + \int_0^t m_X(t-u)\,du \overset{t-u=x}{=\!=} t + \int_0^t m_X(x)\,dx \Rightarrow$$

$$m_X'(t) = 1 + m_X(t) \quad ; \quad (m_X(t)+1)' = 1 + m_X(t)$$

$g(t) = m_X(t) + 1$ ή $\dfrac{g'(t)}{g(t)} = 1$ ή $[\log(g(t))]' = 1$

$\log(g(t)) = t + k^{\text{σταθ.}}$ ή $m_X(t) + 1 = c \cdot e^t$ ή $m_X(t) = c e^t - 1$ $\Big($ $c=1$ $\Rightarrow$

αλλά $m_X(0) = 0$

$m_X(t) = e^t - 1$ για $0 \le t \le 1.$

H/W ? $\quad 1 \le t \le 2 \qquad F_X(t) = 1.$

$m(t) = \,;$

Την έχουμε ξαναδεί χωρίς ανανεωτικό συλλογισμό

$\{N(t)\}$ $\{S_n\}$

X_i

$$\overset{\text{αγνωστο}}{h(t)} = \overset{\text{γνωστό}}{d(t)} + \int_0^t \overset{\text{αγνωστο}}{h(t-x)}\, dF_X(x) \leftarrow \text{γνωστή}$$

ανανεωτική εξίσωση.

$$m_X(t) = F_X(t) + \int_0^t m_X(t-x)\, dF_X(x)$$

- Ανανεωτικός συλλογισμός για την $E[N^2(t)] = R(t)$

H/W

Θεώρημα 1.5 (Λύση ανανεωτικής εξίσωσης) *Έστω η ανανεωτική εξίσωση*

$$h(t) = \overset{\text{γνω}}{d(t)} + \int_0^t \overset{\text{αγ.}}{h(t-u)}\, d\overset{\text{γν.}}{F_X(u)} = d(t) + (h * F_X)(t), \quad t \geq 0.$$

Η ανανεωτική εξίσωση έχει μοναδική λύση, που δίνεται από τον τύπο

$$h(t) = \overset{\text{γν.}}{d(t)} + \int_0^t \overset{\text{γν.}}{d(t-u)}\, d\overset{\text{γνωστό}}{\underline{\underline{m_X(u)}}} = d(t) + (d * m_X)(t),$$

όπου $m_X(t)$ είναι η ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων γεγονότων $F_X(t)$.

(απόδειξη)

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) \quad \text{ή}$$

$$h(t) = d(t) + (h * F_X)(t)$$

ή

$$\tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{h}(s) \cdot \tilde{F}_X(s) \Rightarrow \underline{\tilde{h}(s)} = \frac{\tilde{d}(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s) \boxed{\frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}}$$

$$\tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s) \cdot \tilde{m}_X(s)$$

$$\tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \widetilde{(d * m_X)}(s) \qquad \Rightarrow h(t) = d(t) + (d * m_X)(t)$$

"Φυσική ερμηνεία"

ενταση.

<u>1 γεγονός</u>.

επίδραση υπολοίπων.

όλων.

$$h(t) = d(t) + \underbrace{\int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)}$$

συνολική επίδραση

$$h(t) = d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \underline{d(t-u)}\, dF_{S_k}(u)$$

$$= d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d(t-u)\, dF_X^{*k}(u)$$

$$= d(t) + \int_0^t d(t-u)\, dm_X(u)$$

$$m_X(u) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{S_k}(u)$$

Η ανανεωτικής εξίσωσης για την $m_X(t)$

$$m_X(t) = F_X(t) + (\underline{m_X} * F_X)(t)$$

έχει λύση

$$m_X(t) = F_X(t) + (F_X * \underline{m_X})(t)$$

Ενα σημαντικό στοιχείο στην απόδειξη του ΣΑΘ, το οποίο έχει ενδιαφέρον από μόνο του είναι να βρούμε τη σχέση ανάμεσα στο $m(t) = E(N(t)) =$ μέσος # ανανεώσεων στο $(0,t]$ και το $E[S_{N(t)+1}]$ ο αναμενόμενος χρόνος για τη 1η ανανέωση μετά το t.

Άσκηση 1.5 *Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$, με μέση τιμή μ και έστω $h(t) = E[S_{N(t)+1}]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι*

$$h(t) = \mu(1 + m(t)), \quad t \geq 0,$$

όπου $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση.

(ΒΙΒΛΙΟ ΜΠΟΥΡΝΕΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ)

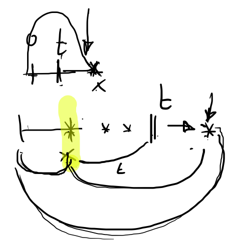
Λύση

$m(t)$ ανανεωτ. συνάρτηση

$h(t) = E[S_{N(t)+1}]$ Δεσμεύω στον χρόνο της 1ης ανανέωσης $(S_1 = X_1)$

$$h(t) = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = x] \, dF_X(x)$$

$$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = x] = \begin{cases} x & x > t \\ E[S_{N(t-x)+1}] + x & x \leq t \end{cases}$$



$$h(t) = \int_t^\infty x \, dF_X(x) + \int_0^t [h(t-x) + x] \, dF_X(x)$$

$$h(t) = \underbrace{\int_t^\infty x \, dF_X(x) + \int_0^t x \, dF_X(x)} + \int_0^t h(t-x) \, dF_X(x)$$

$$h(t) = \int_0^\infty x \, dF_X(x) + \int_0^t h(t-x) \, dF_X(x)$$

$\mu = E(X)$

$$h(t) = \mu + \int_0^t h(t-x) \, dF_X(x)$$

είναι ανανεωτική εξίσωση.

$$\boxed{h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-x) \, dF_X(x)}$$

$$\boxed{h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u) \, dm_X(u)}$$

από θεώρημα έχει λύση $(d(t) = \mu)$

$$h(t) = \mu + \int_0^t \cancel{\mu} \, dm_X(u) = \mu + \mu \int_0^t dm_X(u)$$

$$h(t) = E[S_{N(t)+1}] = \mu + \mu \cdot m_X(t) = \mu(1 + m_X(t))$$

$$E\left[S_{N(t)+1}\right] = \mu\left[m(t)+1\right]$$

$$E\left[S_{N(t)+1}\right] = E(X)\left[E(N(t))+1\right]$$

που θυμίζει ισότητα Wald:

$E\left[\sum_{i=1}^{N^*} X_i\right] = E(N^*)E(X)$ εαν N^* τμ. χρόνος διακοπής

Πραγματι:

$$E\left(S_{N(t)+1}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i\right) = E(X)\cdot E\left[N(t)+1\right] = E(X)\left[E(N(t))+1\right]$$

$S_{n-1} \le t$ $\quad$ $S_n > t$

αφού

$\{N(t)+1 = \underline{n}\} \Leftrightarrow \{N(t) = n-1\} \Leftrightarrow \{X_1+\dots+X_{n-1} \le t$ και $X_1+\dots+X_n > t\}$

ανεξ. των $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$

$N(t)+1$ χρόνος διακοπής.

$\sim$

$E\left(S_{N(t)}\right) = \cancel{E(X)\,E(N(t))}$?

$\cancel{E(S_{N(t)})} = \mu\cdot m_X(t)$

$E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)$

$\{N(t)=n\} = \{X_1+\dots+X_n \le t$ και $X_1+\dots+X_{n+1} > t\}$

$\Rightarrow$ εξαρταται απο το X_{n+1} $\Rightarrow$ $N(t)$ όχι χρόνος διακοπής!

Άσκηση 1.6 *Έστω μια ανανεωτική διαδικασία* $\{N(t)\}$ *με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων* $F_X(t)$ *και έστω* $h(t) = E[N(t)(N(t)-1)]$, $t \geq 0$. *Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την* $h(t)$ *και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι*

$$h(t) = 2(m * m)(t), \quad t \geq 0,$$

όπου $m(t)$ *η ανανεωτική συνάρτηση.*

$$h(t) = E[N(t)(N(t)-1)] = E[N^2(t)] - \overset{m_X(t)}{E[N(t)]}$$

$$E[N(t)(N(t)-1) / S_1 = u] = \begin{cases} 0 & u > t \\ E[(1+N(t-u))(1+N(t-u)-1)] & u \leq t \end{cases}$$

$E[(1+N(t-u)) \cdot N(t-u)]$

$= \underbrace{E[N(t-u)]} + E[N^2(t-u)]$

$= \underbrace{m_X(t-u)} + h(t-u) + m_X(t-u)$

$= h(t-u) + 2m_X(t-u)$

(*) $\underbrace{h(t)} = \int_0^t [h(t-u) + 2m_X(t-u)]\, dF_X(u) = \underbrace{2\int_0^t m_X(t-u)\, dF_X(u)}_{d(t)} + \underbrace{\int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)}$

$$\left.\begin{aligned} d(t) &= 2\int_0^t m_X(t-u)\, dF_X(u) \\ m_X(t) &= F_X(t) + \int_0^t m_X(t-u)\, dF_X(u) \end{aligned}\right\} \Rightarrow d(t) = 2(m_X(t) - F_X(t))$$

η λύση της (*) $\quad h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\, dm_X(u)$

$h(t) = \underbrace{2\int_0^t m_X(t-u)\, dF_X(u)} + \int_0^t \underbrace{2(m_X(t-u) - F_X(t-u))}_{d(t-u)}\, dm_X(u) \Rightarrow$

$h(t) = \cancel{2\int_0^t m_X(t-u)\, dF_X(u)} + \underbrace{2\int_0^t m_X(t-u)\, dm_X(u)} - \cancel{2\int_0^t F_X(t-u)\, dm_X(u)}$

$h(t) = 2 \cdot (m * m)(t)$

Ορισμός 1.2 (Περιοδική μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή) *Μια μη-αρνητική, γνήσια τυχαία μεταβλητή X (δηλαδή* $\Pr[0 \le X < \infty] = 1$*) λέγεται περιοδική, αν υπάρχει* $p > 0$ *ώστε* $\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = kp] = 1$*. Ο μεγαλύτερος αριθμός p με αυτή την ιδιότητα αναφέρεται ως περίοδος της X. Αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός p, η X λέγεται απεριοδική. Για την αντίστοιχη κατανομή της τυχαίας μεταβλητής χρησιμοποιούμε τους ίδιους όρους (περιοδική - απεριοδική).*

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \ldots$

$P(X = \frac{1}{n}) = p_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$

Οι συνεχείς και οι μικτές κατανομές (αυτές, δηλαδή, που έχουν κάποιο συνεχές και κάποιο διακριτό μέρος) είναι απεριοδικές. Από τις διακριτές κατανομές, κάποιες είναι περιοδικές και κάποιες όχι. Π.χ., οι κλασικές διακριτές κατανομές, όπως η διωνυμική, η γεωμετρική, η Poisson κλπ. είναι περιοδικές και μάλιστα με περίοδο 1. Από την άλλη μεριά, μια διακριτή που παίρνει με θετική πιθανότητα μόνο τις τιμές 1 και $\sqrt{2}$ είναι απεριοδική. Μια διακριτή που παίρνει με θετική πιθανότητα όλες τις τιμές $\frac{1}{n}$, $n \ge 1$, είναι επίσης απεριοδική.

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το βασικό ανανεωτικό θεώρημα.

$X \sim B(n, p^*)$ $\quad S = \{0, 1, \ldots n\}$ $\quad \overset{\text{περιοδος}}{p} = 1.$

Συνεχείς ή μικτές $\Rightarrow$ απεριοδικότητα.

Περιοδική $\Rightarrow$ διακριτή

διακριτή $\not\Rightarrow$ περιοδική

ΧΑ

B.A.Θ.

Θεώρημα 1.6 (Βασικό ανανεωτικό θεώρημα) *Έστω $h(t)$ η μοναδική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης*

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t), \quad t \geq 0.$$

$d(t) = d_1(t) - d_2(t)$

Έστω, επίσης, ότι η $d(t)$ γράφεται ως διαφορά δυο μη-αρνητικών, φραγμένων, φθινουσών συναρτήσεων και $\int_0^\infty |d(u)|du < \infty$. Τότε

(i) *Αν η $F_X(t)$ είναι απεριοδική με μέση τιμή $\mu > 0$,*

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(u)du}{\mu}.$$

(ii) *Αν η $F_X(t)$ είναι περιοδική με περίοδο p και μέση τιμή $\mu > 0$,*

$$\lim_{t\to\infty} h(tp+x) = \frac{p\sum_{t=0}^\infty d(tp+x)}{\mu}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$d(t) = d_1(t) - d_2(t)$, $d_2(t) = 0$

μη αρνητ.

φραγμ.

φθίνουσα

$\int_0^\infty d(u)\,du < \infty$

$\int_0^\infty d(t)\,dt$

Σε πολλές εφαρμογές του θεωρήματος ελέγχεται ότι η $d(t)$ είναι μη-αρνητική, φραγμένη και φθίνουσα με την απόλυτη τιμή της να έχει πεπερασμένο ολόκληρωμα στο $(0,\infty)$. Τότε γράφεται τετριμμένα ως διαφορά της ιδίας και της μηδενικής συνάρτησης (που πληροί επίσης τις ίδιες συνθήκες) και το βασικό ανανεωτικό θεώρημα είναι άμεσα εφαρμόσιμο.

Άσκηση 1.9 *Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ με μέση τιμή $\mu \in (0, \infty)$ και διασπορά $\sigma^2 \in [0, \infty)$. Έστω, επίσης, $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση και $h(t) = m(t) - \frac{t}{\mu}$, $t \geq 0$. Να αποδειχθεί ότι η $h(t)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση*

ΒΙΒΛΙΟ ΗΠΟΥΡΝΕΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t), \quad t \geq 0,$$

με

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_0^t \left(1 - \frac{u}{\mu}\right) dF_X(u) - \int_t^\infty \frac{t}{\mu} dF_X(u) \\ &= \frac{1}{\mu} \int_t^\infty (1 - F_X(u))du - (1 - F_X(t)). \end{aligned}$$

Επίσης, αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \left(m(t) - \frac{t}{\mu}\right) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2},$$

δηλαδή η ευθεία $\frac{1}{\mu}t + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $m(t)$.

H/W