Πολύ σημαντικό είναι το (μέτρο)

$\boxed{E[N(t)] := m(t)}$ το οποίο καλείται

Ανανεωτική Συνάρτηση.

= ο μέσος # ανανεώσεων μέχρι τη στιγμή t

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P[N(t)=n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \left[F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t) \right]$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} F_{S_n}(t)}_{} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} F_X^{*(n)}(t)}_{}$$

[β' τρόπος $E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P[N(t) \geq n] = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t)$]

$$\boxed{m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_X^{*(n)}(t)}$$

$$F_{S_1}(t) - F_{S_2}(t)$$

$$+ \; 2\left(F_{S_2}(t) - F_{S_3}(t)\right)$$

$$+ \; 3\left[F_{S_3}(t) - F_{S_4}(t)\right) + \cdots$$

ΒΙΒΛΙΟ ΜΠΟΥΡΝΕΤΑ - ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

Άσκηση 1.4 *Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων Uniform$([0,1])$, δηλαδή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f_X(t) = 1,\ 0 \le t \le 1.$$

Να αποδειχθεί ότι για την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ ισχύει

$$m(t) = e^t - 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

(α' τρόπος)

$$f_X(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \Rightarrow F_X(t) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$$

$$F_{S_n}(t) = F_X^{*n}(t)$$

$n = 2$. $$F_{S_2}(t) = F_X^{*2}(t) = \int_0^t F_X(t-u)\, dF_X(u) = \int_0^t (t-u)\, du = \frac{t^2}{2}$$

$n = 3$ ... $$F_{S_3}(t) = \frac{t^3}{6}$$

Έστω $$F_{S_n}(t) = \frac{t^n}{n!}$$ .. $$S_{n+1} = S_n + X_n$$

$$F_{S_{n+1}}(t) = \int_0^t F_{S_n}(t-u)\, dF_X(u) = \int_0^t F_X(t-u)\, dF_{S_n}(u) =$$

$$= \int_0^t (t-u)\, n\frac{u^{n-1}}{n!}\, du = \int_0^t n\frac{t\, u^{n-1}}{(n-1)!}\, du - \int_0^t \frac{n\, u^n}{(n-1)!}\, du = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

Άρα $$F_{S_n}(t) = \frac{t^n}{n!} \quad \forall\, n \ge 1$$

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{S_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - 1 = e^t - 1$$

$X \sim$ κατανομή $\longrightarrow$ $P(N(t)=n)$

$E(N(t)) = m(t)$

Θεώρημα 1.2 (Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes βασικών ανανεωτικών ποσοτήτων) *Οι μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes των $F_{S_k}(t)$, $p_k(t)$ και $m(t)$ δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους*

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{S_k}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dF_{S_k}(t) = (\tilde{F}_X(s))^k, \quad k \geq 1, \\
\tilde{p}_k(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dp_k(t) = (1 - \tilde{F}_X(s))(\tilde{F}_X(s))^k, \quad k \geq 0, \\
\tilde{m}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dm(t) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}.
\end{aligned}$$

$F_{S_k}(t) = F_X^{*k}(t) \Rightarrow \tilde{F}_{S_k}(s) = \widetilde{F_X^{*k}}(t) = (\tilde{F}_X(s))^k \qquad k \geq 1$

$p_k(t) = P(N(t)=k) = F_X^{*k}(t) - F_X^{*(k+1)}(t) \Rightarrow \tilde{p}_k(s) = \left(\widetilde{F_X^{*k}}(t)\right) - \left(\widetilde{F_X^{*(k+1)}}(t)\right) = \qquad k \geq 0$

$= (\tilde{F}_X(s))^k - (\tilde{F}_X(s))^{k+1}$

$= (\tilde{F}_X(s))^k (1 - \tilde{F}_X(s))$

$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(s) \Rightarrow \tilde{m}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{F_X^{*k}}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{F}_X(s))^k = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Kulkarni)

Η ανανεωτική συνάρτηση $\{m_X(t), t \geq 0\}$ χαρακτηρίζει πλήρως την ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$

$m_X(t)$ καθορίζει το $\tilde{m}_X(s)$

όμως $\tilde{m}_X(s) = \dfrac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}$ ή $\tilde{F}_X(s) = \dfrac{\tilde{m}_X(s)}{1+\tilde{m}_X(s)}$

$\tilde{m}_X(s)$ καθορίζει την $\tilde{F}_X(s)$

$\tilde{F}_X(s)$ καθορίζει την $F_X(t)$

$F_X(t)$ καθορίζει την $N(t)$

Παράδειγμα

Εαν $X_i \sim exp(\lambda)$, $i=1,2,\dots$ X_i ανεξ

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{m}_X(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{s}$$

$$\Downarrow$$

$$m_X(t) = \lambda \cdot t$$

$\underline{\underline{N(t)}}$ $\qquad S_n$

$$P(\underbrace{N(t)=n}^{p_n(t)}) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$$

$$S_n \sim \Gamma(n, \lambda) \qquad F_{S_n}(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

$$p_n(t) = P(N(t)=n) = \left[1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right] - \left[1 - \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Άσκηση.

Εάν $\underbrace{m_X(t) = \frac{t}{2}}_{m(t)}$, $t \geq 0$ να υπολογιστεί η $\underbrace{P(N(5)=0)}_{P(N(t)=k)}$

$$\tilde{m}_X(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\, m_X(t) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2s}$$

$$\tilde{F}_X(s) = \frac{\tilde{m}_X(s)}{1+\tilde{m}_X(s)} = \frac{\frac{1}{2s}}{1+\frac{1}{2s}} = \frac{1}{1+2s} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+s} \Rightarrow X \sim \exp(\overset{\lambda}{\frac{1}{2}})$$

$S_n \sim \Gamma(n, \frac{1}{2})$ από προηγ. άσκηση. $P(N(t)=k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

$$P(N(5)=0) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot 5}\left(\frac{1}{2}5\right)^0}{0!} = e^{-5/2}$$

Άσκηση 1.1 *Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων Erlang(r, λ), δηλαδή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

Βιβλιο Μπουρνετα Οικονομου

H/W

$$f_X(t) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F_X(t) = 1 - \sum_{j=0}^{r-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}, \quad t \geq 0.$$

Να υπολογιστούν η συνάρτηση κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$ και η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t, $(p_k(t) : k \geq 0)$. Να αποδειχθεί ότι η ανανεωτική συνάρτηση δίνεται από τον τύπο

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{kr-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right\}, \quad t \geq 0.$$

Να υπολογιστούν, επίσης, οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\tilde{m}(s)$.

Άσκηση 1.2 *Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων Hyperexp$(p, 1-p, \lambda, \mu)$, δηλαδή, μίξη δυο κατανομών Exp(λ) και Exp(μ), με πιθανότητες p και $1-p$ αντίστοιχα. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων είναι, επομένως,*

$$f_X(t) = p\lambda e^{-\lambda t} + (1-p)\mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

και η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F_X(t) = p(1-e^{-\lambda t}) + (1-p)(1-e^{-\mu t}), \quad t \geq 0.$$

Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\widetilde{F}_{S_k}(s)$, $(\widetilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\widetilde{m}(s)$, της συνάρτησης κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$, της συνάρτησης πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t, $(p_k(t) : k \geq 0)$ και της ανανεωτικής συνάρτησης $m(t)$, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η ανανεωτική συνάρτηση είναι της μορφής

$$m(t) = A + Bt + Ce^{-(\lambda(1-p)+\mu p)t}, \quad t \geq 0,$$

και να υπολογιστούν οι σταθερές A, B και C.

ΒΙΒΛΙΟ

ΜΠΟΥΡΝΕΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

H/W.

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι μιας ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t), t \geq 0\}$ με κοινή κατανομή σππ

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)} & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$$

Βρείτε την $\tilde{m}(s)$, $m(t) = E(N(t))$

H/W

ΘΕΩΡΗΜΑ (Κατανομή συνολικού πλήθους ανανεώσεων)

Έστω $N(\infty) = \lim_{t\to\infty} N(t)$ και $F_X(\infty) = P(X_n < \infty)$,

(i) εάν $F_X(\infty) = 1$ τότε $P(N(\infty) = \infty) = 1$

(ii) εάν $F_X(\infty) < 1$ τότε $P(N(\infty) = \infty) = 0$ και $P(N(\infty) = k) = (1 - F_X(\infty))(F_X(\infty))^k$, $k \geq 0$

$N(\infty)$ πλήθος ανανεώσεων της $\{N(t), t \geq 0\}$ στο $(0, \infty)$

(i) $P(N(\infty) < \infty) = P(X_n = \infty \text{ για κάποιο } n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = \infty\}\right)$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = \infty) = 0$$

$P(X_n < \infty) = 1 \Rightarrow P(X_n = \infty) = 0$

(ii) $F_X(\infty) < 1 \Rightarrow$ μπορεί η X_n να είναι άπειρη με θετική πιθανότητα $1 - F_X(\infty)$

$N(\infty) = k < \infty \iff \{X_n < \infty \ \ 1 \leq n \leq k, \ X_{k+1} = \infty\}$

$P(N(\infty) = k) \stackrel{\text{γεωμ.}}{=} (F_X(\infty))^k \cdot (1 - F_X(\infty))$

$$P(N(\infty) = \infty) = 1 - P(N(\infty) < \infty) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (F_X(\infty))^k (1 - F_X(\infty)) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Έστω $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση μιας ανανεωτικής διαδικασίας με $\mu = E(X_1) > 0$. Τότε $m(t) < \infty$ $\quad 0 \le t < \infty$

ΧΑ

$$m(t) = E[N(t)]$$

$$P(N(t)<\infty)=1 \not\Rightarrow m(t)=E(N(t))<\infty$$

Να σχολιάσουμε ότι η απόδειξη δε προκύπτει απο το γεγονός ότι (Ross) $P(N(t)<\infty)=1$.

Ας δουμε το εξής παράδειγμα

Εστω Y τμ $Y=2^n$ με πιθανότητα $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $n\geq 1$

$$P(Y<\infty)=\sum_{n=1}^{\infty}P(Y=2^n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$$

αλλά

$$E(Y)=\sum_{n=1}^{\infty}2^n P(Y=2^n)=\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty$$

Έτσι παρόλο που η Y είναι πεπερασμενη, $E(Y)=\infty$

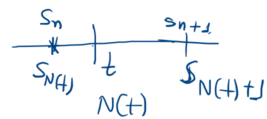
Βασικά Οριακά Θεωρήματα από Ανανεωτική Θεωρία

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.

Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ με ενδιάμεσους χρόνους $X_n, n \geq 1$
$E(X_n) = \mu$, $Var(X_n) = \sigma^2$, $n \geq 1$ και ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$. Τότε

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \to \infty]{\sigma.\beta.} \frac{1}{\mu} \qquad (\text{ΙΝΜΑ})$$

$$N(t) = \sum_{n>0} 1_{\{S_n \leq t\}}$$



(Απόδειξη)

Για $t > 0$ $\qquad S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$

$$\boxed{\frac{S_{N(t)}}{N(t)}} \leq \frac{t}{N(t)} < \boxed{\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}}$$

Έχω δείξει $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow[\sigma.\beta.]{n \to \infty} \mu = E(X_1)$ $\qquad$ ΙΝΜΑ $\qquad S_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$

$N(t) \xrightarrow[t \to \infty]{\sigma.\beta.} \infty \qquad P(N(\infty) = \infty) = 1$

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow[t \to \infty]{\sigma.\beta.} \mu \qquad\qquad \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow[t \to \infty]{} \left(\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{}\right) \quad (N(t) \to \infty)$$

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \xrightarrow[t \to \infty]{\sigma.\beta.} \mu$$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{t}{N(t)} \leq \lim_{t \to \infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \mu$$

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{t}{N(t)} \geq \lim_{t \to \infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \mu$$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{t}{N(t)} = \liminf_{t \to \infty} \frac{t}{N(t)} = \mu \quad \text{με πιθ 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} \frac{t}{N(t)} = \mu \quad \text{με πιθ 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad \text{με πιθ. 1.}$$

Παράδειγμα

Η Μαρία έχει ένα ραδιοφωνάκι που δουλεύει με μια μπαταρία. Όταν η μπαταρία αδειάσει, η Μαρία βάζει νέα μπαταρία στο ραδιόφωνο. Εάν γνωρίζουμε ότι η κατανομή του χρόνου ζωής (σε ώρες) της μπαταρίας είναι ομοιόμορφη στο διάστημα (40,60), ποιος είναι ο μακροπρόθεσμος ρυθμός αλλαγής μπαταρίας;

Λύση

$N(t) = \#$ μπαταρίες που αντικαθίστανται στο $(0,t]$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

$\mu = E(X) \qquad X \sim U(40,60)$

$\mu = \frac{40+60}{2} = 50$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{50}$$

Μακροπρόθεσμα η Μαρία θα πρέπει να αλλάζει μπαταρίες 1 μπαταρία κάθε 50 ώρες

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ με ενδιάμεσους χρόνους $X_n, n \geq 1$ $E(X_n) = \mu$, $Var(X_n) = \sigma^2$, $n \geq 1$ και ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$. Τότε

Εάν $\mu < \infty$, $\sigma^2 \in (0, \infty)$ έχουμε

$$\lim_{t \to \infty} P\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \leq x \right) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \qquad (\text{ΚΟΘ})$$

($\Phi(x)$ σ.κ της $N(0,1)$)

$$\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \xrightarrow[t \to \infty]{d} N(0,1)$$

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ / ΣΑΘ

Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t\geq 0\}$ με ενδιάμεσους χρόνους X_n, $n\geq 1$, $E(X_n)=\mu$, $Var(X_n)=\sigma^2$, $n\geq 1$ και ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$. Τότε

$$\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu}$$

$$\left(\frac{E(N(t))}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu} \right)$$

$$\left(\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\sigma.\beta.} \frac{1}{\mu} \right)$$

(ΠΡΟΣΟΧΗ το θεώρημα δε προκύπτει ως συνέπεια του $\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$ με πιθ 1.
Δείτε το εξής πχ: Έστω $U\sim U(0,1)$ και έστω

$$Y_n = \begin{cases} 0 & U\geq 1/n \\ n & U\leq 1/n \end{cases}$$

τότε $P(\lim_{n\to\infty} Y_n = 0) = 1$

$$E(Y_n) = n\cdot P(U\leq \tfrac{1}{n}) = n\cdot\tfrac{1}{n} = 1$$
)