• Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες

Έστω χρόνος t → τυχαία μεταβλητή $X(t)$

η οικογένεια τυχαίων μεταβλητών

$\{X(t),\ t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία $(t \in T)$

4 κατηγορίες

	T		E	
α) Διακριτός	χρόνος t	,	Διακριτός χώρος	καταστάσεων
β) »	»		Συνεχής »	»
γ) Συνεχής	χρόνος	,	Διακριτός χώρος	καταστάσεων
δ) »	»		Συνεχής »	»

πχ
α) $X_n = X(n) = 1$ ή 0 εάν το n-οστό προϊόν μιας γραμμής παραγωγής είναι ή όχι ελαττωμ.

β) X_n = μέση θερμοκρασία τη n-οστή μέρα

γ) $X(t) = \#$ τηλεφωνημάτων σ' ένα τηλεφωνικό κέντρο σε χρόνο $(0,t]$.

δ) $X(t)$ = τιμή μιας μετοχής σε χρόνο t

Όπως γνωρίζουμε μια τμ X χαρακτηρίζεται πλήρως από την

α.σ.κ $F_X(x) = P(X \le x) \quad x \in \mathbb{R}$

αντίστοιχα

Ένα τυχαίο διάνυσμα $(X_1, \dots, X_n)$ χαρακτηρίζεται πλήρως από

την από κοινού α σκ $F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) \quad x_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, \dots, n$

Ανάλογα

Μια στοχαστική διαδικασία περιγράφεται από την κοινή κατανομή των

$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) \quad \forall \; \infty < t_1 < t_2 < \dots < t_n, \quad n \in \mathbb{N}^+$

Κάποιες κατηγορίες Στοχαστικών διαδικασιών.

- Μαρκοβιανή διαδικασία: Η στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t\in T\}$ με την ιδιότητα ότι δεδομένης της τιμής της τμ $X(t)$ (παρόν) οι τμ $\{X(u), u>t\}$ (μέλλον) είναι στοχαστικά ανεξάρτητες από τις τμ $\{X(s), s<t\}$ (παρελθόν)

  Εαν έχω E: χώρο καταστάσεων πεπερασμένο ή αριθμήσιμο - ΔΙΑΚΡΙΤΟ

  ⟶ Μαρκοβιανή αλυσίδα (μια περίπτωση της: η διαδικασία Poisson)

- Στάσιμες διαδικασίες: εαν $\{X(t), t\in T\}$ και $\{X(t+\tau), t\in T\}$ $\tau>0$ είναι στοχαστικά ισοδύναμες

- Διαδικασίες με ανεξάρτητες προσαυξήσεις

  εαν $\forall n\in\mathbb{N}$ $t_1<t_2<\dots<t_n$ οι τμ $X(t_2)-X(t_1)$, ..., $X(t_n)-X(t_{n-1})$ ανεξ

  Διαδικασίες που έχουν ομογενείς προσαυξήσεις

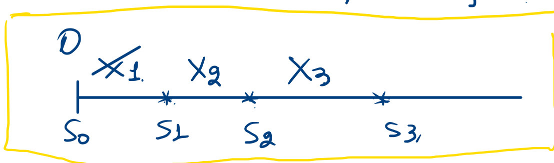
  εάν $\forall s<t$ η κατανομή της τμ $X(t)-X(s)$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $t-s$ και όχι από τις συγκεκριμένες τιμές των s, t

- Ανανεωτικές διαδικασίες
- κλαδωτές διαδικασίες
- martingales

⋮ κ.α.

Θεωρούμε μια διαδικασία γεγονότων, έστω $S_0=0$ και
S_n ο χρόνος του n-οστού γεγονότος, $n\geq 1$
Θεωρούμε $0\leq S_1\leq S_2\leq S_3\leq \dots$
η $\{S_n, n\geq 1\}$ είναι μια σημειακή διαδικασία (Point Process)

$X_1=S_1$
$X_2=S_2-S_1$



Ορίζοντας $X_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 1)$ χρόνος ανάμεσα στο (n−1)-οστό και το n-οστό γεγονός

Έχουμε
$\{X_n, n\geq 1\}$ ακολουθία ενδιάμεσων χρόνων

$X_n\geq 0$.
(Αφού επιτρέπουμε $X_n=0$, πολλά γεγονότα μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα)

Απαριθμήτρια Στοχαστική Διαδικασία   Counting Process

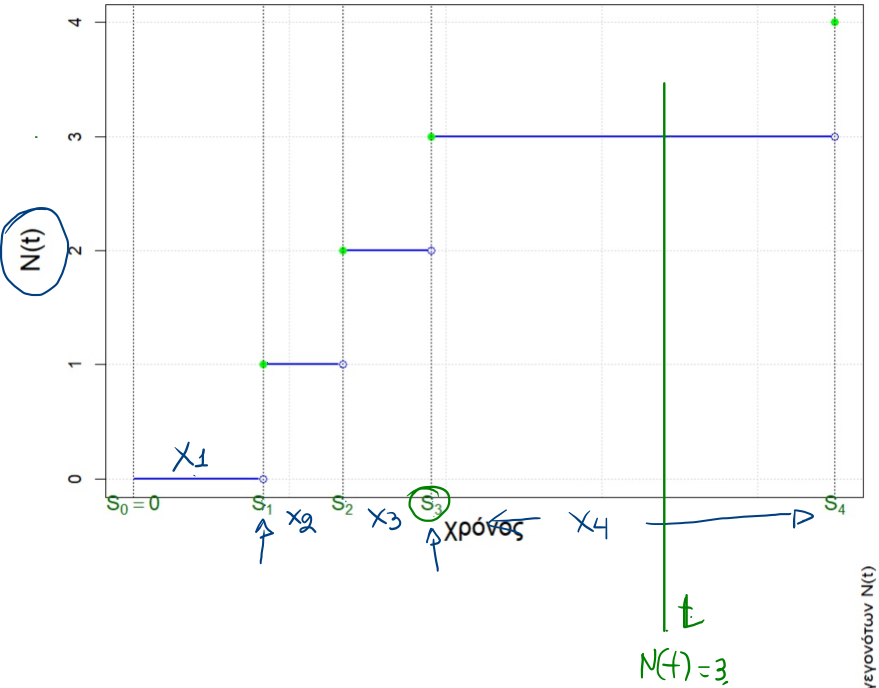
Είναι η στοχαστική διαδικασία $\{N(t),\ t \geq 0\}$
όπου η $\underline{N(t)}$ τμ, εκφράζει τον αριθμό των γεγονότων που έχουν συμβεί μέχρι ~~το~~ και το χρόνο t
και ικανοποιεί :

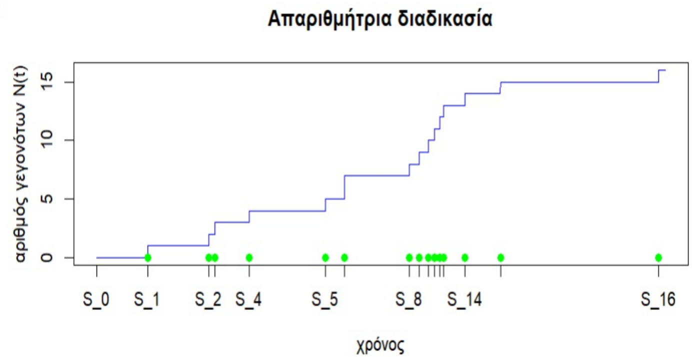
- $N(t)$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}$ — μη αρνητική
- $N(s) \leq N(t) \quad 0 \leq s < t$ — μη φθίνουσα.
- $N(t) - N(s) = \#$ γεγονότων στο διάστημα $(s,t] \quad 0 \leq s < t$

οπότε

$$N(t) = \# \text{ γεγονότων στο } (0,t] = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\} \qquad t \geq 0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}}$$


N(t)
0
1
2
3
4
$S_0 = 0$
S_1
S_2
S_3
S_4
χρόνος
X_1
X_2
X_3
X_4
t
N(t) = 3


Απαριθμήτρια διαδικασία
αριθμός γεγονότων N(t)
0
5
10
15
S_0
S_1
S_2
S_4
S_5
S_8
S_14
S_16
χρόνος

ΟΡΙΣΜΟΙ

Η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ λέμε ότι έχει στάσιμες προσαυξήσεις (stationary increments) Ross 1989 p 210

Εάν η κατανομή του # των γεγονότων που συμβαίνουν σε κάποιο χρονικό διάστημα εξαρτάται μόνο από το μήκος του διαστήματος

$$N(t_2+s) - N(t_1+s) \underset{d}{=} N(t_2) - N(t_1) \quad \forall\, 0 \leq t_1 < t_2 \quad , s > 0$$

Η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ λέμε ότι έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις (independent increments) p 209

Εάν οι αριθμοί των γεγονότων που συμβαίνουν σε ξένα διαστήματα είναι ανεξάρτητοι δηλαδή για $0 < t_1 < \dots < t_n$.

$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξ. τμ

Η ακολουθία $\{S_n, n \geq 1\}$ καλείται ανανεωτική ακολουθία και η διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία (Renewal Process)

που παράγονται από την $\{X_n, n \geq 1\}$

Εάν η $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι ακολουθία μη αρνητικών, ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ.

(Δηλαδή η απαριθμήτρια είναι ανανεωτική αν έχουμε ανεξ & ισόνομους ενδ. χρόνους)

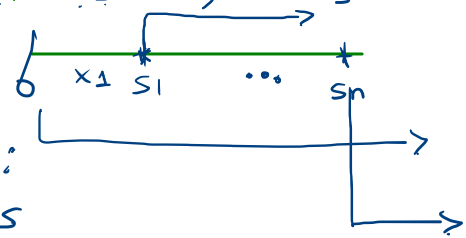
Kulkarni

ΘΕΩΡΗΜΑ

Μια ανανεωτική διαδικασία που παράγεται από μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τμ $\{X_n, n \geq 1\}$ με κατανομή $F(\cdot)$ χαρακτηρίζεται πλήρως από την $F(\cdot)$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ η οποία παράγεται από τη $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι στοχαστικά ίδια με την $\{N(t+X_1)-1, t \geq 0\}$



Το θεώρημα δικαιολογεί το ότι θεωρούμε:

S_1 : 1ος χρόνος ανανέωσης

και για τον ίδιο λόγο

S_n : ο nος χρόνος ανανέωσης

$\{N(t), t \geq 0\}$ $\{N(t+S_n)-n, t \geq 0\}$

F

- Έστω ότι $\{X_n, n \geq 1\}$ έχουν κοινή κατανομή F_X

$\mu = E(X_n) = \int_0^{\infty} x \, dF(x)$, $\sigma^2 = Var(X_n)$ $n = 1, 2, \ldots$

και $F(0^-) = 0$ και $F(0^+) = F(0) < 1$ (δηλαδή $P(X=0) < 1$)

δηλαδή $\{X_n, n \geq 1\}$, ανεξάρτητες, μη αρνητικές τμ.

μη ταυτοτικά 0 με πιθανότητα 1.

Άρα $\mu > 0$ $\exists$ πάντα $\mu \in (0, \infty]$

(συνήθως X_1 έχει διαφορετική κατανομή από τα $X_2, X_3, \ldots \rightarrow$ delayed Renewal Process)

Σχέση S_n, $N(t)$

(1) • $\{N(t) \geq n\}$ = {Τουλάχιστον n γεγονότα στο $(0,t]$}
= {Το n-οστό γεγονός συνέβη πριν ή στον χρόνο t}.

$\underbrace{\{N(t) \geq n\}}_{\text{Renewal Process}} = \{S_n \leq t\}$

(2)

• $\{N(t) \leq n\}$ = {Το πολύ n γεγονότα στο $(0,t]$}
= {Το $(n+1)$-οστό γεγονός συνέβη μετά τον χρόνο t}

$\{N(t) \leq n\} = \{S_{n+1} > t\}$

(3)

• $\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}$.

Ερώτηση ΣΛ :

(α) $N(t) < n \Leftrightarrow S_n > t$ Σ. (συμπλ. της (1))

(β) $N(t) \leq n \Leftrightarrow S_n \geq t$ Λ μπορεί $X_{n+1} = 0$, $S_n = t$, $S_{n+1} = S_n$, $N(t) > n$

(γ) $N(t) > n \Leftrightarrow S_n < t$ Λ (συμπλ του (β))

$\underline{\underline{F_X}}$ ∃! κατανομή της S_n και της $N(t)$

ασκ. σ.π.

$F_{S_n}(t) = P[S_n \le t]$; $\quad P_n(t) = P(N(t) = n)$;

• $n = 2$ $\quad F_{S_2}(t) = P(X_1 + X_2 \le t) = \int_0^t F_{X_2}(t-x)\,dF_{X_1}(x)$

$$F_{S_2}(t) = (F_{X_1} * F_{X_2})(t) = F_X^{*2}(t)$$

και γενικά

$S_n = S_{n-1} + X_n$

$S_{n-1} = S_{n-2} + X_{n-1}$

$$F_{S_n}(t) = (F_{S_{n-1}} * F_{X_n})(t) = (F_X * \dots * F_X)(t) = F_X^{*(n)}(t)$$

$$\boxed{F_{S_n}(t) = F_X^{*(n)}(t)}$$

$$F_X^{*(0)}(t) = 1.$$

$$P(N(t) = n) = P(N(t) \ge n) - P(N(t) \ge n+1) = P(S_n \le t) - P(S_{n+1} \le t)$$

$$P(N(t) = n) = F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t)$$

$$P_n(t) = P(N(t) = n) = F_X^{*n}(t) - F_X^{*(n+1)}(t) \quad n \ge 1 \quad \Big\} \quad n \ge 0.$$

$$P_0(t) = P(N(t) = 0) = P(S_1 > t) = P(X_1 > t) = 1 - F_X(t)$$

H/W. Άσκηση

Έστω $P(X_n = i) = p(1-p)^{i-1}$ $\quad i \geq 1$ $\quad (\forall n)$

$S_1 = \#$ δοκιμών μέχρι την $1^{\underline{\eta}}$ επιτυχία

$S_n = \#$ » μέχρι να έχουμε n επιτυχίες

$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ $\sim$ αρν. διωνυμική

$P(N(t) = n) = ;$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$P(N(t) < \infty) = 1$, $t \geq 0$

(απόδειξη)

$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ $\quad$ $X_1 \ldots X_n$ ανεξ. ισόνομες

ΙΝΜΑ. $\quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{\sigma.\beta.} \mu$ $\quad \mu = E(X_1)$

$\mu > 0$ $\quad S_n \xrightarrow[n \to \infty]{\sigma.\beta.} \infty$ $\quad P(\lim_{n \to \infty} S_n = \infty) = 1$

Για $0 \leq t < \infty$

$P(N(t) = \infty) = P(\lim_{n \to \infty} S_n \leq t) = 1 - P(\lim_{n \to \infty} S_n = \infty) = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow P(N(t) < \infty) = 1$

$S_n \leq t$ για το πολύ πεπερασμένο πλήθος τιμών n

Αυτό μας επιτρέπει να γράφουμε $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$