Εκθετική Κατανομή

Χρησιμοποιείται: - για χρόνο ζωής μιας μηχανής (χρόνος μέχρι αποτυχία)
- για χρόνο μέχρι την άφιξη 1ου πελάτη
- για χρόνο ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις πελατών
- για χρόνο εξυπηρέτησης μιας εργασίας ...

Είναι σε συνεχή χρόνο ότι είναι η γεωμετρική σε διακριτό χρόνο.

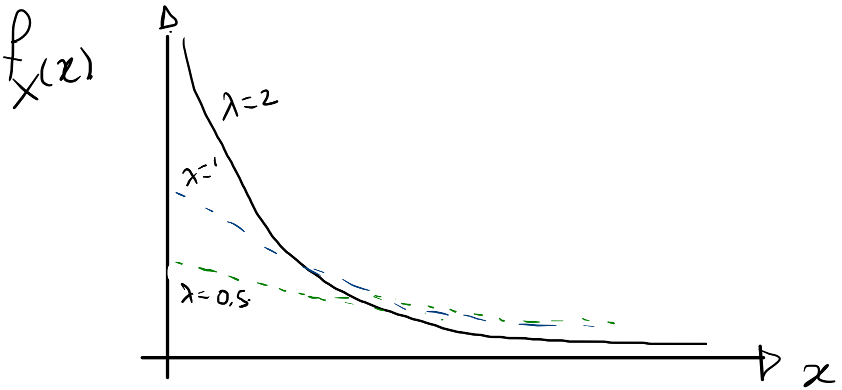
σππ $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $\quad (X \sim \exp(\lambda))$

σκ

$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $\quad$ LST $\tilde{F}_X(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda + s}$

$E(X^n) = \dfrac{n!}{\lambda^n}$ $\quad E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ $\quad V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

(μπορούμε $= \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx =$



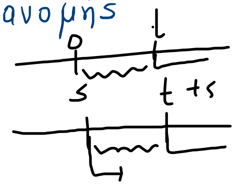
Για $U \sim U(0,1)$ και $X = -\frac{1}{\lambda}\ln U$ έχω, $X \sim \exp(\lambda)$

Πράγματι $F_X(x) = P[X \le x] = P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln U \le x\right) =$

$= P\left(U \ge e^{-\lambda x}\right) = 1 - e^{-\lambda x}$

$P(U \le u) = u$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ κατανομής



① ΑΜΝΗΜΟΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$$\rightarrow \quad P(\underbrace{X-s}_{\text{υπολοιπόμενος χρόνος ζωής}} > t \,/\, \underbrace{X>s}_{\text{ηλικία ήδη } s}) = P(X>t+s \,/\, X>s) \qquad \forall t\geq 0,\ s>0$$

Ισχύει $\boxed{P(X-s>t \,/\, X>s) = P(X>t)}$

Πράγματι:

$$P(X>t+s/X>s) = \frac{P(X>t+s,\ X>s)}{P(X>s)} = \frac{P(X>t+s)}{P(X>s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X>t)$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα ο χρόνος ζωής X να συνεχίσει άλλες t χρονικές μονάδες δεδομένου ότι έχει ήδη λειτουργήσει s = πιθανότητα να λειτουργήσει τουλάχιστον t όσο είναι καινούρια

$P(X>t)$

$\bar{F}(t) = 1-F(t)$

$$\rightarrow \quad P(X>t+s) = P(X>t)\cdot P(X>s) \quad \text{ή} \quad \bar{F}(t+s) = \bar{F}(t)\cdot\bar{F}(s)$$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι $\bar{F}(t_1+t_2+\dots+t_n) = \bar{F}(t_1)\cdots\cdots\bar{F}(t_n)$

για $\forall\, t_1, t_2, \dots, t_n > 0$

$$P(X>t_1+\dots+t_n) = P(X>t_1)\cdots P(X>t_n)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X μη αρνητική τμ (που δεν είναι ταυτοτικά 0) έχει την ιδιότητα

$$\bar F(t_1+\dots+t_n)=\bar F(t_1)\cdot\ldots\cdot\bar F(t_n) \quad t_1,t_2,\dots,t_n>0 \qquad (*)$$

ανν X ακολουθεί εκθετική κατανομή

δίνεται η απόδειξη για πληρότητα των σημειώσεων

[$(\Rightarrow)$

Έστω $n\in\mathbb{N}$ $\quad t_1=t_2=\dots=t_n=1$, η $(*)$ γράφεται $\bar F(n)=\left(\bar F(1)\right)^n$

αλλά

$$\bar F(1)=\bar F\left(\tfrac{1}{m}+\dots+\tfrac{1}{m}\right)=\left[\bar F\left(\tfrac{1}{m}\right)\right]^m \Rightarrow \bar F\left(\tfrac{1}{m}\right)=\left(\bar F(1)\right)^{1/m} \qquad (**)$$

Έστω $q\in\mathbb{Q}$, $q>0$ $\quad q=\frac{n}{m}$

$$\bar F(q)=\bar F\left(\tfrac{n}{m}\right)=\left[\bar F\left(\tfrac{1}{m}\right)\right]^n \overset{**}{=} \left[\bar F(1)\right]^{\frac{n}{m}}=\left[\bar F(1)\right]^q$$

Όμως $\forall x\in\mathbb{R}$, $x>0$ $\exists q_n\in\mathbb{Q}$: $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=x$. Επειδή $\bar F$ συνεχής έχω

$$\bar F(x)=\bar F\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right)=\lim_{n\to\infty}\bar F(q_n)=\lim_{n\to\infty}\left[\bar F(1)\right]^{q_n}=\left[\bar F(1)\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} q_n}=\left[\bar F(1)\right]^x$$

Οπότε αφού $\lim\limits_{x\to\infty}\bar F(x)=0$, παίρνω $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\bar F(1)\right]^x=0$ οπότε $0\le\bar F(1)<1$

Αλλά $\bar F(1)>0$ αλλιώς $\bar F(x)=0$ για $x\geq 0 \Rightarrow P(X=0)=1$ άτοπο

Άρα $0<\bar F(1)<1$

$$\bar F(x)=\left[\bar F(1)\right]^x=e^{x\ln(\bar F(1))}=e^{-\lambda x} \quad \text{για } \lambda=-\ln(\bar F(1))>0$$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$]

② ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

$X \sim \exp(\lambda)$, $a > 0$ $\Rightarrow$ $Y = aX \sim \exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Εάν γράψω $X \sim \exp(\beta)$, β παράμετρος κλίμακας

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

απόδειξη.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{a}\right) = F_X\left(\frac{y}{a}\right)$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{\lambda}{a} y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Άρα $Y \sim \exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

$X \sim \exp(\lambda)$ $\quad \tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$

ή

$$\tilde{F}_Y(s) = E\left(e^{-sY}\right) = E\left(e^{-saX}\right) = \tilde{F}_X(as) = \frac{\lambda}{\lambda + sa} = \frac{\frac{\lambda}{a}}{\frac{\lambda}{a} + s}$$

$Y \sim \exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

③ ΙΣΧΥΡΗ ΑΜΝΗΜΟΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Έστω $X \sim exp(\lambda)$, Y τμ ανεξ. της X, $Y \geq 0$. Τότε

$$P(X > Y+t \mid X > Y) = P(X > t) \quad \forall\, t \geq 0$$

απόδειξη

$$P(X > Y+t / X > Y) = \frac{P(X > Y+t,\, X > Y)}{P(X > Y)} = \frac{P(X > Y+t)}{P(X > Y)}$$

Την ιδιότ.
③ ⇒ ①
αν θεωρήσω
$P(Y=s)=1$

$$P(X > Y) = \left[\begin{array}{l} \sum_{y=0}^{\infty} P(X > Y / Y = y) \cdot P(Y = y) \\ \int_0^{\infty} P(X > Y \mid Y = y) f_Y(y)\, dy \end{array}\right.$$

ΧΒΓ

$$P(X > Y) = \int_0^{\infty} P(X > y / Y = y) f_Y(y)\, dy = \int_0^{\infty} P(X > y) f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda y}\, dF_Y(y) \underset{\text{μετασχ.}}{\overset{\text{ορισμό}}{=}} \tilde{F}_Y(\lambda)$$

$$P(X > Y+t) = \int_0^{\infty} P(X > y+t)\, dF_Y(y) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(y+t)}\, dF_Y(y) = e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} e^{-\lambda y}\, dF_Y(y)$$
$$= e^{-\lambda t}\, \tilde{F}_Y(\lambda)$$

$$P(X > Y+t / X > Y) = \frac{e^{-\lambda t}\, \tilde{F}_Y(\lambda)}{\tilde{F}_Y(\lambda)} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

$Z = X_{(1)}$

④ Ιδιότητα για το min των $\{X_1 \dots X_n\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ. τμ, $X_i \sim exp(\lambda_i)$ $1 \le i \le n$.

Θέτοντας $Z = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ και $\{N = i\} \Leftrightarrow \{Z = X_i\}$, έχουμε

$P(N = i, Z > z) = \frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\lambda z}$ $z \ge 0$, $1 \le i \le n$

όπου $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

απόδειξη

$$P(N=i, Z>z) = P(X_j > X_i > z \quad j \ne i \quad 1 \le j \le n)$$

$$= \int_0^\infty P(X_j > X_i > z, j \ne i, 1 \le j \le n / X_i = x) \underbrace{\lambda_i e^{-\lambda_i x}}_{f_{X_i}(x)} dx$$

$X_1 \dots X_n$ ανεξαρ.

$$= \int_z^\infty P(X_j > x, j \ne i, 1 \le j \le n) \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx$$

ανεξ.

$$= \int_z^\infty \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} P(X_j > x) \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx = \int_z^\infty \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} e^{-\lambda_j \cdot x} \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx$$

$$= \int_z^\infty \lambda_i e^{-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x} dx \overset{\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j}{=\!=} \frac{\lambda_i}{\lambda} \int_z^\infty \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{\text{σππ } exp(\lambda)} dx$$

$$= \frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\lambda z}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Υπό τις υποθέσεις του προηγούμενου Θεωρήματος

(1) $P(N=i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}$ $\quad 1 \le i \le n$

(2) $P(Z > z) = e^{-\lambda z}$ $\quad z \ge 0.$ $\quad (Z \sim \exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n))$

απόδειξη

(1) $P(N=i) = \lim_{z \to 0} \underbrace{P(N=i, Z>z)} = \lim_{z\to 0} \frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\lambda z} = \frac{\lambda_i}{\lambda}.$

ή αναλυτικά

$P(N=i) = \int_0^\infty P(X_j > X_i \quad \forall j \ne i \quad 1 \le j \le n / X_i = x) \lambda_i e^{-\lambda x} dx. = \frac{\lambda_i}{\lambda}$

($\underline{\text{πχ}}$ $\quad n=5 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3 \quad \lambda_4 = 4, \quad \lambda_5 = 5.$)

$P(N=1) = \frac{1}{1+2+3+4+5} = \frac{1}{15}$

$P(N=5) = \frac{5}{15}$

$X \sim \exp(\lambda)$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$X_1 \sim \exp(1) \quad E(X_1) = 1$

$X_5 \sim \exp(5) \quad E(X_5) = \frac{1}{5}$

(2) $P(Z > z) = \sum_{i=1}^n \underbrace{P(N=i, Z>z)} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\lambda_i}{\lambda}} e^{-\lambda z} = \frac{\lambda}{\lambda} e^{-\lambda z} = e^{-\lambda z}.$

$P(Z \le z) = 1 - e^{-\lambda z}$ $\quad Z \sim \exp\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\right)$

ή $P(Z > z) = P(X_1 > z, \dots, X_n > z) = P(X_1 > z) \cdot \ldots \cdot P(X_n > z)$

$= e^{-\lambda_1 z} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_n z} = e^{-\lambda z}$

Παρατήρηση

$$P(Z>x \mid N=i) = \frac{P(Z>x, N=i)}{P(N=i)} = \frac{\frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\lambda x}}{\frac{\lambda_i}{\lambda}} = e^{-\lambda x} = P(Z>x)$$

$\Rightarrow Z, N$ ανεξάρτητες τμ.

Άσκηση

Έστω ότι έχουμε 2 Η/Υ. Έστω X_1 ο χρόνος μέχρι να χαλάσει ο Η/Υ νο 1 και X_2 ο χρόνος μέχρι να χαλάσει ο Η/Υ νο 2

και $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$ με $E(X_1) = 4$ έτη $= \frac{1}{\lambda_1}$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ με $E(X_2) = 2$ έτη $= \frac{1}{\lambda_2}$.

Αν ένας από τους 2 χαλάσει, κάνω παραγγελία για νέο υπολογιστή

α) Να υπολογίσουμε $E(Z)$ όπου $Z = \min\{X_1, X_2\}$

$P(Z>z) = e^{-\lambda z}$ ή $Z \sim \exp(\lambda_1+\lambda_2)$ $\quad Z \sim \exp\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$ $\quad Z \sim \exp\left(\frac{3}{4}\right)$ $\quad E(Z) = \frac{4}{3}$.

$E(Z) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$ $\qquad \lambda_1 = \frac{1}{4}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

β) Ποια η πιθανότητα να χαλάσει πρώτα ο Η/Υ νο 1;

$$P(X_1 < X_2) = P(N=1) = \frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

⑤ Έστω $X_1, \dots, X_n \sim exp(\lambda)$, ανεξάρτητες τμ.

τότε $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$ $(Erlang(n, \lambda))$

απόδειξη

$X_i \sim exp(\lambda) \qquad \tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$

$$\tilde{F}_{S_n}(s) \underset{\text{ισον.}}{\overset{\text{ανεξ}}{=}} \left(\tilde{F}_X(s)\right)^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n \leftarrow \text{αναγνωρίζω ως μετασχ. L-S της } \Gamma(n,\lambda)$$

$$\Rightarrow S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$$

Έστω

(6) $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. & ισόνομες τμ $X_i \sim exp(\lambda)$,
N τμ ανεξ. των X_i, $P(N=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p \quad n=1,2,\ldots$

Τότε

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim exp(\lambda p)$$

← τυχαίο άθροισμα

απόδειξη

$$\tilde{F}_{S_N}(s) = P_N\left(\tilde{F}_X(s)\right)$$

από προηγούμενα μαθήματα

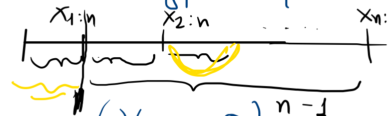
$$\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s} \qquad P_N(z) = E(z^N) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$$

$$\tilde{F}_{S_N}(s) = \frac{p\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-(1-p)\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda p}{\lambda p + s}$$

δηλ. $S_N \sim exp(\lambda p)$

⑦ Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n \sim exp(\lambda)$ ανεξ. τμ

$X_{1:n} \le X_{2:n} \le \dots \le X_{n:n}$ οι αντίστοιχοι διατεταγμένοι χρόνοι



Για $\underline{D_i} = \begin{cases} X_{1:n} & i=1 \\ X_{i:n}-X_{i-1:n} & i>1 \end{cases}$ $(X_{0:n}=0)$

(n μηχανές τίθενται σε λειτουργία τη χρονική στιγμή 0,

$X_{1:n} = \min\{X_1,\dots,\cancel{X_n}\}$ ο χρόνος που θα χαλάσει 1η φορά κάποια μηχανή

$X_{n:n} = \max\{X_1,\dots,X_n\}$

$$\overset{n\cdot\lambda}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}$$

Έχω αποδείξει ότι $D_1 = X_{1:n} \sim exp(n\cdot\lambda)$ Έστω $N=j$

Παρατηρώ ότι $X_{2:n} = \min\{X_i, i\neq j\}$

$X_{2:n} - X_{1:n} = D_2$ Κοιτάω το χρόνο μετά τη βλάβη της j

Οπότε λόγω της αμνήμονης ιδιότητας

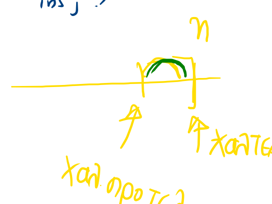
Έχω $n-1$ μηχανές, η καθε μια χρόνο ζωής X_i! (εκτός της j)

οπότε $D_2 \sim exp(n-1)\lambda$

⋮

Γενικά $D_i \sim exp((n-i+1)\lambda)$

με $\tilde{D}_i = (n-i+1)D_i \sim exp(\lambda)$ ←



Αποδεικνύεται ότι $D_1, D_2, \dots D_n$ είναι ανεξ. τμ.

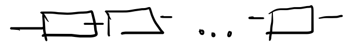
$X_{n:n} = D_1 + D_2 + \dots + D_n$

$(n-1+1)\lambda$ $(n-2+1)\lambda$ λ

$nD_1 + (n-1)D_2 + \dots + D_n \sim \Gamma(n,\lambda)$

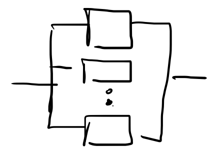
[Εφαρμογή στη Θεωρία Αξιοπιστίας

{ Το i μηχάνημα έχει χρόνο ζωής $X_i \sim exp(\lambda_i)$

- Έστω n μηχανήματα σε σειρά 

  Αν χαλάσει 1, σταματά το σύστημα.

  Μας ενδιαφέρει το $X_{1:n}$



- Έστω n μηχανήματα παράλληλα

  Χαλάνε όλα $\Rightarrow$ χαλάει το Σ.

  Μας ενδιαφέρει το $X_{n:n}$

- K out of n σύστημα.

  Λειτουργεί εφόσον λειτουργούν τουλάχιστον k μονάδες

  Μας ενδιαφέρει ο χρόνος $X_{n-k+1:n} = \sum_{j=1}^{n-k+1} D_j$

$$E(X_{n-k+1:n}) = \sum_{j=1}^{n-k+1} E(D_j) = \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{1}{(n-j+1)\lambda}$$
]

Σειρά Ασκήσεων 1 ΣΜΕ 2021-22 Μπουργνετας

ΑΣΚΗΣΗ 13. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X \sim Exp(\lambda)$ και $Y \sim Exp(\mu)$, και $Z = X + Y$. Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της Z:

1. Απευθείας ← να γίνει με συνέλιξη H/W
2. Μέσω μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes. ← έχει γίνει

Σειρα ασκήσεων 2021-22 Μπουρνέτας

ΑΣΚΗΣΗ 14. Έστω τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes $\tilde{F}_X(s)$, και Y ανεξάρτητη της X με $Y \sim Exp(\lambda)$. Δείξτε ότι $P(X < Y) = \tilde{F}_X(\lambda)$.

H/W

ΑΣΚΗΣΗ 16. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X \sim Exp(\lambda)$ και $Y \sim Exp(\mu)$, και $Z = \max(X, Y)$. Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής $F_Z(z)$ της Z και ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes $\tilde{F}_Z(s)$.

H/W

Σειρα ασκήσεων 1 ΣΜΕΕ 2021-22 Μπουρνετας

ΑΣΚΗΣΗ 17. Θέλουμε να κατεβάσουμε δύο αρχεία Α, Β από το διαδίκτυο. Το αρχείο Α είναι διαθέσιμο στις ιστοσελίδες $A_1, \ldots, A_n$ και ο χρόνος λήψης από την A_i ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_i. Το αρχείο Β είναι διαθέσιμο στις ιστοσελίδες $B_1, \ldots, B_m$ και ο χρόνος λήψης από την B_i ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ_i (όλοι οι χρόνοι ανεξάρτητοι μεταξύ τους).
Έστω ότι την ίδια χρονική στιγμή αρχίζουμε ταυτόχρονα τη λήψη των δύο αρχείων από όλες τις πηγές.

1. Ποια είναι η πιθανότητα το αρχείο Α να κατέβει πριν το αρχείο Β;

2. Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος μέχρι να κατέβουν και τα δύο αρχεία.

H/W