αρχείο 04

Μετασχηματισμός Laplace - Stieljes (LST)

transform

(κυρίως
για τη μελέτη κατανομών μη-αρνητικών τμ)

Θυμίζουμε:

Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltges

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ διαμέριση του $[a,b]$ και $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ αύξουσα.

Κάτω ολοκλήρωμα R-S της f ως προς φ:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x) = \sup_{\substack{\text{διαμ}\\ \text{του } [a,b]}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\big(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\big) \right\}$$

Άνω ολοκλήρωμα R-S της f ως προς φ

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x) = \inf_{\substack{\text{διαμ.}\\ \text{του } [a,b]}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\big(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\big) \right\}$$

Εαν $\underline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x) = \overline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x)$ τότε η f είναι R-S ολοκληρώσιμη (ως προς φ)

και Ολοκλήρωμα R-S $= \int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$

- Εαν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ αύξουσα, δεξιά συνεχής και τμήματα συνεχεχής και παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα συνέχεια. Τότε η f είναι R-S ολοκληρώσιμη ως προς τη Φ

και

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) = \sum_{\substack{x \text{ σημείο}\\ \text{ασυνεχείας τη } \Phi}} f(x)\big(\Phi(x)-\Phi(x^-)\big) + \int_a^b f(x)\Phi'(x)\,dx$$

Έστω X τμ. διακριτή ή (απόλυτα) συνεχής ή μικτή τότε

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, d\underbrace{F_X(x)}_{\text{ασκ.}}$$

Πράγματι:

Εάν X διακριτή $\displaystyle E[g(X)] = \sum_{\substack{x \text{ σημεία} \\ \text{ασυνέχειας} \\ \text{της } F_X(x)}} g(x) P(X=x) = \sum_{x} g(x)\left[F_X(x) - F_X(x-1)\right]$

Εάν X συνεχής $\displaystyle E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\left(F_X(x)\right)' dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF_X(x)$

Μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της $\varphi(x)$ στο $[0,\infty)$ (φ αύξουσα)

$$= \tilde{\varphi}(s) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-sx}}_{g(x)} d\varphi(x) \qquad s \in D$$

Εάν φ παραγωγίσιμη $\tilde{\varphi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \varphi'(x)dx = \mathcal{L}(\varphi'(x))$ (*)

ο μετασχηματισμός Laplace της φ'

Μετασχηματισμός $\mathcal{L}$-S τυχαίας μεταβλητής X, $X \geq 0$ με σκ $F_X(x)$

αύξουσα
δεξιά συνεχής
κατά τμήματα συνεχής
παραγωγίσιμη στα τμήματα συνέχειας.

$$\boxed{\tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_X(x) = E(e^{-sX})}$$

Σχόλια

Εάν X διακριτή $\tilde{F}_X(s) = \sum_x e^{-sx} P(X=x) = P_X(e^{-s})$

Εάν X συνεχής $\tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_X(x)dx = \mathcal{L}(f(x))$

(*) Να θυμίσουμε $\mathcal{L}(f(x)) = \int_0^\infty e^{-sx} f_X(x)dx$ ο Laplace μετασχηματισμός της f

Ροπογεννήτρια

$$E(e^{tX}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^\infty e^{tx} f_X(x)\,dx & X \text{ συνεχής} \\ \sum_x e^{tx} f_X(x) & X \text{ διακριτή} \end{cases}$$

$\left(E(e^{tX}) = P_X(e^t)\right.$, P_X πιθανογεννήτρια

Χαρακτηριστική συνάρτηση
$\exists$ πάντα.

$$E(e^{itX}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^\infty e^{itx} f_X(x)dx \\ \sum_x e^{itx} f_X(x)dx. \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^\infty e^{itx} dF_X(x)$ Μετασχηματισμός Fourier-Stieltjes

Παρατηρήσεις - Ιδιότητες

1) Εάν X συνεχής τμ $\quad \tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF_X(x) = \int_0^\infty e^{-sx} \overset{\text{σππ}}{f_X(x)}\, dx = \mathcal{L}\{f\}(s)$

2) $\tilde{F}_X(-s) = E(e^{sX}) = M_X(s)$ ροπογεννήτρια της X

$\tilde{F}_X(s) = M_X(-s)$

3) $\tilde{F}_X(0) = 1$, $\quad \tilde{F}_X(s)$ συγκλίνει τουλάχιστο $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) \geq 0\}$

4) Εάν X διακριτή τμ $\quad \tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF_X(x) = \sum_x e^{-sx} P(X=x) = P_X(e^{-s})$

5) $\tilde{F}_X(s) = \tilde{F}_Y(s) \Leftrightarrow X, Y$ ισόνομες (χαρ. την κατανομή)

6) $E(X^r) = (-1)^r \tilde{F}_X^{(r)}(0)$

$$\tilde{F}_X(s) = E(e^{-sX}) \Rightarrow \tilde{F}_X^{(r)}(s) = E\left((-X)^r e^{-sX}\right) \overset{s=0}{=}$$

$$\tilde{F}_X^{(r)}(0) = E[(-X)^r] = (-1)^r E(X^r)$$

7) $X_1, \dots, X_n$ ανεξ τμ. $\quad S_n = X_1 + \dots + X_n$

$$\tilde{F}_{S_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} \tilde{F}_{X_i}(s) \overset{\text{ισον.}}{=} \left(\tilde{F}_X(s)\right)^n$$

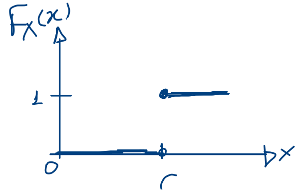
8) $X_1, X_2, \dots$ ακολ. ανεξ & ισονόμων τμ, $N \geq 0$ ανεξ τμ των X_i, $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$$\tilde{F}_{S_N}(s) = P_N\left(\tilde{F}_X(s)\right)$$

$$\tilde{F}_{S_N}(s) = E(e^{-sS_N}) \overset{\text{ΘΔΜΤ}}{=} E\left[E(e^{-sS_N}/N)\right] = E\left(\left(\tilde{F}_X(s)\right)^N\right) = P_N\left(\tilde{F}_X(s)\right)$$

Βασικά παραδείγματα

- Έστω $P(X=c)=1 \quad c\geq 0$



$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & x \geq c \\ 0 & x < c \end{cases}$$

$$\tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF_X(x) = \sum_x e^{-sx} P(X=x) = e^{-sc}$$

- $X \sim \exp(\lambda),\ \lambda>0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \delta\iota\alpha\varphi. \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

$\lambda + s > 0$
$s > -\lambda$

$$\tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d\left(1-e^{-\lambda x}\right) = \int_0^\infty e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda}{(\lambda+s)} \underbrace{\int_0^\infty (\lambda+s)\, e^{-(\lambda+s)x}\, dx}_{\sigma\pi\pi\ \exp(\lambda+s)\ =\ 1} = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

- $X \sim \text{Erlang}(n,\lambda)$ (*)

$$\tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$\tilde{F}_X(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$$

- Για $\phi(x) = x^n \quad n \geq 1$

$$\tilde{\phi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d(x^n) =$$

(*) $$\frac{\lambda^n}{(\lambda+s)^n} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda+s)^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-(\lambda+s)x}\, dx}_{\sigma\pi\pi\ \text{Erlang}(n,\lambda+s)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$$

Μετασχηματισμός Laplace Stieltjes και συνέλιξη.

X_1 τμ. $\quad F_{X_1}(\cdot)$ σκ. $\quad \tilde{F}_{X_1}(s)$ L-S μετασχ.

X_2 τμ. $\quad F_{X_2}(\cdot)$ σκ. $\quad \tilde{F}_{X_2}(s)$ L-S ״

X_1, X_2 ανεξάρτητες

$S = X_1 + X_2$

$$\boxed{\tilde{F}_S(s) = \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \tilde{F}_{X_2}(s)}$$

ασκ.

$$F_S(x) = P(X_1 + X_2 \le x) = \int_0^x P(X_1 + X_2 \le x \,/\, X_2 = u)\, dF_{X_2}(u)$$

ή

συνέλιξη

$$F_S(x) = \int_0^x P(X_1 \le x - u)\, dF_{X_2}(u) = \underbrace{\int_0^x F_{X_1}(x-u)\, dF_{X_2}(u)}$$

$$\left(\text{ή} = \int_0^x F_{X_2}(x-u)\, dF_{X_1}(u) \right)$$

$$\boxed{F_S(x) = (F_{X_1} * F_{X_2})(x)}$$

$$\widetilde{(F_{X_1} * F_{X_2})}(s) = \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \tilde{F}_{X_2}(s)$$

Για $Z = \begin{cases} X & \text{με πιθ } p \\ Y & \text{" } 1-p \end{cases}$

$$F_Z(z) = p F_X(z) + (1-p) F_Y(z) \leftarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{F}_Z(s) = p \hat{F}_X(s) + (1-p) \tilde{F}_Y(s)$$

συνέλιξη

Άσκηση

Έστω X_1, X_2 ανεξ τμ $X_1 \sim exp(\lambda)$, $X_2 \sim exp(\mu)$, $\lambda \neq \mu$.
Ποια είναι η κατανομή της $S = X_1 + X_2$;

Λύση

$$\tilde{F}_S(s) = \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \tilde{F}_{X_2}(s) = \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+s} \cdot \frac{\mu}{\mu+s} = \frac{A}{\lambda+s} + \frac{B}{\mu+s}}$$

$A = ;$ $\quad B = ;$

πολ/ζω με το $\lambda+s$

$$\frac{\lambda\mu}{\mu+s} = A + \frac{B(\lambda+s)}{\mu+s} \xrightarrow{s=-\lambda} \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} = A$$

πολ/ζω με το $\mu+s$

$$\frac{\lambda\mu}{\lambda+s} = \frac{A(\mu+s)}{\lambda+s} + B \xrightarrow{s=-\mu} \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu} = B$$

$$\tilde{F}_S(s) = \frac{\mu}{\mu-\lambda} \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+s}} - \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \frac{\mu}{\mu+s} \Rightarrow$$

ασκ.

$$F_S(x) = \frac{\mu}{\mu-\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right) - \frac{\lambda}{\mu-\lambda}\left[1 - e^{-\mu x}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ και $N \sim Geom(p)$, N ανεξάρτητη των $X_1, \ldots X_n$

$P(N=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p \quad n = 1, 2, \ldots$ (# δοκιμών μέχρι 1η επιτ.)

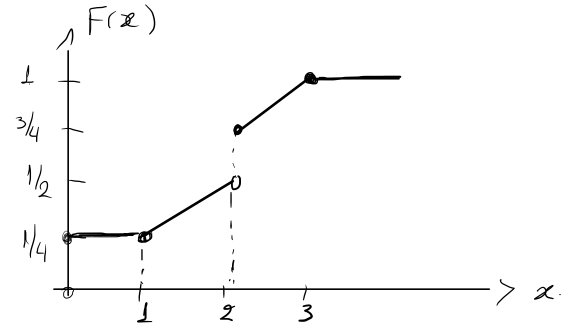
Τυχαίο άθροισμα → $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim ;$

Λύση

ΑΣΚΗΣΗ 11. Δίνεται τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{4}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{x+1}{4}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E(X)$ και ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes $\tilde{F}_X(s)$.



Αντιστροφή μετασχηματισμού L-S

Αν $\tilde{F}(s) = \dfrac{s^2 - 2}{s^3 + 3s^2 + 2s} =$

κεφ 1   20 - 21   Οικονόμου

5. Έστω X, Y και Z ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με ρυθμούς λ, λ και μ αντίστοιχα, με $\lambda \neq \mu$. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της $X + Y + Z$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της.
Σημειώσεις τηλεδιδασκαλίας συνάντησης 3 - Χωρίο 4

α ασκήσεις H/W.