To be continued.

Αντιστροφή Πιθανογεννητριών

Έστω ότι η $P_X(z)$ έχει μορφή ως ρητή συνάρτηση $\frac{N(z)}{D(z)}$ Nominator / Denominator.

$N(z)$, $D(z)$ πολυώνυμα πεπερασμένου βαθμού

Εάν η $P(z)$ δίνεται ακριβώς, μπορούμε να την αντιστρέψουμε, χωρίς δυσκολία

Έστω ότι η $N(z)$ έχει αγνώστους. Κάποια γνώση μπορούμε να την έχουμε από το γεγονός ότι η $P(z)$ συγκλίνει στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο ($|z| \leq 1$)

Θεωρούμε επίσης ότι η $D(z)$ έχει ℓ "πόλους" (ρίζες) στο κλειστό μοναδιαίο κύκλο.

Οι ℓ αυτοί "πόλοι" πρέπει να μηδενίζουν και τον αριθμητή, διαφορετικά η $P(z)$ δε θα συγκλίνει εκεί

Έτσι:

- Παραγοντοποιούμε τον Παρονομαστή

βαθμού $\ell+m$ $\quad D(z) = \underset{\text{σταθ.}}{k_D}(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_\ell)\underbrace{(z-z_1^*)\cdot\ldots\cdot(z-z_m^*)}_{\text{εκτός μοναδιαίου κύκλου ρίζες}}$

Και ο αριθμητής γράφεται

βαθμού ℓ. $\quad N(z) = \underset{\text{σταθ.}}{k_N}(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_\ell)$

Δηλαδή $P(z) = \dfrac{K}{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i^*)}$ $\quad K = \dfrac{K_D}{K_N}$.

Αφού $P(1)=1$ έχουμε $K = \sum_{i=1}^{m}(1-z_i^*)$

Συνεπώς $P(z) = \prod_{i=1}^{m}\dfrac{(1-z_i^*)}{(z-z_i^*)}$, το οποίο γράφεται

$$P(z) = \frac{A_1}{z_1^*-z} + \ldots + \frac{A_m}{z_m^*-z}$$

όπου $\dfrac{A_i}{z_i^*-z} = \dfrac{A_i}{z_i^*}\dfrac{1}{1-\frac{z}{z_i^*}} = \dfrac{A_i}{z_i^*}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{z_i^*}\right)^k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_i}{(z_i^*)^{k+1}}z^k.$$

Έτσι $f_X(k) = \dfrac{A_1}{(z_1^*)^{k+1}} + \ldots + \dfrac{A_m}{(z_m^*)^{k+1}}$

$\underline{\text{Πχ}}$ $\quad P_X(z) = \dfrac{az+b}{(z-3)(z-\frac{2}{5})(z-\frac{3}{2})}$ Βρείτε $P(X=k)$ $k=0,1,\dots$

Λύση

$P_X(1) = 1 \quad \dfrac{a+b}{(-2)\frac{3}{5}(-\frac{1}{2})} = 1$ ή $\boxed{a+b=\frac{3}{5}}$

Πρέπει $\frac{2}{5}$ (<1) να είναι ρίζα του αριθμητή

$a\cdot\frac{2}{5}+b=0 \quad \boxed{2a+5b=0}$

$\Rightarrow b=-\frac{2}{5}$, $a=1$

$P_X(z) = \dfrac{\cancel{z-2/5}}{(z-3)\cancel{(z-\frac{2}{5})}(z-\frac{3}{2})} = \dfrac{1}{(z-3)(z-\frac{3}{2})} = \dfrac{A}{z-3} + \dfrac{B}{z-3/2}$

$\dfrac{1}{1-a} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k$

$|a|<1$

Πολλ/ζω και τα 2 μέλη με το $z-3$

$\dfrac{1}{z-\frac{3}{2}} = A + \dfrac{B(z-3)}{z-3/2}$ για $z=3 \Rightarrow \dfrac{1}{3-\frac{3}{2}} = A \Rightarrow A = \frac{2}{3}$

πολλ/ζω και τα 2 μέλη με το $z-3/2$

$\dfrac{1}{z-3} = \dfrac{A(z-3/2)}{z-3} + B$ για $z=3/2$ $\quad \dfrac{1}{\frac{3}{2}-3} = B \Rightarrow B = -2/3$

$\dfrac{1}{1-a}$

$P_X(z) = \frac{2}{3}\dfrac{1}{z-3} - \frac{2}{3}\dfrac{1}{z-3/2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\dfrac{1}{\frac{z}{3}-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\dfrac{1}{\frac{2}{3}z-1} = -\frac{2}{9}\dfrac{1}{1-\frac{z}{3}} + \frac{4}{9}\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}z}$

$P_X(z) = -\frac{2}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^k + \frac{4}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}z\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, z^k$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right) z^k$

$f_X(k) = -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^k \quad k=0,1,2,\dots$

Άσκηση

Έστω $X_1 \sim Geom(p_1)$ $\quad P(X_1=k) = (1-p_1)p_1^k \quad k=0,1,2,\ldots$

$X_2 \sim Geom(p_2)$ $\quad P(X_2=k) = (1-p_2)p_2^k \quad k=0,1,2,\ldots$

X_1, X_2 ανεξ. Να βρεθεί η σπη της $Y = X_1 + X_2$

λύση

Έχουμε δείξει $P_Y(z) = P_{X_1}(z) \cdot P_{X_2}(z)$ επειδή X_1, X_2 ανεξάρτητες

$X_1 \sim Geom(p_1)$ $\quad P_{X_1}(z) = \frac{1-p_1}{1-p_1 z}$ $\quad |p_1 z|<1$

$X_2 \sim Geom(p_2)$ $\quad P_{X_2}(z) = \frac{1-p_2}{1-p_2 z}$ $\quad |p_2 z|<1$

$$P_Y(z) = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1 z)(1-p_2 z)} = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y=k)\, z^k \qquad P(Y=k)$$

$p_1 \neq p_2$

$$\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1 z)(1-p_2 z)} = \frac{A}{1-p_1 z} + \frac{B}{1-p_2 z}$$

πολ/ζω με το $1-p_1 z$

$$\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-p_2 z} = A + \frac{B(1-p_1 z)}{1-p_2 z} \xRightarrow{z=\frac{1}{p_1}}$$

$$\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-\frac{p_2}{p_1}} = A \Rightarrow A = \frac{p_1(1-p_1)(1-p_2)}{p_1-p_2}$$

πολ/ζω με το $1-p_2 z$

$$\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-p_1 z} = \frac{A(1-p_2 z)}{1-p_1 z} + B \xRightarrow{z=\frac{1}{p_2}} B = -\frac{p_2(1-p_1)(1-p_2)}{p_1-p_2}$$

$$P_Y(z) = A \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(p_1 z)^k + B\sum_{k=0}^{\infty}(p_2 z)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(A p_1^k + B p_2^k)\, z^k$$

$$f_Y(k) = A \cdot p_1^k + B\, p_2^k = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{p_1-p_2}\, p_1^{k+1} - \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{p_1-p_2}\, p_2^{k+1} = \ldots$$

για $p_1 = p_2$

$$P_Y(z) = \frac{(1-p)^2}{(1-pz)^2} = (1-p)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k-1}{k} (pz)^k$$

πίνακες

$$f_Y(k) = \binom{k+1}{k}(1-p)^2 p^k = (k+1)(1-p)^2 p^k$$

Negative binomial

\# επιτυχιών μέχρι 2 αποτυχίες

H/W Άσκηση.

Έστω $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$. Δείξτε ότι $X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu)$

X, Y ανεξάρτητες

H/W Άσκηση

Έστω $X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(m,p)$, ανεξ. Δείξτε ότι $X+Y \sim Bin(n+m,p)$

Ο Χαρης εχει Πιτσαρια. Δεχεται τηλεφωνικές παραγγελιες. Ενα βραδυ δε κοιμηθηκε καλά, έτσι την άλλη μέρα ο Χαρη σημείωνε σωστά τη διευθυνση μιας παραγγελιας με πιθανότητα p. Εστω ότι ο # των παραγγελιων εκείνη τη μέρα ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λ.
Ποια ειναι η κατανομή του # των παραγγελιων όπου καταγράφηκε σωστά η διεύθυνση

Λύση

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{αν στο } i \text{ τηλεφώνημα έγινε σωστή καταγρ. διεύθυνσης} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$N = \#$ παραγγελιών $\quad N \sim \text{Poisson}(\lambda) \quad P_N(z) = \underbrace{e^{\lambda(z-1)}}$

$S_N = X_1 + \dots + X_N$. Τυχαίο άθροισμα

$P(X_i = 1) = p \qquad P_X(z) = 1 - p + pz$

$$P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z)) = e^{\lambda(1-p+pz-1)} = \underbrace{e^{\lambda p(z-1)}}$$

$S_N \sim \text{Poisson}(\lambda p)$

ΑΣΚΗΣΗ 4. Έστω ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2 \ldots$ με $X_i \geq 0$ και $E(X_i) = \mu_X < 1$. Έστω επίσης ακέραια τυχαία μεταβλητή $N \geq 1$ ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$, με συνάρτηση πιθανότητας $p_N(k) = P(N = k), k \geq 1$ και πιθανογεννήτρια $\tilde{p}_N(z)$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $\Pi_N = \prod_{i=1}^{N} X_i$. Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E(\Pi_N)$.

$$E(\Pi_N) = E[\underbrace{E(\Pi_N / N)}] \overset{\text{ανεξ}}{=} E[E(X_1) \cdots E(X_N)]$$

$$\overset{E(X_i) = \mu_X}{=} E[\boxed{\mu_X}^N] = E(z^N) = P_N(z)$$

$$= P_N(\mu_X)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(\Pi_N / N = n)\, P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E(\Pi_n)\, P(N = n) \ldots$$

4. Έστω X μια μη-αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή με πιθανογεννήτρια

$$P_X(z) = \frac{c}{6 - z - z^2}.$$

1. Να προσδιοριστεί η σταθερά c.
2. Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E[X]$.
3. Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x) = P(X = x)$, $x = 0, 1, 2, \ldots$.
4. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X$ είναι άρτιος$)$.

Φυλλάδιο Βασικών ασκήσεων Οικονόμου

Σημειώσεις τηλεδιδασκαλίας συνάντησης 3 - Χωρίο 2

$$P(X \text{ άρτιος}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k)$$

$$+\begin{cases} P_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k) + \sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k+1) \\ P_X(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)(-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k)\underbrace{(-1)^{2k}}_{1} + \sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k+1)\underbrace{(-1)^{2k+1}}_{-1} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad P_X(1) + P_X(-1) = 2 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k)}$$

Σειρα Ασκήσεων 1
Μπουρνέτας

ΑΣΚΗΣΗ 8. Έστω ακέραια τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$ με πιθανογεννήτρια

$$\tilde{p}_X(z) = \frac{5 - 2z}{z^2 - 6z + 8}.$$

Να βρεθεί η κατανομή της X.

Σειρα ασκήσεων 1 Μπουρνετας

ΑΣΚΗΣΗ 9. Έστω ακέραια τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$ με πιθανογεννήτρια

$$\tilde{p}_X(z) = \frac{\alpha}{3z^2 - 10z + 8}.$$

Να προσδιοριστεί η τιμή του α και να βρεθεί η κατανομή της X.

Άσκηση

Έστω a_n η πιθανότητα σε n δοκιμές Bernoulli (με πιθανότητα επιτυχίας p) να εμφανιστεί άρτιος αριθμός επιτυχιών. Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση για την a_n

Λύση

α' τρόπος όπως πριν. για άρτιο αποτέλεσμα

β' τρόπος . . . H/W $X_n \sim B(n,p)$ $Y_1 = \begin{cases} 1 & \text{Επιτυχία στη } 1^{\underline{η}} \text{ δοκιμή} \\ 0 & \text{'' } \end{cases}$

$a_n = P(X_n = \text{άρτιος}) = P(X_n \text{ άρτιος} / Y_1 = 1) P(Y_1 = 1) + P(X_n \text{ άρτιος} / Y_1 = 0) P(Y_1 = 0)$

⋮

Άσκηση

Ρίχνουμε ένα μη αμερόληπτο νόμισμα με πιθανότητα για "Κεφαλή" = p.
Έστω r_n = P(σε μια ακολουθία n συνεχόμενων ρίψεων, να μην έχουμε δύο "Κεφαλές" στη σειρά.)

Δείξτε ότι $r_0 = 1$, $r_1 = 1$, $r_n = q r_{n-1} + pq r_{n-2}$, $q = 1-p$

Βρείτε την $G_r(s) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n s^n$

Λύση

όλες οι άλλες H/W.