αρχείο 03

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

"Χρήσιμα μαθηματικά εργαλεία για τον προσδιορισμό και μελέτη της κατανομής τυχαίων μεταβλητών και κυρίως αυτών που μπορούν να παρασταθούν ως αθροίσματα άλλων ανεξάρτητων τμ"

Οι πιο χρήσιμοι στις στοχαστικές μεθόδους:

- Πιθανογεννήτριες (Για μελέτη μη αρνητικών ακεραίων τ.μ)
- Μετασχηματισμοί Laplace

Πιθανογεννήτριες

Probability Generating function

(εισήχθησαν από τους de Moivre και Euler

στις αρχές του 18ου αιώνα)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X τμ με πεδίο τιμών ακέραιους μη αρνητικούς και συνάρτηση πιθανότητας $f_X(k) = P(X=k)$ $k = 0, 1, \ldots$

Η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων (πιθανογεννήτρια) της τμ X ορίζεται από τη σχέση

← πιθανοθεωρ. αντικείμενο

$$\underset{\text{όρισμα}}{P_X(z)} = \underbrace{E(z^X)}_{\text{νέα τμ}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) z^k}_{}$$

$P(X=k)$ (μια δυναμοσειρά)

(συγκλίνει : για τουλάχιστον για $|z| \le 1$)

(κλειστός μοναδιαίος δίσκος)

$z \in \mathbb{C}$

[Γενικά εαν έχω συλλογή πραγ. αριθμών $(a_k)_{k \ge 0}$, $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ είναι γεννήτρια συνάρτηση της $(a_k), k \ge 0$

$a_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(z) \Big|_{z=0}$]

[Θυμίσουμε MGF ροπογεννήτρια $M_X(t) = \underbrace{E(e^{tX})}_{} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} t^k$]

Ιδιότητες

① $P_X(0) = f_X(0)$

② $P_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) = 1$ (*) $\quad$ (εάν $X < \infty$ με πιθ 1)

③ $f_X(k) = P(X=k) = \frac{1}{k!} P_X^{(k)}(0) \qquad k = 0, 1, \dots$

δηλαδή γνωρίζοντας τη γεννήτρια συνάρτηση παίρνω τις συν. πιθανότητας
(∃ 1-1 αντιστοιχία) $\quad$ (γι αυτό ονομάζεται ΠΙΘΑΝΟγεννήτρια)
$P_X(z)$ χαρακτηρίζει την κατανομή

Εάν $P_X(z) = P_Y(z)$, για z σε διάστημα που περιέχει το 0 $\iff f_X(k) = f_Y(k) \ \forall k$
(X, Y ισόνομες)

④ $E((X)_{(r)}) = E[X(X-1)(X-2)\cdot\ldots\cdot(X-r+1)] = P_X^{(r)}(1) \qquad r \geq 1$ $\quad$ παραγοντική ροπή r-τάξης

$E(X) = P_X^{(1)}(1)$

$E(X(X-1)) = P_X^{(2)}(1)$ $\quad$ ή $\quad E(X^2) - E(X) = P_X^{(2)}(1)$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = P_X^{(2)}(1) + P_X^{(1)}(1) - \left(P_X^{(1)}(1)\right)^2$

(*) Σχόλιο: $\lim_{s \uparrow 1} P_X(s) = \lim_{s \uparrow 1} E(s^X) = P(X < \infty)$ → μας επιτρέπει να ελέγξουμε εάν η μεταβλητή είναι πεπερ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $S_n = X_1 + \dots + X_n$ άθροισμα n ανεξάρτητων τ.μ. με πεδίο τιμών μη αρνητικούς ακέραιους, τότε

$$P_{S_n}(z) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z)$$

απόδειξη

$$P_{S_n}(z) = E(z^{S_n}) = E(z^{X_1 + \dots + X_n}) = E(z^{X_1} \cdot \dots \cdot z^{X_n}) \overset{\text{ανεξ } X_i}{=}$$

$$= E(z^{X_1}) \cdot \dots \cdot E(z^{X_n}) = P_{X_1}(z) \cdot \dots \cdot P_{X_n}(z)$$

X_i ανεξ & ισόνομες $\qquad P_{S_n}(z) = \left(P_X(z)\right)^n$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξ. & ισόνομων τ.μ. με πιθανογεννήτρια $P_X(z)$ και τυχαία μεταβλητή N που παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές, ανεξάρτητες των X_i, $i = 1, 2, \dots$ και πιθανογεννήτρια $P_N(z)$

Έστω $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ τότε $P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$

απόδειξη

$$P_{S_N}(z) = E(z^{S_N}) \stackrel{\Theta\Delta\text{MT}}{=} E\left[\underbrace{E(z^{S_N}/N)}\right] = E\left[P_X^N(z)\right] =$$

$$= P_N(P_X(z))$$

αναλυτικά $E(z^{S_N}) \stackrel{N}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E(z^{S_N}/N=n)P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_X^n(z)\,P(N=n)$

$$= P_N(P_X(z))$$

$$E(S_N) = P_{S_N}'(z)\Big|_{z=1} = \left[P_N'(P_X(z))\,P_X'(z)\right]\Big|_{z=1}$$

$$= P_N'(\underbrace{P_X(1)}_{1}) \cdot P_X'(1) = P_N'(1)\,P_X'(1)$$

$$= E(N) \cdot E(X)$$

ανάλογα. $V(S_N) = E(N)V(X) + [E(X)]^2 V(N)$ ως άσκηση.

H/W. ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $R(j) = P(X > j) = \sum_{k=j+1}^{\infty} p_X(k)$ και έστω $Q_X(s) = \sum_{j=0}^{\infty} R(j) s^j$

Δείξτε ότι

$$Q_X(s) = \frac{1 - P_X(s)}{1-s} \qquad s < 1$$

απόδειξη.

Πιθανογεννήτριες κλασικών διακριτών τ.μ.

$X \sim Bernoulli(p)$

$$f_X(k) = \begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$$

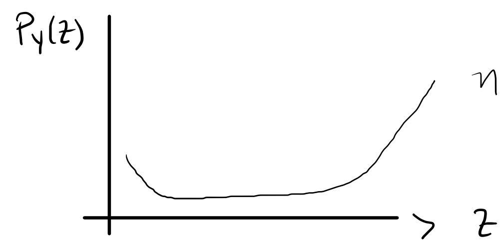
$$P_X(z) = E(z^X) = z^0 P(X=0) + z^1 P(X=1) = 1(1-p) + z\cdot p = 1-p+zp$$

$Y \sim Binomial(n,p)$

$$f_Y(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k=0,1,\ldots n \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$P_Y(z) = E(z^Y) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (zp)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (1-p+zp)^n$$



$n=4 \quad p=0.2$

Σχόλιο

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad X_i$ ανεξ Bernoulli(p)

$$P_Y(z) = P_X^n(z)$$

$X \sim Geom(p)$ • $X = \#$ αποτυχιών μέχρι 1η επιτυχία

$$P(X=k) = \begin{cases} (1-p)^k p & k = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$P_X(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (1-p)^k \cdot p = p \sum_{k=0}^{\infty} (z(1-p))^k = p \frac{1}{1-z(1-p)}$$

$$|z(1-p)| < 1 \quad \text{ή} \quad |z| < \frac{1}{1-p}$$

β' τρόπος $Y_1 = \begin{cases} 1 & \text{επιτυχία 1η δοκιμή} \\ 0 & \text{αποτυχία} \end{cases}$

$$P_X(z) = E(z^X) \overset{ΘΔΜΤ}{=} E[E(z^X / Y_1)] = E(z^X / Y_1 = 1) P(Y_1 = 1) + E(z^X / Y_1 = 0) P(Y_1 = 0)$$

$$= z^0 \cdot p + E(z^{X+1})(1-p) = p + z(1-p) E(z^k) = p + z(1-p) P_X(z)$$

Λύνω ως προς $P_X(z)$

• $X = \#$ δοκιμών μέχρι 1η επιτυχία

$$P(X=k) = \begin{cases} (1-p)^{k-1} p & k = 1,2\dots \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$P_X(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k (1-p)^{k-1} \cdot p = \frac{zp}{1-z(1-p)} \qquad |z(1-p)| < 1$$

$Y \sim$ Neg Binom $Y = \#$ αποτυχιών μέχρι n-οστή επιτυχία

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $X_i \sim Geom(p)$ $P(Y=k) = \binom{n+k-1}{k} \cdot (1-p)^k \cdot p^n$

πραγματοποιούν σενάριο

$\underbrace{AA\cdots\cdots A}\, E\, \underbrace{AA}\, E \cdots\cdots AAA \,|\, E$

$$P_Y(z) = P_X^n(z) = \left[\frac{p}{1-z(1-p)}\right]^n$$

Εάν $Y = \#$ επιτυχιών μέχρι τη n-οστή αποτυχία

$P(Y=k) = \binom{n+k-1}{k} p^k (1-p)^n$ $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$P_Y(z) =$; H/W

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-c} \frac{c^k}{k!} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} = e^c$$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad k=0,1,\ldots$$

$\llcorner$ 0 διαφορετικά

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{-\lambda(1-z)}$$

Παρατηρείστε $\quad P_X^{(r)}(z) = \lambda^r e^{-\lambda(1-z)} = E[(X)_k]$

και $\quad E(X) = P_X^{(1)}(1) = \lambda$

$$V(X) = P_X^{(2)}(1) + P_X^{(1)}(1) - [P_X^{(1)}(1)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Άσκηση: $\quad E[X(X-1)(X-2)\cdots(X-k)] = \lambda^{k+1}$

$X \sim \text{Discrete Uniform}(\{0,1,2,\ldots,n-1\})$

$$P(X=k) = \frac{1}{n} \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

$$P_X(z) = z^0 \cdot \frac{1}{n} + z^1 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + z^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1}{n} \frac{1-z^n}{1-z}$$

To be continued.

Αντιστροφή Πιθανογεννητριών

Έστω ότι η $P_X(z)$ έχει μορφή ως ρητή συνάρτηση $\frac{N(z)}{D(z)}$ Nominator / Denominator.

$N(z)$, $D(z)$ πολυώνυμα πεπερασμένου βαθμού

Εάν η $P(z)$ δίνεται ακριβώς, μπορούμε να την αντιστρέψουμε, χωρίς δυσκολία

Έστω ότι η $N(z)$ έχει αγνώστους. Κάποια γνώση μπορούμε να την έχουμε

από το γεγονός ότι η $P(z)$ συγκλίνει στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $(|z| \leq 1)$

Θεωρούμε επίσης ότι η $D(z)$ έχει ℓ "πόλους" (ρίζες) στο κλειστό μοναδιαίο κύκλο.

Οι ℓ αυτοί "πόλοι" πρέπει να μηδενίζουν και τον αριθμητή, διαφορετικά η $P(z)$ δε θα συγκλινε εκεί

Έτσι:

- Παραγοντοποιούμε τον Παρονομαστή

βαθμού $\ell+m$

$$D(z) = \underset{\text{σταθ.}}{k_D}(z-z_1)\cdot \ldots \cdot (z-z_\ell)\underbrace{(z-z_1^*)\cdot \ldots \cdot (z-z_m^*)}_{\text{εκτος μοναδιαιου κυκλου ρίζες}}$$

και ο αριθμητής γράφεται

βαθμου ℓ.

$$N(z) = \underset{\text{σταθ.}}{k_N}(z-z_1)\cdot \ldots \cdot (z-z_\ell)$$

Δηλαδή $P(z) = \frac{K}{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i^*)}$ $\quad K = \frac{K_D}{K_N}$.

Αφού $P(1)=1$ έχουμε $K = \sum_{i=1}^{m}(1-z_i^*)$

Συνεπώς $P(z) = \prod_{i=1}^{m} \frac{(1-z_i^*)}{(z-z_i^*)}$, το οποίο γράφεται

$$P(z) = \frac{A_1}{z_1^*-z} + \ldots + \frac{A_m}{z_m^*-z}$$

όπου

$$\frac{A_i}{z_i^*-z} = \frac{A_i}{z_i^*}\frac{1}{1-\frac{z}{z_i^*}} = \frac{A_i}{z_i^*}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_i^*}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_i}{(z_i^*)^{k+1}} z^k.$$

Έτσι

$$f_X(k) = \frac{A_1}{(z_1^*)^{k+1}} + \ldots + \frac{A_m}{(z_m^*)^{k+1}}$$