αρχείο 02

Συχνά έχουμε αθροίσματα της μορφής

$$X_1 + X_2 + \dots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

όπου $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες & ισόνομες τ.μ. και

N διακριτή τυχαία μεταβλητή

Πχ

Μηχάνημα αυτόματης ανάληψης : N πελάτες φτάνουν σε μια μέρα.
Ο καθένας σηκώνει ποσό X_i. Το συνολικό ποσό σε μια μέρα $= X_1 + \dots + X_N$

Ουρά αναμονής : N πελάτες σ' ένα ταμείο σ' ένα συγκ. χρ. διάστημα. X_i ο χρόνος εξυπηρέτησης του i πελάτη.

Θεωρία Κινδύνου : N απαιτήσεις σε μια ασφαλιστική εταιρία σε 1 εβδομάδα
Έστω X_i το ποσό της i απαίτησης

Μοντέλα Πληθυσμών : Έστω N ο # φυτών που καλλιεργούνται σε μια περιοχή
και X_i ο # καρπών που δίνει το i φυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. & ισόνομες τμ με πεπερασμένη μέση τιμή $E(X)$ και N τμ. που παίρνει τιμές στους θετικούς ακεραίους, N ανεξάρτητη των $(X_1, X_2, X_3, \ldots)$ και $E(N) < \infty$, Τότε για $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

(1) $E[S_N] = E(X_1) \cdot E(N)$ και (2) $V(S_N) = V(X)E(N) + E^2(X)V(N)$

(2) $V(S_N) = V(X)E(N) + E^2(X)V(N)$

απόδειξη

$$(i)\quad E(S_N) \overset{\text{ΘΔΜΤ}}{=} E[E(S_n/N)] = \sum_{n=0}^{\infty} E\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i / N = n\Big) \cdot P(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i / N=n\Big) P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} E\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) P(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) P(N=n) \overset{\text{ισόνομες}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot E(X_1) P(N=n) =$$

$$= E(X_1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n) = E(X_1) \cdot E(N)$$

ή άμεσα. $E(S_N) = E(E(S_N/N)) = E\Big(E\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i / N\Big)\Big) = E\Big(N \underbrace{E(X_1)}_{\text{σταθ}}\Big) = E(X_1) \cdot E(N)$

$$(\text{?})\ Var(S_N) = E(S_N^2) - E^2(S_N) \quad (*) \qquad (E(S_N) = E(N)E(X_1))$$

$(**)$

$$E(S_N^2) \overset{\Theta\Delta MT}{=} E(E(S_N^2/N)) = \sum_{n=0}^{\infty} E(S_N^2/N=n)P(N=n) =$$

$$\overset{N \text{ ανεξ } x_i}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E(S_n^2)\ P(N=n)$$

$$E(S_n^2) = Var(S_n) + E^2(S_n) \overset{\text{ανεξ}}{=} n \cdot Var X_1 + (n \cdot E(X_1))^2$$

$$E(S_N^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (n\, Var X_1 + n^2 E^2(X_1))\, P(N=n) =$$

$$= Var(X_1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n\, P(N=n) + E^2(X_1) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(N=n)$$

$$= Var(X_1) \cdot E(N) + E^2(X_1)\, E(N^2)$$

$$*\quad V(S_N) = Var(X_1)E(N) + E^2(X)E(N^2) - [E(N)E(X_1)]^2$$

$$= Var(X_1)E(N) + E^2(X)[E(N^2) - E^2(N)] = Var(X_1)E(N) + E^2(X)Var(N)$$

$(**)$

$$E(S_N^2) = E[E(S_N^2/N)] = E[Var(S_N/N) + E^2(S_N/N)] =$$

$$= E[N\, Var(X_1) + N^2 E^2(X_1)] = E(N)\, Var(X_1) + E^2(X_1)\,E(N^2)$$

Η ισότητα $E(S_N) = E(N)\cdot E(X)$ που αποδείξαμε στην περίπτωση που N είναι ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \dots$ ισχύει και στην περίπτωση που N είναι χρόνος διακοπής

ΟΡΙΣΜΟΣ: $X_1, X_2, \dots$, N χρόνος διακοπής εάν $\{N=n\}$ καθορίζεται πλήρως από (το πολύ) τη πληροφορία των $X_1, \dots, X_n$ stopping time

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια τμ N που παίρνει τιμές στους θετικούς ακεραίους είναι χρόνος διακοπής εάν το γεγονός $\{N \le n\}$ προσδιορίζεται πλήρως από τις $X_1, \dots, X_n$ δηλαδή η τμ $1_{\{N\le n\}}$ είναι συνάρτηση των $X_1, \dots X_n$

ΘΕΩΡΗΜΑ WALD

Εάν $X_1, X_2, \dots$ είναι ανεξ. & ισόνομες τμ με πεπερ. μέση τιμή $E(X)$, N είναι stopping time με $E(N) < \infty$ τότε $E(S_N) = E(X)\,E(N)$ Τύπος του Wald.

απόδειξη

$$E(S_N) = E\Big(\sum_{n=1}^{\infty} X_n 1_{\{N\ge n\}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n 1_{\{N\ge n\}}) = \sum_{n=1}^{\infty} E\big[E(X_n 1_{\{N\ge n\}} / X_1, \dots, X_{n-1})\big]$$

αλλά $1_{\{N\ge n\}} = 1 - 1_{\{N\le n-1\}}$ συνάρτηση των $X_1, \dots, X_{n-1}$ ⇒ Βγάζω τη δείκτρια εκτός της δέσμευσης

X_n ανεξ. των $X_1 \dots X_{n-1}$

$$\text{Έτσι } E(S_N) = \sum_{n=1}^{\infty} E\big[1_{\{N\ge n\}} \cdot E(X_n / X_1, \dots, X_{n-1})\big] = \sum_{n=1}^{\infty} E\big[1_{\{N\ge n\}} E(X_n)\big]$$

$$= \sum E\big[\underbrace{1_{\{N\ge n\}}}_{\text{τμ}} \underbrace{E(X)}_{\text{σταθ.}}\big] = E(X) \sum_{n=1}^{\infty} E\big[1_{\{N\ge n\}}\big] =$$

$$= E(X) \sum_{n=1}^{\infty} P(N \ge n) = E(X)\cdot E(N)$$

$$E(N) = P(N=1) + 2P(N=2) + 3P(N=3) \dots$$

$$= P(N=1)$$
$$+ \; P(N=2) + P(N=2)$$
$$\underbrace{P(N=3)} + \underbrace{P(N=3)} + \underbrace{P(N=3)} = P(N\ge 1) + P(N \ge 2) + P(N\ge 3) + \dots$$
$$+ \; \dots \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} P(N \ge n)$$

Σειρά ασκήσεων 1 Μπουρνέτας 21-22

think ☺

ΑΣΚΗΣΗ 3. Θεωρήστε το εξής πείραμα τύχης: Έστω $k \in \{1, \ldots, 6\}$. Ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι διαδοχικά και $X_1, X_2, \ldots$ είναι τα αποτελέσματα των ρίψεων. Έστω $N = \inf\{n \geq 1 : X_n = k\}$ ο αριθμός των ρίψεων έως την πρώτη φορά που το αποτέλεσμα είναι k, και $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ το άθροισμα των N ρίψεων.

(α) Δείξτε ότι δεν ισχύουν οι ικανές συνθήκες για να μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος του Wald για ανεξάρτητες N και $X_1, X_2, \ldots$: $E(S_N) = E(N)E(X)$.

(β) Δείξτε ότι παρ' όλα αυτά ισχύει ότι $E(S_N) = E(N)E(X)$.

Σημείωση: Ο τύπος του Wald ισχύει γενικότερα όταν η N είναι *χρόνος διακοπής (stopping time)*. Συγκεκριμένα έστω $\{X_1, X_2, \ldots\}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (όχι απαραίτητα ανεξάρτητων). Μια τυχαία μεταβλητή N λέγεται χρόνος διακοπής ως προς την ακολουθία $\{X_n\}$, αν η N παίρνει θετικές ακέραιες τιμές και το γεγονός $\{N = n\}$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές των $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Η ιδέα είναι η εξής: Έστω ότι ένας παίκτης παίζει ένα παιχνίδι σε βήματα και στο βήμα $n = 1, 2, \ldots$ παρατηρεί την τιμή της τυχαίας μεταβλητής X_n. Σε κάθε βήμα έχει το δικαίωμα να συνεχίσει ή να σταματήσει και να διακόψει το παιχνίδι για πάντα. Η απόφασή του για διακοπή στο βήμα n εξαρτάται μόνο από τις τιμές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ που έχει παρατηρήσει μέχρι αυτό το σημείο, αλλά μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση αυτών των μεταβλητών (με άλλα λόγια ο παίκτης αποφασίζει να σταματήσει ή όχι βασιζόμενος μόνο στη μέχρι στιγμής ιστορία των $\{X_n\}$ και όχι στις μελλοντικές τιμές ή σε οποιαδήποτε άλλη πληροφορία, αλλά μπορεί να εφαρμόσει οποιοδήποτε κανόνα διακοπής με αυτόν το περιορισμό). Έστω N η τυχαία μεταβλητή που δείχνει το βήμα στο οποίο θα σταματήσει ο παίκτης. Τότε η N είναι χρόνος διακοπής ως προς την ακολουθία $\{X_n\}$. Στην άσκησή μας είναι εύκολο να δούμε ότι η N είναι χρόνος διακοπής ως προς την ακολουθία $\{X_n\}$, επομένως ο τύπος του Wald συνεχίζει να ισχύει.