αρχειο 01

Επισκόπηση χρήσιμων γνώσεων από τη Θεωρία Πιθανοτήτων (και όχι μόνο)

μέρος Α

Ολοκλήρωμα Riemann

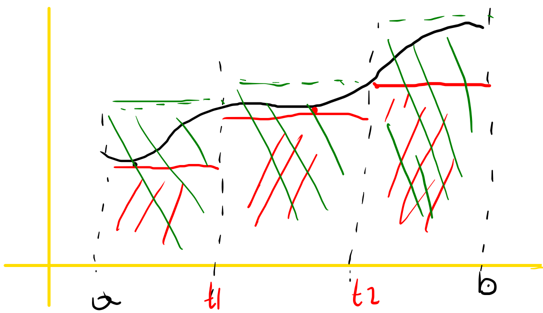
Εστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad a = t_0 < t_1 < t_2, \dots < t_n = b$

$\{t_0, \dots, t_n\}$ διαμέριση του $[a,b]$, (πεπερ. σύνολο)

Κάτω ολοκλήρωμα Riemann της f: $L(f) = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{\substack{\text{διαμ} \\ \text{του } [a,b]}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)(t_i - t_{i-1}) \right\}$

Άνω ολοκλ. Riemann της f: $U(f) = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{\substack{\text{διαμ} \\ \text{του } [a,b]}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)(t_i - t_{i-1}) \right\}$

Εαν $L(f) = U(f)$ τότε f είναι Riemann ολοκληρώσιμη με ολοκληρωμα Riemann $= \int_a^b f(x)\,dx$.



($\forall f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής είναι Riemann ολοκ-.)

Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltges

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ διαμέριση του $[a,b]$
και $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ αύξουσα.

Κάτω ολοκλήρωμα R-S της f ως προς φ: $\quad t_i - t_{i-1}$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x) = \sup_{\substack{\text{διαμ}\\ \text{του } [a,b]}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\,(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})) \right\}$$

Άνω ολοκλήρωμα R-S της f ως προς φ

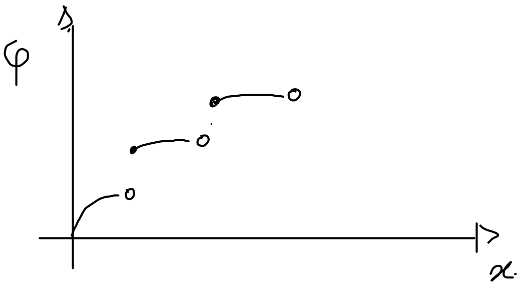
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x) = \inf_{\substack{\text{διαμ.}\\ \text{του } [a,b]}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\,(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})) \right\}$$

Εάν $\underline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x) = \overline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x)$ τότε η f είναι R-S ολοκληρώσιμη (ως προς φ)

και Ολοκλήρωμα R-S $= \int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η φ είναι κατά τμήματα συνεχής και παραγωγίσιμη μεταξύ των σημείων ασυνέχειας και g συνεχής



$$\int_a^b g(x)\,d\varphi(x) = \sum_{\substack{x\in[a,b] \\ \varphi \text{ ασυνεχής στο } x}} g(x)\left(\varphi(x)-\varphi(x^-)\right) + \int_a^b g(x)\varphi'(x)\,dx$$

Για $\varphi(x)=x$ το ολοκλήρωμα R-S ίδιο με το ολοκλήρωμα R

Αν ϕ είναι συνάρτηση κατανομής, σημεία ασυνέχειας έχω για διακριτές και μικτές τ.μ.

Ξαναγυρίζω στις Πιθανότητες

Έστω X τμ $\quad F(x) = P(X \leq x)$

$0 \leq F(x) \leq 1 \quad x \in \mathbb{R}$

$F(x_1) \leq F(x_2) \quad x_1 < x_2$

$\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$ (δεξ. συνεχής)

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$$E(X) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x) \right) = \begin{cases} \sum_{x=0}^{\infty} x P(X=x) \ \text{σπ.} & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \ \text{σππ.} & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Για X μη αρνητική τμ $\quad E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\, dx \quad$ **

Γενικά $\quad E(aX + \beta Y) = aE(X) + \beta E(Y)$

$V(aX + \beta) = a^2 V(X) \qquad V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ως ολοκλήρωμα Reimann-Steiljes

Έστω X τμ. με αθροιστική συν. κατανομής $F_X(x) = P(X \leq x)$

Τότε για $g(\cdot)$ συνεχή συνάρτηση έχω:

$$\boxed{E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x)}$$

Πράγματι από προηγούμενο Θεώρημα:

- Εαν X διακριτή $E[g(X)] = \sum_x g(x)\left(F_X(x) - F_X(x^-)\right) = \sum g(x) P(X=x)$
- Εαν X συνεχής $E[g(X)] = \int g(x) F_X'(x)\,dx = \int g(x) f(x)\,dx$

(F δεξιά συνεχής)

X διακριτή $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x) = \sum_x g(x) \left[\underbrace{F(x) - F(x^-)}_{= P(X=x)} \right] = E[g(X)]$

(πολυδιάστατες τ.μ.)

Η δισδιάστατη (X,Y) καλείται συνεχής αν υπάρχει συνάρτηση $f_{X,Y}(x,y)$ τ.ω. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad x,y \in \mathbb{R}$ και $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

και η από κοινού συνάρτηση κατανομής:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,s)\,ds\,dt$$

$$P(a < X \leq b,\ \gamma < Y \leq \delta) = \int_{a}^{b}\int_{\gamma}^{\delta} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

και

για κάθε σημείο συνέχειας (x,y) της $F_{X,Y}(x,y)$:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \lim_{\delta x,\delta y \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x+\delta x,\ y < Y \leq y+\delta y)}{\delta x\,\delta y}$$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$ περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$ " " " " " Y

είναι συναρτήσεις πυκν. πιθ. (μη αρνητικές + ολοκλ. $= 1$.)

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0$$

Δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

Έστω $(X,Y)'$ διδιάστατη τμ. Η συνάρτηση

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad -\infty < y < \infty$$

καλείται από κοινού (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής των X,Y

Η διδιάστατη τμ $(X,Y)'$ καλείται διακριτή αν με πιθανότητα 1 παίρνει πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο πλήθος τιμών.

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) \quad i,j = 0,1,2,\dots$$

καλείται από κοινού συνάρτηση πιθανότων των X,Y

$f_{X,Y}(x_i,y_j) \geq 0 \quad \forall x_i, y_j$ και $\sum_i \sum_j f_{X,Y}(x_i,y_j) = 1$

Η συνάρτηση $f_X(x_i) = \sum_j f_{X,Y}(x_i,y_j)$ καλείται περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της τμ. X

$\sum_i f_X(x_i) = 1$ (είναι συνάρτηση πιθανότητας)

Η $f_{X/Y}(x_i/y_j) = \dfrac{f_{X,Y}(x_i,y_j)}{f_Y(y_j)} \quad i=0,1,\dots$ με $f_Y(y_j) > 0$

καλείται δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τμ X δεδομένης της τμ Y

♡ Δεσμευμένη μέση τιμή

$1_A = \begin{cases} 1 & \text{συμβεί το } A \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Δεσμευμένη μέση τιμή της τμ X δεδομένου του ενδεχομένου A

$$E(X/A) = \frac{E(X \cdot 1_A)}{P(A)}$$

Δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δεδομένου (του ενδεχομένου) η τμ $Y = y$.

$$E(X/Y=y) = \begin{cases} \sum_x x\, f_{X/Y}(x/y) & (X,Y) \text{ διακριτή} \\ \int x\, f_{X/Y}(x,y)\, dx & (X,Y) \text{ συνεχής} \end{cases} = m_{X/Y}(y) \text{ συνάρτηση του } y$$

(συνάρτηση παλινδρόμησης της X στην Y)

$$E(X/Y) = m_{X/Y}(Y)$$

$$E[X/Y=y] = \frac{E[X \cdot 1_{\{Y=y\}}]}{P(Y=y)} = \frac{\sum_x \sum_{y'} x\, 1_{\{y'=y\}} f_{X,Y}(x,y')}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{\sum_x x\, f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \sum_x x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \sum_x x\, f_{X/Y}(x/y)$$

$$E[g(X)/Y=y] = \begin{cases} \sum_x g(x)\, f_{X/Y}(x/y) \\ \int g(x)\, f_{X/Y}(x/y)\, dx \end{cases}$$

$$Var(X/Y=y) = E[(X-E(X))^2/Y=y] = E(X^2/Y=y) - E^2(X/Y=y)$$

Προφανώς $E(a|Y) = a$ $\quad$ a σταθερά $\quad$ (όπου ορίζονται)

$$E(aX+bZ/Y) = aE(X/Y) + bE(Z/Y)$$

$$E(X|Y) \geq 0 \text{ εαν } X \geq 0$$

$E(X|Y) = E(X)$

$E(g(X)/Y) = E[g(X)]$ εαν X, Y ανεξ. τ.μ.

$$E(g(X) \cdot h(Y)/Y) = h(Y)\, E[g(X)/Y]$$

Εαν $I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{εαν } \omega \in A \\ 0 & \omega \in A^c \end{cases}$ $\quad$ $E(I_A) = P(A)$

Xτμ. $I_A(X) = \begin{cases} 1 & X \in A \\ 0 & X \in A^c \end{cases}$

$$E[I_A(X)/Y] = P(X \in A/Y)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΠΛΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Law of Iterated Expectations
Law of Total Expectation
Adam's law.

Εαν οι μέσες τιμες υπάρχουν.

$$E(X) = E[E(X|Y)]$$

απόδειξη

$$E[\underbrace{E[X/Y]}_{g(Y)}] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{E(X|Y=y)}\, f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X/Y}(x/y)\, dx}\; f_Y(y)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{\cancel{f_Y(y)}}\, \cancel{f_Y(y)}\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = E(X)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Δύο εργοστάσια παράγουν λαμπτήρες. Ένας λαμπτήρας απο το εργοστάσιο A δουλεύει κατα μέσο όρο 5000 ώρες, ενώ από το εργοστάσιο B 4000 ώρες. Εάν γνωρίζουμε ότι στο ράφι του super market, 60% των λαμπτήρων είναι από το εργοστάσιο A και 40% από το εργοστάσιο B, ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος ζωής μιας λάμπας που αγοράστηκε απο το SM;
τος λαμπτήρας.

L χρονος ζωής του λαμπτήρα

$$E(L) = \underbrace{E(L/A)\,P(A) + E(L/B)\,P(B)}_{E\left[E(L/\text{εργοστ.})\right]}$$

$$= 5000 \cdot \frac{60}{100} + 4000 \cdot \frac{40}{100} = 4600$$

Άσκηση

Ένας ανθρακωρύχος είναι εγκλωβισμένος σ' ένα ορυχείο με τρεις πόρτες.
Η πόρτα 1 τον οδηγεί στην έξοδο μετά από διαδρομή 2 ωρών
Η πόρτα 2 τον οδηγεί μέσω τούνελ ξανά στην αρχική του θέση μετά από διαδρομή 3 ωρών
Η " 3 " " " " " " " " 5 ωρών
Υποθέτοντας ότι ο ανθρακωρύχος είναι εξίσου πιθανό να διαλέξει κάποια πόρτα κάθε φορά
Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την έξοδο

Λύση

X χρόνος μέχρι την έξοδο, Y = # της πόρτας που θα διαλέξει

$$E(X) = E[E(X/Y)] \quad \text{ΘΔΜΤ}$$

$$E(X) = E(X/Y=1)\underset{1/3}{P(Y=1)} + E(X/Y=2)\underset{1/3}{P(Y=2)} + E(X/Y=3)\underset{1/3}{P(Y=3)}$$

$$E(X/Y=1) = 2$$

$$E(X/Y=2) = 3 + E(X)$$

$$E(X/Y=3) = 5 + E(X)$$

$$E(X) = 2\cdot\frac{1}{3} + (3+E(X))\cdot\frac{1}{3} + (5+E(X))\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow E(X) = 10$$

ΠΡΟΤΑΣΗ (Ασκ 1 σειρας ασκήσεων 1 21-22 Μπουρνέτας) Eve's Law

$$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$$

απόδειξη

$$Var(X) = \underline{E(X^2)} - \underline{E^2(X)}$$

$$\left.\begin{aligned} E(X^2) &= E[E(X^2|Y)] \\ E(X^2|Y) &= Var(X|Y) + E^2(X|Y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{E(X^2)} = E(Var(X|Y)) + E(E^2(X|Y))$$

$$\underline{E(X)} = E[E(X|Y)]$$

$$Var(X) = E[Var(X|Y)] + E[E^2(X|Y)] - E^2[E(X|Y)]$$

$$= E[Var(X|Y)] + Var[E(X|Y)]$$

Άσκηση H/W.

Έστω X, Y τμ, $E(Y/X) = c$. Δείξτε ότι X, Y είναι ασυσχέτιστες

(#2 Σειρα ασκήσεων 1, ΣΜΕΣ 21-22 Μπουρνέτας.)

ΑΣΚΗΣΗ 2. Δίνονται τυχαίες μεταβλητές X, Y, όπου η περιθώρια κατανομή της Y είναι $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, ενώ η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένης της τιμής της Y είναι $X|Y = y \sim \mathcal{N}(ay, \sigma^2 y)$. Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της X.

$$E(X) = E[E(X|Y)] = E[aY] = a \cdot E(Y) = a \cdot \mu_Y$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[Var(X|Y)] + Var[E(X|Y)] \\ &= E[\sigma^2 \cdot Y] + Var(a \cdot Y) \\ &= \sigma^2 E(Y) + a^2 Var(Y) = \sigma^2 \mu_Y + a^2 \sigma_Y^2 \end{aligned}$$

[

Να θυμίσουμε εδώ, πριν προχωρήσουμε

Βασικές Δυναμοσειρές

$\sum p^k(1-p) = 1$
$0<p<1$

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ $\quad |z|<1$ Γεωμετρική σειρά

(Θυμηθείτε $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)p^k = 1$, $0<p<1$ $\quad X \sim Geom(p)$
\# επιτυχιών μέχρι 1η αποτυχία

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^{+z}$ $\quad \forall z \in \mathbb{R}$ (Θυμηθείτε $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1$ $\quad X \sim$ Poisson (λ))

Χρήσιμο $\displaystyle e^{\lambda} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k = (1+z)^n$ $\quad \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n\right)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k}{n} z^k = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}$ Αρνητική Διωνυμική (Άσκηση ws)

(5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left[{n \atop k}\right] z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k} z^k = \frac{1}{(1-z)^n}$ $\quad |z|\leq 1$

]

Μπουρνετας

ΑΣΚΗΣΗ 7. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n} z^k = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}.$$

Βοηθητικό φυλλάδιο Ασκήσεων 1 Οικονόμου

1. Ένας φοιτητής έχει n βιβλία, αριθμημένα ως $1, 2, \ldots, n$. Το βιβλίο k έχει ακριβώς i τυπογραφικά λάθη με πιθανότητα $k^i/(k+1)^{i+1}$, όπου $i = 0, 1, 2, \ldots$ και $k = 1, 2, \ldots, n$. Ο φοιτητής διαλέγει ένα βιβλίο στην τύχη (ομοιόμορφα) και το διαβάζει. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των τυπογραφικών λαθών που θα βρει.

Βιντεοδιάλεξη μαθήματος 24 - Χωρίο Α

K = # βιβλίου που επέλεξε $\quad$ N = # λαθών που βρήκε

$E(N)$, $Var(N)$

$E[N] = E[E(N/K)]$

$E[N/K=k] = ;$

$P(N=i/K=k) = \left(\frac{k}{k+1}\right)^i \left(\frac{1}{k+1}\right)$, $i=0,1,\ldots$

$E[N/K=k] = \sum_{i=0}^{\infty} i P(N=i/K=k) =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{k}{k+1}\right)^i \frac{1}{k+1} \quad ; \quad = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\frac{k}{k+1}}{\left(1-\frac{k}{k+1}\right)^2} = k$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i \overset{\text{για } p<1}{=} \frac{1}{1-p} \quad \text{ή} \quad \sum_{i=0}^{\infty} i p^{i-1} = \frac{1}{(1-p)^2} \quad \text{ή} \quad \sum_{i=0}^{\infty} i p^i = \frac{p}{(1-p)^2}$$

$$E[N] = E[E[N|K]] = E[K] \overset{K \sim U(1,\ldots n)}{=\!=} \frac{n+1}{2}$$

$$V(N) = E(V(N|K)) + V(E[N/K])$$

$$V(N|K=k) \underset{N|K=k \sim Geom(p)}{=\!=} \frac{1-p}{p^2} = \ldots k(k+1)$$

$$E(V(N|K)) = E(K \cdot (K+1)) = E(K^2) + E(K) = \underset{\frac{n^2-1}{12}}{Var(K)} + E^2(K) + E(K)$$

$$= \ldots = \frac{4n^2+12n+8}{12}$$

$$V(E(N|K)) = V(K) = \frac{n^2-1}{12}$$

$$V(N) = \frac{5n^2+12n+7}{12}$$

Βασικό Φυλλάδιο Ασκήσεων 1 Οικονόμου

2. Μια κάλπη περιέχει a λευκά και b μαύρα σφαιρίδια. Αφού τραβήξουμε ένα σφαιρίδιο, το επανατοποθετούμε στην κάλπη αν είναι λευκό. Αν, όμως, είναι μαύρο, τότε βάζουμε στη θέση του ένα λευκό (από κάποια άλλη κάλπη). Έστω X_n ο αριθμός των λευκών σφαιριδίων στην κάλπη, αφού η διαδικασία έχει επαναληφθεί n φορές.

   1. Αποδείξτε ότι
   $$E[X_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) E[X_n] + 1.$$
   2. Βρείτε έναν 'κλειστό' τύπο για την $E[X_n]$.

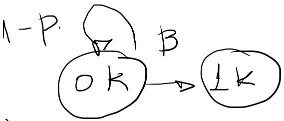
Σημειώσεις τηλεδιδασκαλίας συνάντησης 4 - Χωρίο 4

Βασικό Φυλλάδιο ασκήσεων 1 Οικονόμου

3. Κάθε φορά που ρίπτεται ένα νόμισμα, προσγειώνεται ως 'κεφαλή' με πιθανότητα p και ως 'γράμματα' με πιθανότητα $1-p$. Να υπολογιστεί ο μέσος αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθεί μια σειρά από r συνεχόμενες κεφαλές.

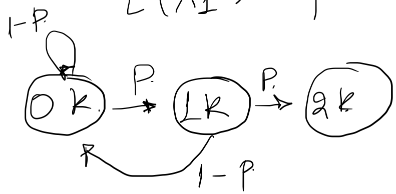
Σημειώσεις τηλεδιδασκαλίας συνάντησης 1 - Χωρίο 2

Μπορείτε να εξετάσετε πρώτα το $E(X_1)$



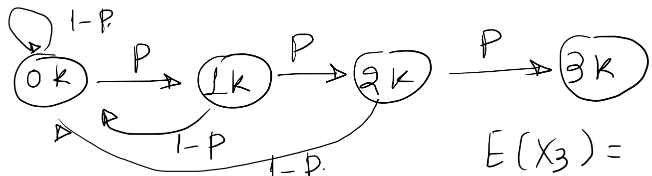
$$E(X_1) = p\cdot 1 + (1-p)(1+E(X_1)) \Rightarrow E(X_1) = \frac{1}{p}$$

Δείτε το $E(X_2)$



$$E(X_2) = (1-p)(1+E(X_2)) + p(1-p)(2+E(X_2)) + p^2\cdot 2 \Rightarrow E(X_2) = \frac{1+p}{p^2}$$

Για το $E(X_3)$



$$E(X_3) = \frac{1+p+p^2}{p^3}$$

Συνεχίζοντας

$$E(X_n) = \frac{1+p+p^2+\cdots+p^{n-1}}{p^n} = \frac{1-p^n}{(1-p)\,p^n}$$

Για $p=\frac{1}{2}$ $\quad E(X_n) = 2^{n+1}-2$!

Άσκηση H/W

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τμ ανεξάρτητες και ισόνομες, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Να βρεθούν:

(α) $E(S_n / X_1)$ (β) $E(X_1 | S_n)$. $E(X_1 | S_n = s)$

(α) $E(S_n / X_1) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i / X_1) =$

$\left\{ E(X_i/X_1) \underset{\text{ανεξ}}{\overset{i \neq 1}{=}} E(X_i) = E(X_1) \right\}$

$= E(X_1 | X_1) + \sum_{i=2}^{n} E(X_i / X_1)$

X_i μέση τιμή

$= \underset{X_1}{X_1} + \sum_{i=2}^{n} E(X_i) = X_1 + (n-1) E(X_1)$

$E(S_n | X_1 = x_1) = x_1 + (n-1) E(X)$ (X τμ ίδια κατανομή $x_1 \ldots x_n$)

(β) $s = E(S_n | S_n = s)$

$\underbrace{s} = E(S_n | S_n = s) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i | S_n = s\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i / S_n = s) = \underbrace{n \cdot E(X_1 / S_n = s)}$

συμμετρικού ρόλου των X_i στο άθροισμα

$E(X_1 / S_n = s) = \frac{s}{n}$ $E(X_1 / S_n) = \frac{S_n}{n}$