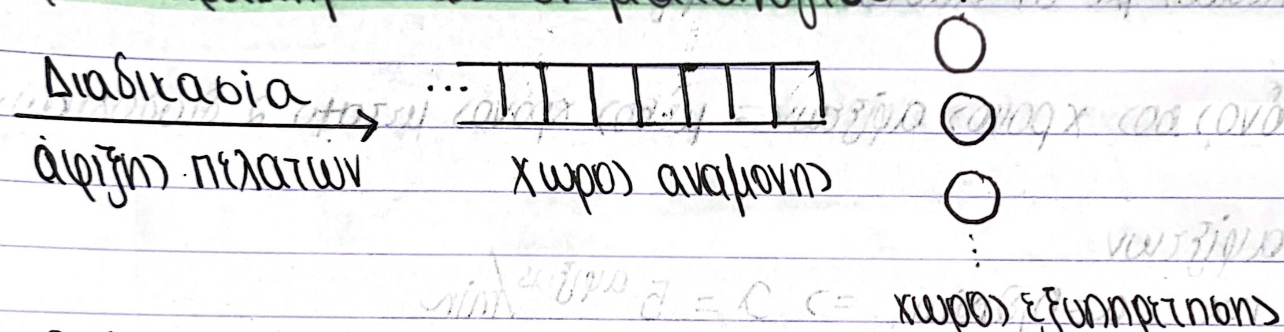
Μάθημα 21

Κεφάλαιο 4: Ουρές Αναμονής

Ουρά αναμονής ή σύστημα εξυπηρέτησης είναι ένα σύστημα όπου φθάνουν πελάτες για εξυπηρέτηση που ζητούν κάποιου είδους εξυπηρέτηση. Στο σύστημα υπάρχουν ένας ή περισσότεροι υπηρέτες και συνήθως υπάρχει κάποιος χώρος αναμονής. Οι πελάτες αναχωρούν από το σύστημα μόλις ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση.

Κύρια χαρακτηριστικά - ονοματολογία



1. A: διαδικασία αφίξεων
2. B: χρόνοι εξυπηρέτησης
3. C: πλήθος υπηρετών
4. K: χωρητικότητα συστήματος [χώρου εξυπηρ. και αναμονής]
5. Πειθαρχία ουράς

A / B / C / K (πειθαρχία ουράς) ← συμβολισμός Kendall

1. Διαδικασία αφίξεων

A = M ⇔ διαδικασία Poisson ⇔ ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων ανεξ. και εκθετικά κατανεμημένοι

A = GI ⇔ διαδικασία αφίξεων ανανεωτική ⇔ ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων ανεξ και ισον. μεταξύ τους με σκ F_K

A = D ⇔ ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων είναι σταθεροί

2. Χρόνοι εξυπηρέτησης

B = M <=> εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης, ανεξάρτητοι μεταξύ τους
B = G <=> χρόνοι εξυπηρέτησης με κατανομή F_B, ανεξάρτητοι μεταξύ τους
B = D <=> σταθεροί χρόνοι εξυπηρέτησης

3. C = # υπηρετών

4. K = συνολική χωρητικότητα [Αν K=∞, παραλείπεται]

5. Πειθαρχία ουράς
- First come first serve (FCFS) - First in first out (FIFO)
- Last come last serve (LCLS) - last in first out (LIFO)
- Serve in random order (SIRO)
- Shortest serve time first (SSTF)

Όταν έχουμε FCFS, παραλείπεται

Συμβολισμοί σχετικοί με τη διαδικασία αφίξεων

α: μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων = μέσος χρόνος μεταξύ 2 διαδοχικών αφίξεων

λ: ρυθμός αφίξεων

$\lambda = \frac{1}{a}$ πχ $a = 0,2 min \Rightarrow \lambda = 5$ αφίξεις/min

Συμβολισμοί σχετικοί με τους χρόνους εξυπηρέτησης

b: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

μ: ρυθμός εξυπηρέτησης

$\mu = \frac{1}{b}$ πχ $b = 0,25 min \Rightarrow \mu = 4$ εξυπηρετήσεις/min

Παράδειγμα 1

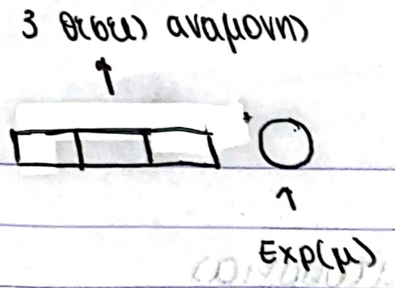
M / M / 1 / 4

Διαδικασία αφίξεων Poisson με ρυθμό λ με ενδ. χρόνους αφίξεων ~ Exp(λ)

Χρόνος εξυπηρέτησης ~ Exp(μ)

C=1 (υπηρέτης)

K=4 (συνολική χωρητικότητα)



αφού δεν αναφέρεται πειθαρχία ουράς, θεωρούμε ότι πειθαρχία ουράς FCFS

Παράδειγμα 2

$$D \,/\, G \,/\, 3 \quad (SIRO)$$

- D: Σταθεροί ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων a
- G: χρόνοι εξυπηρέτησης $\sim F_B$
- 3: $c=3$ (υπηρέτες)
- παραλείπεται άρα $k=\infty$
- (SIRO): πειθαρχία ουράς

Βασικά μέτρα απόδοσης

Μέτρα που αφορούν τον διαχειριστή

$Q(t) = \#$ πελατών στο σύστημα την στιγμή t

$Q_s(t) = \#$ πελατών στον χώρο εξυπηρέτησης την στιγμή t

$Q_q(t) = \#$ πελατών στον χώρο αναμονής την στιγμή t

$$Q(t) = Q_s(t) + Q_q(t)$$

Μέτρα απόδοσης που αφορούν τους πελάτες

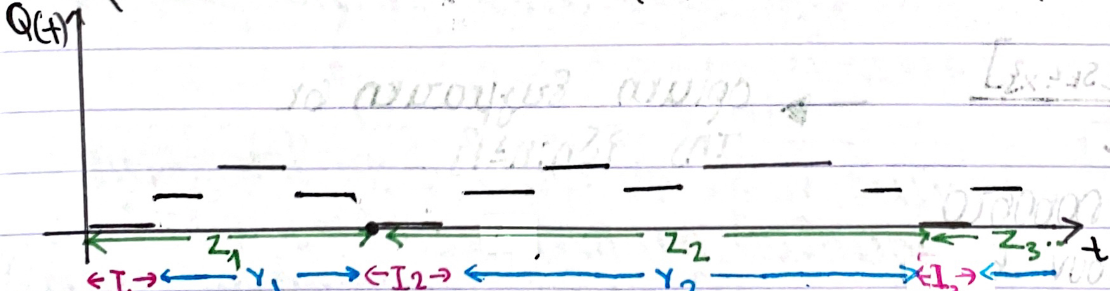
$S_n =$ χρόνος παραμονής του n-οστού πελάτη στο σύστημα

$W_n =$ χρόνος αναμονής του n-οστού πελάτη

$X_n =$ χρόνος εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη

$$S_n = W_n + X_n$$

Μέτρα απόδοσης που αφορούν τους υπηρέτες



Κύκλος απασχόλησης / κύκλος λειτουργίας: χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αναχωρήσεων που αφήνουν το σύστημα άδειο

Z_n: διάρκεια του n-οστού κύκλου λειτουργίας

I_n = διάρκεια n-οστης περιόδου αργίας
Y_n = διάρκεια n-οστης περιούδου συνεχούς λειτουργίας
$$Z_n = I_n + Y_n$$
Θέλουμε να υπολογίσουμε τις:
$p_j(t) = P(Q(t)=j)$: πιθανότητα την στιγμη t να υπαρχουν j πελατει στο σύστημα
Η μεταβατικη κατανομη $(p_j(t) : j \geq 0)$ είναι δύσκολο να υπολογιστεί
Ασχολούμαστε με την οριακή κατανομή

P_j : μακροπρόθεσμο μεσο ποσοστό του χρονου που υπάρχουν j-πελατει στο συστημα $= \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{Q(u)=j\}} du\right]}{t}$ → οριακη δειγματικη σπ της $\{Q(t): t\geq 0\}$

αν οι ενδιαμεσοι χρονοι αναγεννησης είναι απεριοδικοί (σχεδον παντα) → $\lim_{t\to\infty} P(Q(t)=j)$ → οριακή σπ της $\{Q(t): t\geq 0\}$

Ερμηνεία: Η πιθανότητα να υπαρχουν j πελατει στο σύστημα μια χρονικη στιγμή μετα την παρέλευση μεγαλου χρονικου διαστήματος

$P_j = P(Q=j)$
↳ μηκος ουρας σε κατασταση ισορροπιας

$$E(Q) = \sum_{j=0}^{\infty} j P_j$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E\left[\sum_{k=1}^{n} 1_{\{S_k \leq x\}}\right]}{n}$$ → οριακη δειγματικη σκ της $\{S_n : n\geq 1\}$

μακροπρόθεσμο μεσο ποσοστο πελατών που παραμένουν στο διάστημα χρονο $\leq x$

<u>ένδ. χρονοι αναγεν απερ.</u> $\lim_{n\to\infty} P(S_n \leq x)$ → οριακη σκ της $\{S_n : n\geq 1\}$

Ερμηνεία: Πιθανότητα ένας πελάτης να μείνει στο σύστημα χρόνο $\leq x$ για κάποιο πελάτη που μπήκε μετά από πολλούς πελάτες

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{\{S_k \leq x\}}\right)}{n} = P(S \leq x)$$ οριακός χρόνος παραμονής