Μάθημα 20

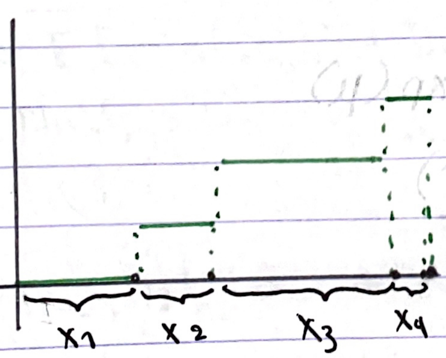
Στις προηγούμενες ασκήσεις, είδαμε ανανεωτικές διαδικασίες τέτοιες ώστε η εξέλιξη της $\{X(t): t \geq 0\}$ σε κάθε κύκλο ανανέωσης να είναι πιθανοθεωρητικά ίδια και ανεξάρτητη από την εξέλιξη στους άλλους κύκλους ανανέωσης.
Τα κατάλληλα μοντέλα για την περιγραφή και μελέτη τέτοιων διαδικασιών είναι οι αναγεννητικές διαδικασίες.

Ορισμός: Αναγεννητική διαδικασία

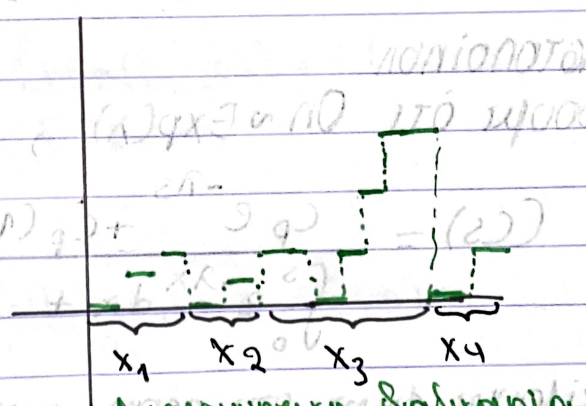
Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ λέγεται αναγεννητική διαδικασία αν υπάρχει τυχαία μεταβλητή S_1, με $S_1 \geq 0$, $P(S_1 = 0) < 1$, $P(S_1 < \infty) = 1$ τω:
i) Οι $\{X(t), t \geq 0\}$ και $\{X(t), t \geq S_1\}$ είναι ανεξάρτητα
ii) Οι $\{X(t), t \geq 0\}$ και $\{X(t), t \geq S_1\}$ είναι στοχαστικά ισοδύναμες

Σημείωση

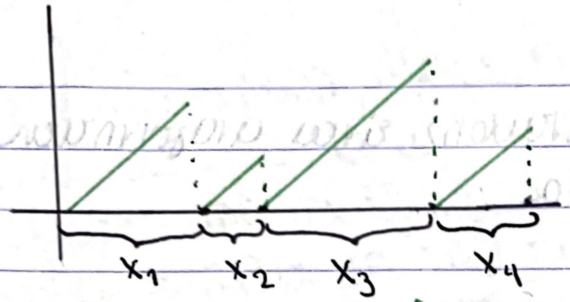
Από τον ορισμό προκύπτει ότι υπάρχει ακολουθία χρονικών στιγμών $S_1, S_2, \ldots$ ώστε
(i) οι $\{X(t): 0 \leq t < S_1\}$, $\{X(t), S_1 \leq t < S_2\}$, $\{X(t), S_3 \leq t < S_4\}$ ... είναι ανεξάρτητα
(ii) οι $\{X(t): t \geq 0\}$, $\{X(t), t \geq S_n\}$ είναι στοχαστικά ισοδύναμες
Οι ενδιάμεσοι χρόνοι $X_n = S_n - S_{n-1}$ $n \geq 1$ είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι άρα μπορούν να θεωρηθούν ενδιάμεσοι χρόνοι μιας ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t): t \geq 0\}$.



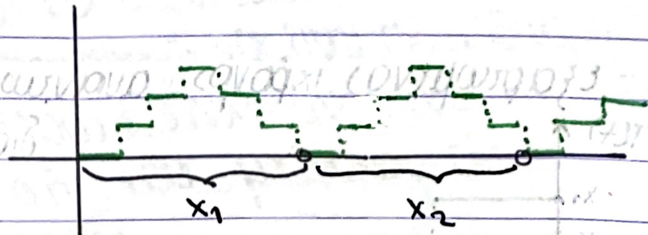
Ανανεωτική διαδικασία



Αναγεννητική διαδικασία



Αναγεννητική διαδικασία



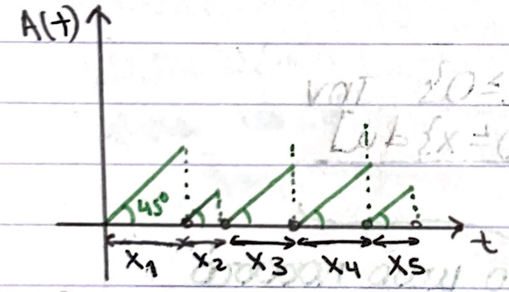
Αναγεννητική διαδικασία

Παραδείγματα αναγεννητικών διαδικασιών

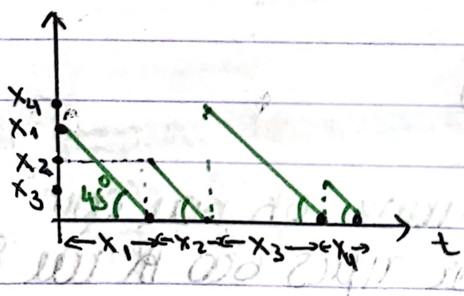
1) Στις ασκήσεις 1 και 2 (εκκαθάριση αποθήκης)
αναγεννητική διαδικασία: # προϊόντων στην αποθήκη
στιγμές αναγέννησης: στιγμή εκκαθάρισης αποθήκης

2) Στην άσκηση 3 (εναλλασσόμενη διαδικασία)
αναγεννητική διαδικασία: $\{I(t): t \geq 0\}$ με $I = \begin{cases} 1, & \text{μηχανή λειτουργεί} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
στιγμές αναγέννησης: στιγμές επαναλειτουργίας μηχανής

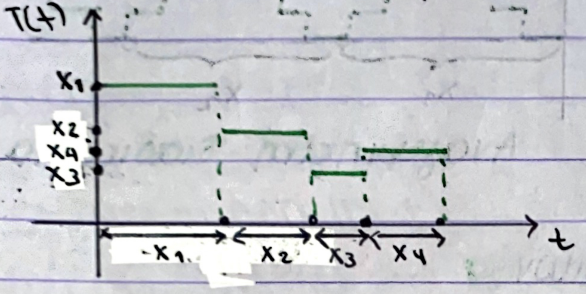
3) Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία.
i) Η ηλικία $\{A(t): t \geq 0\}$ μιας ανανεωτικής είναι αναγεννητική



ii) Ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης $\{R(t): t \geq 0\}$ μιας ανανεωτικής είναι αναγεννητική διαδικασία



iii) t - εξαρτώμενος ενδιάμεσος χρόνος ανανέωσης είναι αναγεννητική διαδικασία



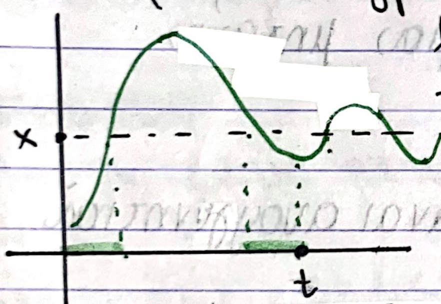
Ορισμός ① Οριακή δειγματική συνάρτηση κατανομής της $\{X(t): t \geq 0\}$

② Οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής

③ Οριακή συνάρτηση κατανομής

Έστω $\{X(t): t \geq 0\}$ στοχαστική διαδικασία με τιμές στο $\mathbb{R}$ και δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με αριστερά όρια. Τότε ορίζουμε

① Οριακή δειγματική σκ της $\{X(t): t \geq 0\}$ την



$$\lim_{t\to\infty} \underbrace{\frac{\int_0^t 1\{X(u) \leq x\}\,du}{t}}_{\text{μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που η } \{X(t),\, t \geq 0\} \text{ είναι } \leq x.}$$

→ χρόνος στο $[0,t]$ όπου $\{X(t): t \geq 0\}$ είναι $\leq x$

② Οριακή μέση δειγματική σκ της $\{X(t): t \geq 0\}$ την

$$F_X(x) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{\frac{E\left[\int_0^t 1\{X(u) \leq x\}\,du\right]}{t}}_{\text{μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η } \{X(t): t \geq 0\} \text{ είναι } \leq x.}$$

③ Οριακή σκ της $\{X(t): t \geq 0\}$ την

$$F_{X(\infty)}(x) = \lim_{t\to\infty} P(X(t) \leq x)$$

Θεώρημα Υπολογισμός οριακών δειγματικών σκ και οριακής σκ

Αν $\{X(t): t \geq 0\}$ αναγεννητική διαδικασία με τιμές στο $\mathbb{R}$ και δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με δεξιά όρια. Έστω επίσης ότι S_1: ο πρώτος χρόνος αναγέννησης με $E(S_1) < \infty$. Τότε:

i) $\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1\{X(u)\le x\}du}{t} \overset{\Theta\text{AK}}{=} \frac{E\left[\int_0^{S_1} 1\{X(u)\le x\}du\right]}{E(S_1)}$ με πιθανότητα 1

ii) $F_X(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1\{X(u)\le x\}du\right]}{t} \overset{\Sigma\text{AΘK}}{=} \frac{E\left[\int_0^{S_1} 1\{X(u)\le x\}du\right]}{E(S_1)}$

iii) Αν η κατανομή του S_1 είναι απεριοδική
$F_{X(\infty)}(x) = \lim_{t\to\infty} P(X(t)\le x) = F_X(x)$.