Μάθημα 18

Θεώρημα: Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη [ΣΑΘΚ]
Έστω $\{N(t): t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία και $\{C(t): t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία κόστους συμβατή με τη $\{N(t): t \geq 0\}$, με γενική συνάρτηση κατανομής $F_{X,C}(x,y)$. Αν $E(X) < \infty$ και $E(C) < \infty$ τότε

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{E(C)}{E(X)}} \qquad \boxed{\lim_{t\to\infty} \frac{E(C(t))}{t} = \frac{E(C)}{E(X)}}$$

↳ μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους

↳ μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους

Βήματα για την επίλυση ασκήσεων με ΣΑΘΚ

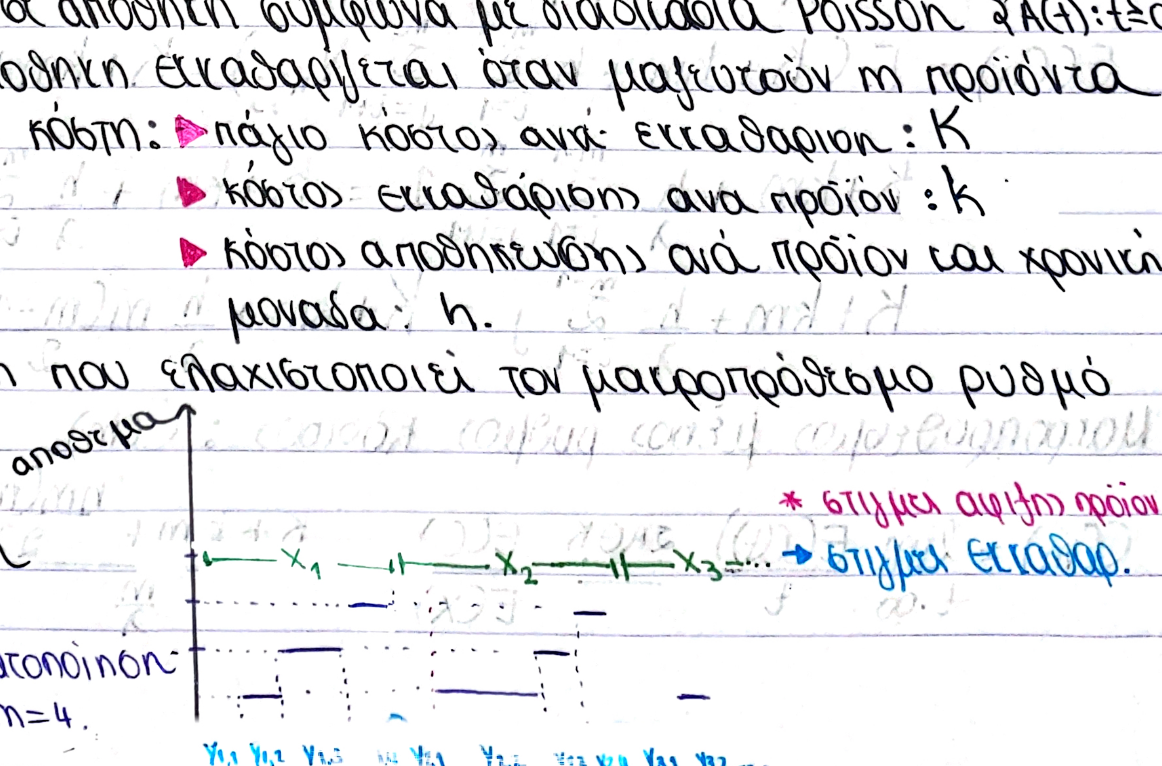
1. Μοντελοποίηση: Ορισμός $\{N(t): t \geq 0\}$, $\{C(t): t \geq 0\}$ ή $\{X_n : n \geq 1\}$, $\{C_n : n \geq 1\}$
2. Επαλήθευση ορισμού: Δείχνουμε ότι $(X_n, C_n)_{n\geq 1}$ ανεξ. και ισόν.
3. Εφαρμογή ΣΑΘΚ: Υπολογισμός $E(X)$, $E(C)$ και εφαρμογή ΣΑΘΚ
4. Βελτιστοποίηση: Εύρεση παραμέτρων που ελαχιστοποιούν τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους

Άσκηση 1 [Εκκαθάριση αποθήκης]
Προϊόντα φτάνουν σε αποθήκη σύμφωνα με διαδικασία Poisson $\{A(t): t \geq 0\}$ με ρυθμό λ. Η αποθήκη εκκαθαρίζεται όταν μαζευτούν m προϊόντα. Υπάρχουν τα εξής κόστη:
- πάγιο κόστος ανά εκκαθάριση: K
- κόστος εκκαθάρισης ανά προϊόν: k
- κόστος αποθήκευσης ανά προϊόν και χρονική μονάδα: h.

Να βρεθεί το m που ελαχιστοποιεί τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους.

Λύση

1) Μοντελοποίηση



πραγματοποίηση για $m=4$.

Εστω $\{N(t): t \geq 0\}$ η διαδικασια εκκαθαρίσεων, οι ενδιαμεσοι χρόνοι είναι $X_n = \sum_{i=1}^{m} Y_{n,i}$ όπου $Y_{n,i} \sim Exp(\lambda)$ για $n=1,2,\dots$ $i=1,2,\dots,m$

↑ κυκλος ανανεωσης ↑ i-οστη αφιξη προϊοντος στο n-οστο κυκλο ανανεωσης

Αρα $X_n \sim Erlang(m,\lambda)$, $n=1,2,\dots$ και $X_1, X_2, \dots$ ανεξαρτητα

Οποτε $C_n = K + k \cdot m + h \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j}$

C_n: κοστος στον n-οστο κυκλο ανανεωσης

2) Επαλήθευση του ορισμού

Τα X_n, C_n εξαρτώνται από τις $Y_{n,1}, Y_{n,2}, \dots, Y_{n,m}$ και $Y_{n,i}$ ανεξαρτ. και ισονομες οποτε $(X_n, C_n)_{n \geq 1}$ ανεξαρτητα και ισονομα

Αρα η $\{C(t): t \geq 0\}$ είναι ανανεωτική διαδικασια κόστους με τη συμβατη $\{N(t): t \geq 0\}$

3) Εφαρμογη ΣΑΘΚ

$$E(X_n) = E\left(\sum_{i=1}^{m} Y_{n,i}\right) = \sum_{i=1}^{m} E(Y_{n,i}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda} = \frac{m}{\lambda}$$

$$E(C_n) = E\left(K + km + h \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j}\right) = K + km + h \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} E(Y_{n,i})$$

$$= K + km + \frac{h}{\lambda} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} 1 = K + km + \frac{h}{\lambda} \sum_{i=1}^{m-1} (m-i) \underline{\underline{j=m-i}}$$

$$K + km + \frac{h}{\lambda} \sum_{j=1}^{m-1} j = K + km + \frac{h}{\lambda} \frac{m(m-1)}{2}$$

Μακροπροθεσμος μέσος ρυθμος κόστους : $C(m)$

$$C(m) = \lim_{t \to \infty} \frac{E(C(t))}{t} \overset{ΣΑΘΚ}{=} \frac{E(C)}{E(X)} = \frac{K + km + \frac{hm(m-1)}{2\lambda}}{\frac{m}{\lambda}} \Rightarrow$$

$$C(m)=\frac{K\lambda}{m}+k\lambda+\frac{h(m-1)}{2}$$

4) Βελτιστοποίηση

Αρχικά, θεωρούμε ότι $m\in[0,+\infty)$

$$c'(m)=-\frac{K\lambda}{m^2}+\frac{h}{2} \qquad c''(m)=\frac{2K\lambda}{m^3}>0 \text{ για } m>0 \Rightarrow$$

$C(m)$ κυρτή

$$c'(m)=0\Rightarrow -\frac{K\lambda}{m^2}+\frac{h}{2}=0\Rightarrow$$

$$m=\sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}$$

Άρα $m=\operatorname{argmin} C(m)$, $m\in\left(\left[\sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}\right],\left[\sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}+1\right]\right)$

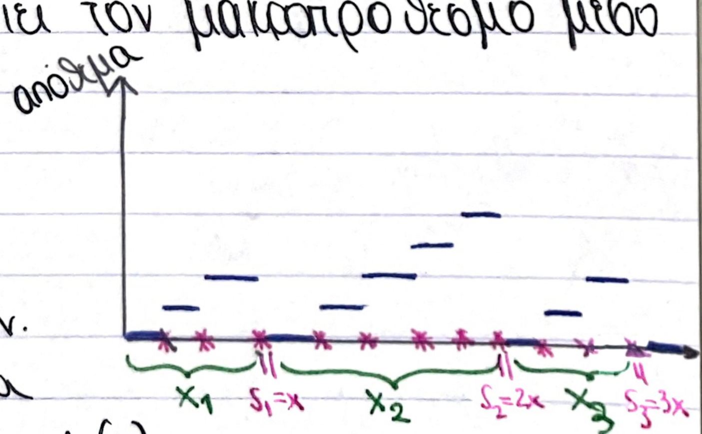
Άσκηση 2 [Εκκαθάριση αποθήκης ΙΙ]

Προϊόντα φτάνουν σε αποθήκη σύμφωνα με διαδικασία Poisson με παράμετρο λ, $\{A(t):t\geq 0\}$. Η αποθήκη εκκαθαρίζεται κάθε x χρονικές μονάδες. Υπάρχουν τα εξής κόστη:

- Πάγιο κόστος εκκαθάρισης: K
- κόστος εκκαθάρισης ανά προϊόν: k
- κόστος αποθήκευσης ανά προϊόν ανά χρονική μονάδα h.

Να βρεθεί ο χρόνος x που ελαχιστοποιεί τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους

Λύση:



1) Μοντελοποίηση

$\{N(t):t\geq 0\}$ διαδικασία εκκαθαρίσεων

$X_n=x$, $n\geq 1$ άρα $X_1,X_2,\dots,X_n$ ανεξ. & ισον.

Άρα $\{N(t):t\geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία

Έστω $\{C(t):t\geq 0\}$ διαδικασία κόστους

$$C_n=K+k\underbrace{\#\text{προϊόντων που φτάνουν στο n-οστό κύκλο}}_{A(nx)-A((n-1)x)=A_n(x)}+h\sum_{i=1}^{A_n(x)}(x-S_{n,i})$$

↳ χρόνος απ' την έναρξη του n-οστού κύκλου μέχρι την στιγμή άφιξης του i-οστού προϊόντος