Μαθημα 16.

Άσκηση 3

Οχήματα περνάν έναν σταθμό διοδίων με διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 10$ οχήματα / λεπτό. Καθε όχημα είναι ΙΧ με πιθ 0,9 και φορτηγό με πιθ. 0,1, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Να υπολογιστούν

α) $P_1 = P$ (τα 2 πρωτα λεπτα να περασουν 5 φορτηγα | το 1ο λεπτό περασαν 10 ΙΧ)

β) $P_2 = P$ (τα 2 πρώτα λεπτα να περασουν 5 φορτηγα | το 1ο λεπτό περασαν 2 φορτηγα και 5 ΙΧ)

γ) $P_3 = P$ (τα 2 πρωτα λεπτά να περασουν 5 φορτηγα | το 1ο λεπτό περασαν 10 οχηματα) δ) $\mu_1 = E($χρονος διέλευσης 1ου φορτηγου μετα τις 12:00 | μεταξυ 12:00 και 12:05 πέρασαν 100 οχηματα$)$

Λυση

Μοντελοποιηση:

$N(t)$ = # οχηματων που περασαν στο $(0,t]$, διαδικασια Poisson με ρυθμο $\lambda = 10$ οχημ/λεπτό

$N_1(t)$ = # ΙΧ οχηματων που περασαν στο $(0,t]$, διαδικασια Poisson με ρυθμο $\lambda_1 = 10 \cdot 0{,}9 = 9$ οχημ/λεπτό

$N_2(t)$ = # ΙΧ φορτηγων που περασαν στο $(0,t]$, διαδικασια Poisson με ρυθμο $\lambda_2 = 10 \cdot 0{,}1 = 1$ οχημ/λεπτό

N_1, N_2 ανεξάρτητα

Μονάδα μετρησης χρόνου: 1 λεπτό

α) $P_1 = P($τα πρωτα 2 λεπτά να περασαν 5 φορτηγα | το 1ο λεπτο περασαν 10 ΙΧ$)$

$$= P(N_2(2)=5 \mid N_1(1)=10) \underset{=}{\overset{N_1, N_2 \text{ ανεξ}}{}} P(N_2(2)=5) \underset{=}{\overset{N_2 \sim \text{Poisson}(1\cdot 2)}{}} e^{-2}\frac{2^5}{5!}$$

β) $P_2 = P($τα πρωτα 2 λεπτα να περασαν 5 φορτηγα | το 1ο λεπτο περασαν 2 φορτηγα και 5 ΙΧ$)$

$$= P(N_2(2)=5 \mid N_2(1)=2, N_1(1)=5) \underset{=}{\overset{N_1, N_2 \text{ ανεξ.}}{}} P(N_2(2)=5 \mid N_2(1)=2) = P(N_2(1)+[N_2(2)-N_2(1)]=5 \mid N_2(1)=2)$$

$$= P(N_2(2)-N_2(1)=3 \mid N_2(1)=2) \underset{=}{\overset{\text{ανεξ. προσαυξ.}}{}} P(N_2(2)-N_2(1)=3) \underset{=}{\overset{\text{ομοιογ. προσαυξ}}{}} P(N_2(1)=3) \underset{=}{\overset{N_2 \sim \text{Poisson}(1\cdot 1)}{}} e^{-1}\frac{1^3}{3!}$$

γ) $P_3 = P($τα πρώτα 2 λεπτά να περασουν 5 φορτηγα | το 1ο λεπτο περασαν 10 οχηματα$)$

$$= P(N_2(2)=5 \mid N_1(1)+N_2(1)=10) = \sum_{k=0}^{5} P(N_2(2)=5 \mid \underbrace{N_2(1)=k,\ N_1(1)+N_2(1)=10}_{N_1(1)=10-k})\ \underbrace{P(N_2(1)=k \mid N_1(1)+N_2(1)=10)}_{\sim \text{Bin}(10,0.1)}$$

N_1, N_2 ανεξαρτητες $\sum_{k=0}^{5} P(N_2(2)=5 \mid N_2(1)=k)\binom{10}{k} 0{,}1^k\, 0{,}9^{10-k} =$

$$\sum_{k=0}^{5} P(N_2(1)+[N_2(2)-N_2(1)]=5 \mid N_2(1)=k)\binom{10}{k} 0{,}1^k\, 0{,}9^{10-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{5} P(N_2(2)-N_2(1)=5-k \mid N_2(1)=k)\binom{10}{k} 0{,}1^k\, 0{,}9^{10-k}$$ ανεξ. προσ.

$$\sum_{k=0}^{5} P(N_2(2)-N_2(1)=5-k)\binom{10}{k} 0{,}1^k\, 0{,}9^{10-k}$$ ομογ. προσ.

$$\sum_{k=0}^{5} P(N_2(1)=5-k)\binom{10}{k} 0{,}1^k\, 0{,}9^{10-k}$$ $N_2 \sim$ Poisson $(1\cdot 1)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-1}\frac{1^{5-k}}{(5-k)!}\binom{10}{k} 0{,}1^k\, 0{,}9^{10-k}$$

δ) $\mu_1 = E($χρονος διελευσης 1ου φορτηγου μετα τις 12.00 | μεταξυ 12.00 και 12.05 περασαν 100 οχηματα$)$

$S_n^{(2)}$ = χρονος n-οστου γεγονότος (διελευση φορτηγού) της N_2

Άρα, $\mu_1 = E(S_1^{(2)} \mid N_1(5)+N_2(5)=100)$ δεσμευση ως προς $N_2(5)$

$$\sum_{k=0}^{100} \underbrace{E(S_1^{(2)} \mid N_2(5)=k, N_1(5)+N_2(5)=100)}_{N_1(5)=100-k}\ \underbrace{P(N_2(5)=k \mid N_1(5)+N_2(5)=100)}_{\binom{100}{k}0.1^k\,0.9^{100-k}}$$

N_1, N_2 ανεξ $\sum_{k=0}^{100} E(S_1^{(2)} \mid N_2(5)=k)\binom{100}{k} 0{,}1^k\, 0{,}9^{100-k}$ Θ. Campbell

$$E(S_1^{(2)} \mid N_2(5)=k) = E(U_{1:k}) = \frac{1\cdot 5}{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{100} \frac{5}{k+1}\binom{100}{k} 0{,}1^k\, 0{,}9^{100-k}$$

Άσκηση 4.

Έστω $\{N(t): t \geq 0\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και ακολουθία χρόνων γεγονότων $\{S_n: n \geq 1\}$. Να υπολογιστεί η $E[S_k \mid N(t)=n]$, $n=1,2,\ldots$ $k=1,2,\ldots$

Λύση:

Αν $k \le n$: $E(S_k \mid N(t)=n) \xrightarrow{\text{θ. Campbell}} E(U_{k:n}) = \dfrac{k\cdot t}{n+1}$.

Αν $k > n$: $E(S_k \mid N(t)=n) = t + E(S_{k-n}) \xrightarrow{S_{k-n} \sim Erlang(k-n,\lambda)} t + \dfrac{k-n}{\lambda}$

Άσκηση 5

Έστω $\{N(t): t \ge 0\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και ακολουθία χρόνων γεγονότων $\{S_n : n \ge 1\}$. Να υπολογιστεί η $E(S_1 \mid N(t) \ge 1)$

Λύση

$$E(S_1 \mid N(t) \ge 1) \xrightarrow[\text{προς } N(t)]{\text{δέσμευση ως}} \sum_{k=1}^{\infty} E(S_1 \mid N(t)=k, N(t) \ge 1)\, P(N(t)=k \mid N(t) \ge 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E(S_1 \mid N(t)=k)\, \frac{P(N(t)=k, N(t) \ge 1)}{P(N(t) \ge 1)}$$

$E(S_1 \mid N(t)=k) \xrightarrow{\text{θ. Campbell}} E(U_{1:k})$

$N(t) \sim Poisson(\lambda \cdot t)$

$P(N(t)=k, N(t) \ge 1) = P(N(t)=k)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot t}{k+1} \, \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k / k!}{1 - P(N(t)=0)} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot t}{k+1} \, \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k / k!}{1 - e^{-\lambda t}(\lambda t)^0/0!} \xrightarrow[\text{διαιρώ με } \lambda]{\text{πολ/ζω και}} \frac{e^{-\lambda t}}{(1-e^{-\lambda t})\cdot\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$\xrightarrow{j=k+1} \frac{e^{-\lambda t}}{(1-e^{-\lambda t})\cdot \lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \frac{e^{-\lambda t}(e^{-\lambda t} - 1 - \lambda t)}{(1-e^{-\lambda t})\cdot\lambda}$$