Μαθημα 14.

Απόδειξη

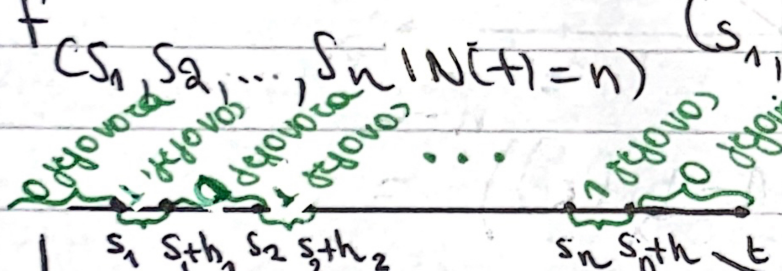
Αρκει να δείξουμε ότι $f_{(S_1,S_2,\dots,S_n|N(t)=n)}(s_1,s_2,\dots,s_n) =$

$$f_{(U_{1:n},U_{2:n},\dots,U_{n:n})}(s_1,s_2,\dots,s_n)$$

οπου $f_{(U_{1:n},U_{2:n},\dots,U_{n:n})}(s_1,s_2,\dots,s_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{t^n}, & 0\le s_1\le s_2\le\dots\le s_n\le t \\ 0 & \text{αλλιως} \end{cases}$

'Εστω $0\le s_1\le s_2\le \dots \le s_n \le t$ τοτε

$$f_{(S_1,S_2,\dots,S_n|N(t)=n)}(s_1,s_2,\dots,s_n) = \lim_{h_1,\dots,h_n\to 0^+} \frac{P(s_1< S_1\le s_1+h_1,\dots,s_n\le S_n\le s_n+h_n, N(t)=n)}{h_1 h_2\cdots h_n \cdot P(N(t)=n)}$$



$e^{-\lambda(t-s_n-h_n)}$

$e^{-\lambda h_n}\cdot\lambda h_n$

πιθ. να εχω 0 γεγον. στο διαστημα: $e^{-\lambda s_1}\dfrac{(\lambda s_1)^0}{0!} = e^{-\lambda s_1}$

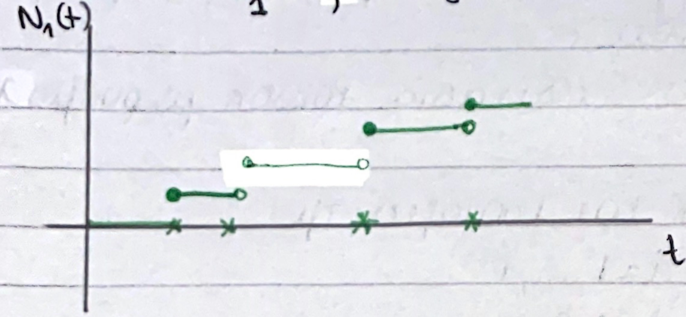
πιθ να εχω 1 γεγονος στο διαστημα $\dfrac{e^{-\lambda h_1}(\lambda h_1)^1}{1!} = e^{-\lambda h_1}\cdot\lambda h_1$

Αρα εχουμε $\displaystyle\lim_{h_1 h_2\cdots h_n\to 0^+} \frac{e^{-\lambda s_1}\cdot e^{-\lambda h_1}\lambda h_1\cdot e^{-\lambda(s_2-s_1-h_1)}\cdot e^{-\lambda h_2}\lambda h_2\cdots\cdot e^{-\lambda h_n}\lambda h_n\cdot e^{-\lambda(t-s_n-h_n)}}{h_1 h_2\cdots h_n\, e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$

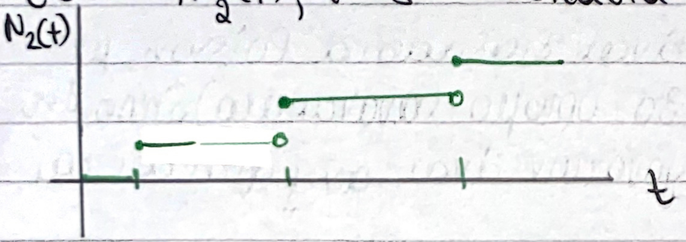
$$= \lim_{h_1,h_2,\dots h_n\to 0^+} \frac{e^{-\lambda t}\lambda h_1\lambda h_2\cdots\lambda h_n}{h_1 h_2\cdots h_n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} = \lim_{h_1,\dots,h_n\to 0^+}\frac{\lambda^n}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}} = \frac{n!}{t^n} \quad ■$$

Υπέρθεση διαδικασιών Poisson

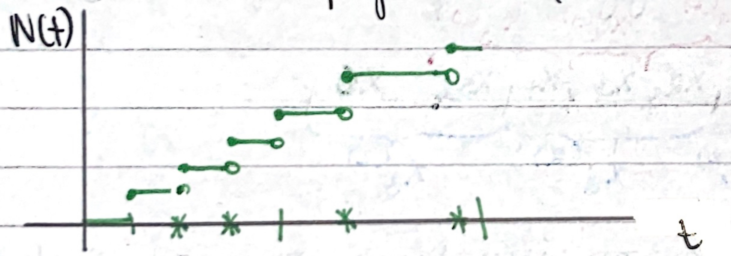
Έστω $\{N_1(t), t \geq 0\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ_1



Έστω $\{N_2(t), t \geq 0\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ_2



Τότε αν $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, η απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t) : t \geq 0\}$ ονομάζεται υπέρθεση των $\{N_1(t) : t \geq 0\}$ και $\{N_2(t) : t \geq 0\}$



Επίσης, ορίζεται η στοχαστική διαδικασία $\{Z_k : k \geq 1\}$ που δείχνει τι τύπου είναι το k-οστό γεγονός της υπέρθεσης

↳ δηλ από ποια διαδικασία προήλθε, από την N_1 ή N_2

άρα

$$Z_k = \begin{cases} 1, & \text{k-οστό γεγονός προήλθε από την } N_1(t) \\ 2, & \text{k-οστό γεγονός προήλθε από την } N_2(t) \end{cases}$$

Στην συγκεκριμένη πραγματοποίηση, $Z_1 = 2$, $Z_2 = 1$, $Z_3 = 1$, $Z_4 = 2$, $Z_5 = 1$, $Z_6 = 1$, $Z_7 = 2 \dots$

Θεώρημα υπέρθεσης διαδικασιών Poisson

Έστω $\{N_i(t): t\geq 0\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ_i, $i=1,2,\dots,r$

Αν $\{N_i(t): t\geq 0\}$ είναι ανεξάρτητες τότε

(i) Η υπέρθεση τους, $\{N(t): t\geq 0\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό:
$\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_r$

(ii) Οι Z_k, $k=0,1,2,\dots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τμ

$$P(Z_k=i)=\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_r}=\frac{\lambda_i}{\lambda} \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,r \\ k=1,2,\dots \end{matrix}$$

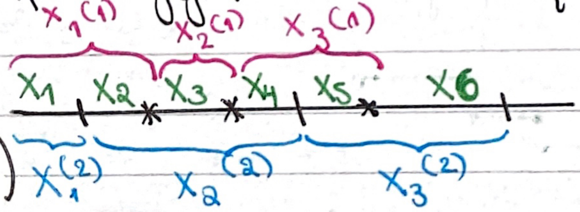
Απόδειξη

i) Για να δείξουμε ότι $\{N(t): t\geq 0\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, θα χρησιμοποιήσω τον 3ο ορισμό (κατασκευαστικό) δηλαδή θα δείξω ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων είναι ανεξάρτητοι και ακολουθούν $Exp(\lambda)$

Έστω $\{X_n: n\geq 1\}$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων της $\{N(t): t\geq 0\}$

Έστω $\{X_n^{(i)}, n\geq 1\}$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων της $\{N_i(t): t\geq 0\}$

Γνωρίζουμε ότι $X_n^{(i)} \sim Exp(\lambda)$



$X_1=\min(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \dots, X_1^{(r)}) \sim Exp(\lambda_1+\dots+\lambda_r)$

Για το X_2, υποθέτουμε ότι το 1ο γεγονός της υπέρθεσης έγινε τη στιγμή s και ήταν τύπου j

Οπότε, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας των εκθετικών τυχαίων μεταβλητών μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλες οι διαδικασίες κάνουν "reset" τη στιγμή s και οι εκθετικοί χρόνοι ξεκινούν από την στιγμή s.

Άρα, $X_2=\min(\underset{1\text{η διαδ}}{\uparrow}, \underset{2\text{η διαδ}}{\uparrow}, \dots, \underset{r\text{η διαδ}}{\uparrow}) \sim Exp(\lambda_1+\lambda_2+\dots\lambda_r)$

και X_2 ανεξάρτητη της X_1

Συνεχίζοντας έτσι, προκύπτει ότι $X_n \sim Exp(\lambda)$, $n=1,2,\dots$ και $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες

Τελικά, η υπέρθεση είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_r$

ii) $P(Z_1=i)=P(\min(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_1^{(3)}, \dots X_1^{(r)})=X_i^{(r)})=\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_r}=\dfrac{\lambda_i}{\lambda}$

Λόγω της αμνήμονης ιδιότητας, έχουμε ότι $P(Z_k = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}$

Διάσπαση διαδικασιών Poisson

▶ **Μηχανισμός διάσπασης Bernoulli**

Έστω $\{N(t): t \geq 0\}$ απαριθμήτρια διαδικασία και κάθε γεγονός χαρακτηρίζεται ως τύπου i, $i=1,\dots,r$, με πιθανότητα p_i ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Έχουμε $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$

Τότε αν $N_i(t)$ = # γεγονότων τύπου i στο $(0,t]$ από την $\{N(t): t \geq 0\}$ η $\{N_i(t): t \geq 0\}$ είναι απαριθμήτρια διαδικασία $i=1,\dots,r$
Λέμε ότι η αρχική διασπάστηκε στις $\{N_i(t): t \geq 0\}$, $i=1,\dots,r$.
Οι $N_i(t)$ ονομάζονται εκλεπτύνσεις της $\{N(t): t \geq 0\}$ και η διαδικασία από την οποία προέκυψαν οι εκλεπτύνσεις ονομάζεται διαχωρισμός Bernoulli με πιθ $p_1,\dots,p_r$

Θεώρημα διάσπασης Poisson

Έστω $\{N(t): t \geq 0\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και $\{N_i(t): t \geq 0\}$, $i=1,\dots,r$ οι εκλεπτύνσεις που προκύπτουν με διαχωρισμό Bernoulli με πιθανότητες $p_1, p_2, \dots, p_r$. Τότε, για κάθε $\{N_i(t), t \geq 0\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό λp_i και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.