Μάθημα 13

Ορισμός 3 → Ορισμός 1 iie

$X_1, X_2, \dots \sim Exp(\lambda)$, $\{N(t) \geq n\} \Leftrightarrow \{S_n \leq t\}$

$X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες τμ

Τότε $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim Erlang(n, \lambda)$ με

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t) = \int_0^t f_{S_n}(u)\,du = \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda n}\,du$$

$$\underline{\text{ολοκληρώνοντας κατά}} \atop \overline{\text{παράγοντες}} \quad 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \; (*)$$

Οπότε

$$P(N(t)=n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) = F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t) \overset{(*)}{=}$$

$$1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - 1 + \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

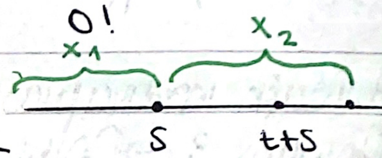
Δηλαδή δείξαμε ότι $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

Ορισμός 1 → Ορισμός 3

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\{N(t), t \geq 0\}$ έχει ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων ισόνομους, ανεξάρτητους και εκθετικά κατανεμημένους με παράμετρο λ.

▶ Για την X_1 : $P(X_1 > t) = P(N(t)=0) \overset{iii}{=} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} \Rightarrow$

$X_1 \sim Exp(\lambda)$



▶ Για την X_2 : $P(X_2 > t \mid X_1 = s) =$

Οι προσαυξήσεις είναι ανεξάρτητες άρα φεύγει η δέσμευση

$P(\#\text{ γεγονότων στο } (s, s+t] = 0 \mid X_1 = s) =$

$P(\#\text{ γεγονότων στο } (s, s+t] = 0) =$ Οι προσαυξήσεις είναι ομογενείς

$P(\#\text{ γεγονότων στο } (0, t] = 0) =$

$P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$

Άρα X_2 ανεξάρτητη της X_1 και $X_2 \sim Exp(\lambda)$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει ότι $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητα και $X_1, X_2, \dots$ $Exp(\lambda)$

Ιδιότητες διαδικασίας Poisson

▶ Θεώρημα Campbell

Διατεταγμένες τυχαίες μεταβλητές

Έστω τυχαία μεταβλητή $(X_1, \dots, X_n)$ και $X_{i:n}$ την i-στη μικρότερη

Δηλαδή $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$

$X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$

Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες, ισόνομες και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με σκ $F(x)$ και σππ $f(x)$.

Τότε η σκ της $X_{i:n}$ είναι $F_{X_{i:n}}(x) = P(X_{i:n} \leq x) =$

$P($τουλάχιστον i από τις $X_1, \dots, X_n$ να είναι $\leq x) =$

$P($τουλάχιστον i επιτυχίες σε n ανεξ. δοκιμές Bernoulli με πιθαν. επιτ. $F(x) = P(X_i \leq x)) =$

$$\sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k}$$

Η σππ της $X_{i:n}$ προκυπτει με παραγωγιση της $F_{X_{i:n}}(x)$, δηλαδη

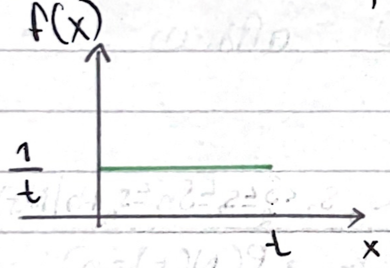
$$f_{X_{i:n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-1)!}\left(F(x)\right)^{i-1} f(x)\left(1-F(x)\right)^{n-i} \quad \text{και}$$

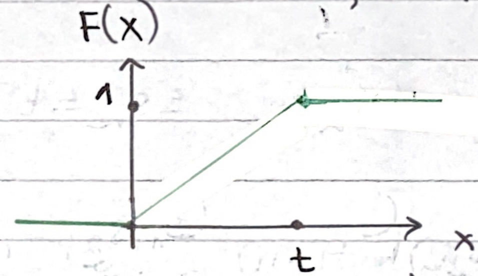
$$f_{(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} n!\, f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n), & \text{αν } x_1 < x_2 < \dots < x_n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ειδική περίπτωση: Ομοιόμορφα κατανεμημένες τμ.

Έστω $U_1, U_2, \dots, U_n$ ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[0,t]$ δηλαδη $U_i \sim Uniform([0,t])$. Οποτε

$$f_{U_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [0,t] \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases} \quad \text{και} \quad F_{U_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{t}, & x \in (0,t) \\ 1, & x \ge t \end{cases}$$





Τότε εχουμε

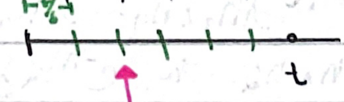
- $$F_{U_{i:n}} = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} (F(x))^k (1-F(x))^{n-k} = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{x}{t}\right)^k \left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-k}, \quad x \in [0,t]$$

- $$f_{U_{i:n}} = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-1)!}\left(\frac{x}{t}\right)^{i-1} \frac{1}{t}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-1}$$

- $$f_{(U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 \le x_1 < x_2 < \dots < x_n \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases}$$

- $$E(U_{i:n}) = \frac{it}{n+1}$$

πχ U_1, U_2, U_3, U_4, U_5



$$E(U_{2:5}) = \frac{2 \cdot t}{6}$$

Ερμηνεια: Για να βρω την αναμενόμενη τιμη της i-οστης μικρότερης, χωρίζω το $[0,t]$ σε $i+1$ ισα διαστηματα που βαζω την $E(U_{i:n})$ στο τέλος του i-διαστηματος

Θεώρημα Campbell

Έστω $\{N(t): t \geq 0\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και χρόνους γεγονότων $S_1, \dots, S_n$.
Τότε $(S_1, S_2, \dots S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})$ όπου $U_1, U_2, \dots, U_n$ ανεξάρτητες, ομοιόμορφα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές στο $[0, t]$