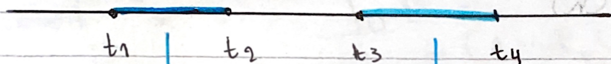
Μάθημα 12.

Ορισμός (Απαριθμήτρια στοχ. διαδικασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις)

Μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t): t \geq 0\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις όταν $\forall\ 0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ ισχύει ότι $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_4) - N(t_3)$ είναι ανεξάρτητες



$N(t_2) - N(t_1) =$ # γεγονότων στο $(t_1, t_2]$

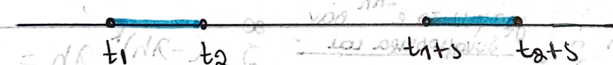
$N(t_4) - N(t_3) =$ # γεγονότων στο $(t_3, t_4]$

Δηλαδή, οι αριθμοί γεγονότων σε μη επικαλυπτόμενα διαστήματα είναι ανεξάρτητα.

Ορισμός (Απαριθμήτρια στοχ. διαδικασία με ομογενείς προσαυξήσεις)

Μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t): t \geq 0\}$ έχει ομογενείς προσαυξήσεις όταν $\forall\ 0 \leq t_1 \leq t_2$ και $s > 0$ ισχύει ότι

$N(t_2+s) - N(t_1+s) \overset{d}{=} N(t_2) - N(t_1)$



Δηλαδή, ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνει μέσα σε ένα διάστημα χρόνου εξαρτάται από το μήκος του διαστήματος.

3 ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΣΤΟΧ. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ POISSON

Ορισμός 1: Μακροσκοπικός

Μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t): t \geq 0\}$ λέγεται Poisson με ρυθμό λ, $\lambda > 0$ αν:

1i ▶ $N(0) = 0$

1ii ▶ Έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις

1iii ▶ $P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$ δηλαδή $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$

Ορισμός 2: Μικροσκοπικός

Μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t): t \geq 0\}$ λέγεται Poisson με ρυθμο λ, $\lambda > 0$ αν

2i ▶ $N(0) = 0$

2ii ▶ Έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις

2iii ▶ $P(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$

Σημείωση: Μια συναρτηση $f(h)$ λέμε ότι είναι $o(h)$ όταν $\lim_{h \to +\infty} \dfrac{f(h)}{h} = 0$ πχ h^2, h^3 είναι $o(h)$

▶ $P(N(h) = 1) = \lambda(h) + o(h)$

▶ $P(N(h) \geq 2) = o(h)$

Ορισμός 3: Ανανεωτικός

Μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι Poisson με ρυθμο λ, $\lambda > 0$ αν είναι ανανεωτική διαδικασια με ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων εκθετικα κατανεμημένους με παράμετρο λ.

Απόδειξη ισοδυναμιας ορισμών 1 και 2

Ορισμος 1 → Ορισμος 2

1i => 2i , 1ii => 2ii άμεσα.

Αρα θυδο 1iii => 2iii

$$P(N(h)=1) \overset{1iii}{=\!=} e^{-\lambda h} \frac{\lambda h}{1!} \quad \frac{\text{γραφω το } e^{-\lambda h} \text{ σαν δυναμοσειρα και}}{\text{ξεχωριζω τους } o(h) \text{ όρους της}} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^k}{k!} \lambda h =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda h)^{k+1}}{k!} = \lambda h - \frac{\lambda^2 h^2}{1!} + \frac{\lambda^3 h^3}{2!} - \dots = \lambda(h) + o(h)$$

Ομοίως, $P(N(h)=0) \overset{1iii}{=} e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^0}{0!} = e^{-\lambda h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^k}{k!} =$

$$1 - \frac{\lambda h}{1!} + \frac{\lambda h^2}{2!} - \frac{\lambda h^3}{3!} + \dots = 1 - \lambda h + o(h)$$

Ορισμός 2 → Ορισμός 1.
$2i \Rightarrow 1i$, $2ii \Rightarrow 1ii$ άμεσα
Αρα οκδο $2iii \Rightarrow 1iii$
Έστω $P_n(t) \underset{συμβ}{=} P(N(t)=n)$

$0 \qquad t \qquad t+h$

Για $n=0$, θα βρούμε μια διαφορική εξίσωση

$P_0(t+h) = P(N(t+h)=0) = P(N(t)=0,\ N(t+h)-N(t)=0) \underset{\text{προσαυξήσεις}}{\overset{\text{ανεξάρτητες}}{=}}$

$P(N(t)=0)\,P(N(t+h)-N(t)=0) \underset{\text{προσαυξήσεις}}{\overset{\text{ομογενείς}}{=}} P(N(t)=0)\cdot P(N(h)=0)$

$\overset{2iii}{\Rightarrow} P_0(t+h) = P(N(t)=0)\,[1-\lambda h+o(h)]$

$P_0(t+h) = P_0(t)\,(1-\lambda h+o(h)) \Rightarrow P_0(t+h) = P_0(t) - P_0(t)\lambda h + P_0(t)o(h)$

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} = -\frac{P_0(t)\lambda h}{h} + \frac{P_0(t)\,o(h)}{h} \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} = \lim_{h\to 0}(-P_0(t)\cdot\lambda) + \lim_{h\to 0}\frac{P_0(t)\,o(h)}{h} \Rightarrow$$

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \Rightarrow P_0'(t) + \lambda P_0(t) = 0 \Rightarrow$$
$$e^{\lambda t}P_0'(t) + \lambda e^{\lambda t}P_0(t) = 0 \Rightarrow (e^{\lambda t}P_0(t))' = 0 \Rightarrow$$
$$e^{\lambda t}P_0(t) = c \Rightarrow P_0(t) = ce^{-\lambda t}$$

Επίσης $P_0(0) = 1$ άρα $P_0(0) = c\cdot e^{-\lambda 0} \Rightarrow c=1$

Αρα $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ δηλαδή $P(N(t)=0) = e^{-\lambda t}$

Για $n \geq 1$, κάνω την ίδια διαδικασία και προκύπτει μια διαφορική και αναδρομική εξίσωση.

$$P_n(t+h) = P(N(t+h)=n) = \sum_{k=0}^{n} P(N(t)=k,\ N(t+h)-N(t)=n-k)$$

$$\sum_{k=0}^{n} P(N(t)=k)\cdot P(N(t+h)-N(t)=n-k)$$ (ανεξάρτητες προσαυξήσεις, ομογενείς προσαυξήσεις)

$$\sum_{k=0}^{n} P(N(t)=k)\cdot P(N(h)=n-k) \Rightarrow P_n(t+h)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\cdot P(N(h)=n-k)$$

$$\Rightarrow P_n(t+h) = P_n(t)\cdot P(N(h)=0) + P_{n-1}(t)\cdot P(N(h)=1) + \sum_{k=0}^{n-2} P_k(t)\underbrace{P(N(h)=n-k)}_{o(h)},$$

$$\overset{\text{ΣΕΙ}}{\Longrightarrow} P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda h+o(h)) + P_{n-1}(t)(\lambda h+o(h)) + o(h)$$

$$\Rightarrow P_n(t+h) - P_n(t) = -\lambda h P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} \Rightarrow$$

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \Rightarrow P_n'(t) + \lambda P_n(t) - \lambda P_{n-1}(t) = 0 \Rightarrow$$

$$e^{\lambda t}P_n'(t) + \lambda e^{\lambda t}P_n(t) - \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(e^{\lambda t}P_n(t)\right)' = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t) \quad \text{[σχέση 1]}$$

Επίσης γνωρίζω ότι $P_0(t) = e^{-\lambda t}$.

Για $n=1$
$$\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right)' = \lambda e^{\lambda t}P_0(t) = \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t} \Rightarrow$$
$$\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right)' = \lambda \Rightarrow e^{\lambda t}P_1(t) = \lambda t + c$$
$$\left.\begin{array}{l} P_1(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t + c) \\ P_1(0) = 0 \end{array}\right\} c=0 \text{ και } P_1(t) = e^{-\lambda t}\lambda t.$$

Έστω $P_{n-1}(t) = P(N(t)=n-1) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$

θνδο $P_n(t) = P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$

Από την [σχέση 1] $\left(e^{\lambda t}P_n(t)\right)' = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t) = \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$

$$\left(e^{\lambda t}P_n(t)\right)' = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Άρα $e^{\lambda t} P_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \frac{t^n}{n} + c \Rightarrow P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} + e^{-\lambda t} + c$

Για $t=0$ $P_n(0) = 0$ οπότε $c=0$.

Τελικά, $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

Απόδειξη ισοδυναμίας ορισμών 1 και 3

Ορισμός 3 $\rightarrow$ Ορισμός 1

Για το 1i αρκεί $P(N(0)=0)=1$

Έχουμε ότι $P(N(0)=0) = P(X_1 > 0) = 1 - P(X_1 \leq 0) = 1 - F_{X_1}(0) = 1 - (1 - e^{\lambda 0}) = 1$.

Για το 1ii προκύπτει από την αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

Για το 1iii έχουμε ότι $\{N(t) \geq n\} \Leftrightarrow \{S_n \leq t\}$ αφού Poisson ανανεωτική από τον ορισμό 3

και $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Erlang(n, \lambda)$