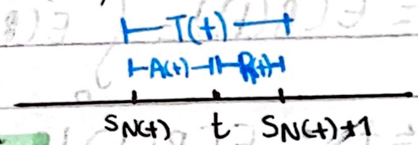
Μάθημα 10.

Ηλικια, υπολοιπόμενος χρονος ανανεωσης, t-εξαρτωμενος ενδιαμεσος χρονος ανανεωσης

Εστω $\{N(t): t \geq 0\}$ ανανεωτικη διαδικασια με ενδιαμεσους χρονους $X_1, X_2, \dots$ που εχουν σκ $F_X(t)$, σππ $f_X(t)$ και $0 < E(X_i)$: μεσο, $var(X_i) = \sigma^2 < \infty$

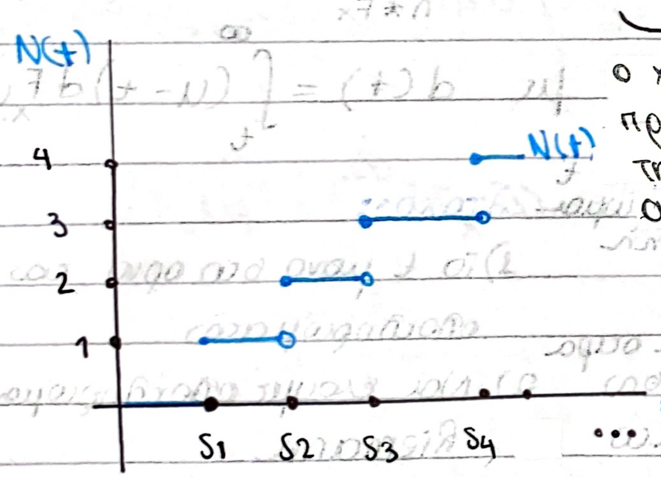


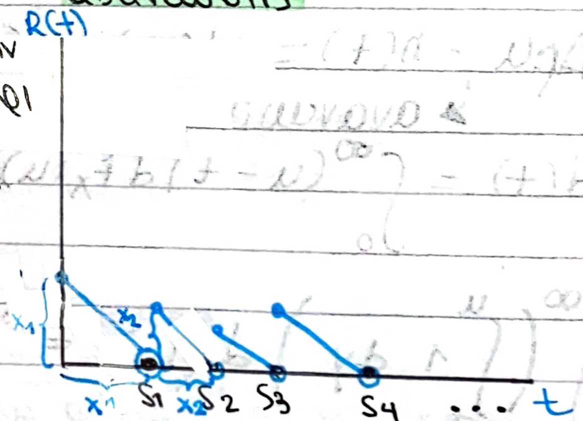
Ορίζουμε τις διαδικασίες:

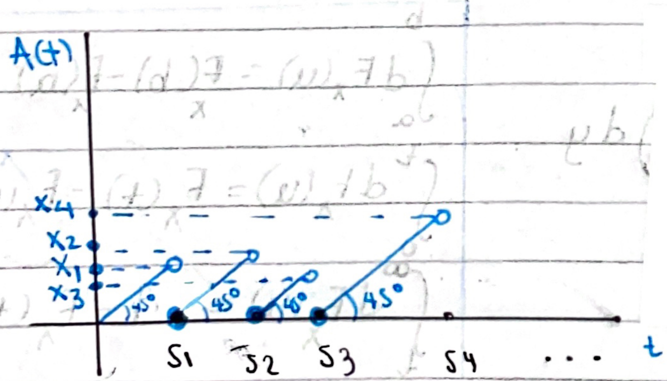
$\{A(t), t \geq 0\}$ όπου $\underbrace{A(t) = t - S_{N(t)}}_{\text{χρονος που περασε απο το τελευταιο γεγονος}}$: **ηλικία**

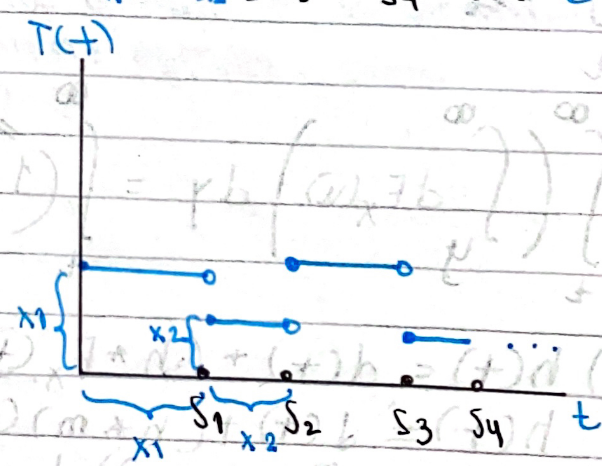
$\{R(t): t \geq 0\}$ όπου $R(t) = \underbrace{S_{N(t)+1} - t}_{\text{χρονος που απομενει μεχρι το επόμενο γεγονος}}$: **υπολοιπομενος χρονος ανανεωσης**

$\{T(t): t \geq 0\}$ όπου $T(t) = \underbrace{S_{N(t)+1} - S_{N(t)}}_{\text{ο χρονος απο την προηγουμενη μεχρι την επομένη ανανεωση}}$: **t εξαρτώμενος ενδιαμεσος χρονος ανανεωσης**









Μελέτη $E(R(t))$

(i) Ανανεωτική εξίσωση για $h(t)=E(R(t))$

(ii) Λύση της εξίσωσης

(iii) $\lim_{t\to\infty} E(R(t)) = ;$

Ερώτηση: Το λεωφορείο περνά κατά μέσο όρο κάθε 10 min. Εγώ φτάνω τη στιγμή t. Πόσο θα περιμένω κατά μέσο όρο;

(i) $h(t) = E(R(t)) = \int_0^\infty E(R(t)|S_1=u)\,dF_X(u) =$

▶ Αν $u\le t$: $E[R(t)|S_1=u] = E[R(t-u)] = h(t-u)$

▶ Αν $u>t$: $E[R(t)|S_1=u] = R(t) = u-t$

Δηλαδή: $h(t) = \int_0^t h(t-u)\,dF_X(u) + \int_t^\infty (u-t)\,dF_X(u) =$

$$= \int_t^\infty (u-t)\,dF_X(u) + \underbrace{\int_0^t h(t-u)\,dF_X(u)}_{h*F_X}$$

Άρα $h(t) = d(t) + (h*F_X)(t)$ με $d(t) = \int_t^\infty (u-t)\,dF_X(u)$

ανανεωτική εξίσωση

$d(t) = \int_t^\infty (u-t)\,dF_X(u) =$ γράφω το $u-t$ ως ολοκλήρωμα Riemann

Στόχος:
1) Το t μόνο στο όριο του ολοκληρώματος
2) Να έχουμε ολοκλήρωμα Riemann

$\int_t^\infty \left(\int_t^u 1\,dy\right) dF_X(u) =$ Εναλλάσσω τη σειρά ολοκλήρωσης $t<y<u<\infty$

$\int_t^\infty \left(\int_y^\infty dF_X(u)\right) dy = \int_t^\infty (1 - \overset{=F_X(\infty)}{F_X(y)})\,dy$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_a^b dF_X(u) = F_X(b)-F_X(a)\\ &\int_0^t dF_X(u) = F_X(t) - \overset{0}{\cancel{F_X(0)}}\\ &\int_t^\infty dF_X(u) = 1-F_X(t)\\ &\int_0^\infty u\,dF_X(u) = \int_0^\infty (1-F_X(u))\,du \end{aligned}}$$

(ii) $h(t) = d(t) + (h*F_X)(t) \Rightarrow$

$h(t) = d(t) + (h*m)(t)$

$h(t) = \int_t^\infty (1-F_X(y))\,dy + \int_0^t d(t-u)\,dm(u)$

$$= \int_t^{\infty} (1 - F_X(y))dy + \int_0^t \left(\int_{t-u}^{\infty} (1 - F_X(y))dy \right) dm(u)$$

(iii) $\lim_{t\to\infty} E(R(t)) = \lim_{t\to\infty} h(t)$

Για να εφαρμόσω το βασικό ανανεωτικό θεώρημα, ελέγχω αν

▶ $d = d_1 - d_2$ όπου d_1, d_2 : μη αρνητικές, φθίνουσες, φραγ

αν $d_1 = \int_t^{\infty} (1 - F_X(y))dy$ είναι φθίνουσα καθώς η ποσότητα στο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητη του t και ≥0 άρα καθώς αυξάνεται το t το διάστημα ολοκλήρωσης ελαττώνεται.

Επίσης, $0 \le d_1 \le \int_0^{\infty} (1 - F_X(y))dy \Rightarrow$

μη αρνητική, $0 \le d_1 \le E(X)$ φραγμένη

και $d_2 = 0$ φθίνουσα, μη αρνητική, φραγμένη (τετριμμένο)

▶ $\int_0^{\infty} |d(t)| < \infty$

$$\int_0^{\infty} |d(t)| < \infty \overset{d(t)\ge 0}{=} \int_0^{\infty} d(t) < \infty = \int_0^{\infty} \left(\int_t^{\infty} \boxed{(1 - F_X(y))} dy \right) dt \ (1)$$

σαν ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

$$1 - F_X(y) = \int_y^{\infty} dF_X(u) \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \int_0^{\infty} \left(\int_t^{\infty} \left(\int_y^{\infty} dF_X(u) \right) dy \right) dt$$

$0 < t < y < u < \infty$

κάνω αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης μήπως προκύψει ροπή

$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^{u} \left(\underbrace{\int_0^{y} 1\,dt}_{y} \right) dy \right) dF_X(u) \ \int_0^{\infty} \left(\underbrace{\int_0^{u} y\,dy}_{\frac{u^2}{2}} \right) dF_X(u) = \int_0^{\infty} \frac{u^2}{2} dF_X(u)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^2 dF_X(u) = \frac{1}{2} E(X^2) = \frac{var(X)}{2} + \frac{E^2(X)}{2} = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2} < \infty$$

$(u^2 f_X(u) du)$.

Οπότε έχουμε ότι εφόσον X συνεχής → X απεριοδική,

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} d(t)\,dt = \frac{1}{\mu}\,\frac{\sigma^2+\mu^2}{2} = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu} = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu} \geq \frac{\mu}{2}$$

δηλαδή στην αρχική ερώτηση, δεν μπορώ να απαντήσω $\frac{10}{2} = 5$ min

=> ανανεωτικό παράδοξο.

Μελέτη της $P(R(t)>x)$

(i) Ανανεωτική εξίσωση για $h(t) = P(R(t)>x)$

(ii) Λύση ανανεωτικής εξίσωσης

(iii) $\lim_{t\to\infty} h(t) = ;$

(i) $h(t) = P(R(t)>x) = \int_0^{\infty} P(R(t)>x \mid S_1 = u)\, dF_X(u)$

▶ Αν $u \leq t$ $\quad P(R(t)>x \mid S_1 = u) = P(R(t-u)>x) = h(t-u)$

▶ Αν $u > t$ $\quad P(R(t)>x \mid S_1=u) = P(u-t>x) = \begin{cases} 1 & u-t>x \\ 0 & u-t\leq x \end{cases}$

$$\begin{cases} 1, & u > x+t \\ 0, & u \leq x+t \end{cases}$$

Άρα $h(t) = \int_0^{t} h(t-u)\,dF_X(u) + \int_t^{x+t} 0\,dF_X(u) + \int_{x+t}^{\infty} 1\,dF_X(u) =$

$$(h * F_X)(u) + \underbrace{1 - F_X(x+t)}_{d(t)}$$: ανανεωτική εξίσωση