Μαθημα 7.

Υπολογισμός : $P(S_n \le t) = F_{S_n}(t)$.

Θεωρουμε ότι γνωρίζουμε τη συναρτηση κατανομης $F_X(t) = P(X_n \le t)$ $n=1,2,\ldots$

Για $n=1$ $F_{S_1}(t) = P(S_1 \le t) = P(X_1 \le t) = F_{X_1}(t) = F_X(t)$

Για $n=2$ $F_{S_2}(t) = P(S_2 \le t) = P(X_1 + X_2 \le t) \xrightarrow[\text{ως προς } X_2]{\text{δεσμεύω}} \int_0^{+\infty} P(X_1 + X_2 \le t \mid X_2 = u) \cdot dF_{X_2}(u)$

Si μη αρνητικη άρα $t-u \ge 0 \Rightarrow u \le t$

$$= \int_0^{+\infty} P(X_1 \le t-u)\, dF_{X_2}(u) = \int_0^{t} F_{X_1}(t-u)\, dF_{X_2}(u) = (F_{X_1} * F_{X_2})(t) =$$

$(F_X * F_X)(t) = F_X^{*2}(t)$ → διπλή συνέλιξη [Υπολογισμος θα γίνει με μετασχηματισμο LST]

Για $n=3$ $\quad F_{S_3}(t) = P(S_3 \le t) = P(X_1+X_2+X_3 \le t) = P(S_2+X_3 \le t)$

δεσμεύοντας ως προς X_3 $\quad \int_0^{+\infty} P(S_2+X_3 \le t \mid X_3=u)\, dF_{X_3}(u) = \int_0^{+\infty} P(S_2 \le t-u)\, dF_{X_3}(u)$

S_2 μη αρνητική άρα $t-u \ge 0 \Rightarrow u \le t$

$$\int_0^{t} P(S_2 \le t-u)\, dF_{X_3}(u) = \int_0^{t} F_{S_2}(t-u)\, dF_{X_3}(u) = (F_{S_2} * F_{X_3})(t)$$

$$= \left(F_X^{*2}(t) * F_X(t)\right) = F_X^{*3}(t)$$

τριπλή συνέλιξη

Επαγωγικά, προκύπτει ότι $\boxed{F_{S_n}(t) = F_X^{*n}(t)}$, $n=1,2,\dots$

αριθμός γεγονότων έως την στιγμή t

Υπολογισμός: $P_n(t) = P(N(t)=n)$

Θεωρούμε ότι γνωρίζουμε την σκ $F_X(t) = P(X_n \le t)$, $n=1,2,\dots$

Για $n=0$ $\quad P_0(t) = P(N(t)=0) = P(X_1 > t) = 1 - P(X_1 \le t) = 1 - F_{X_1}(t) = 1 - F_X(t)$

Για $n \ge 1$ $\quad \boxed{P_n(t)} = P(N(t)=n) = P(N(t) \ge n) - P(N(t) \ge n+1) =$

$$P(S_n \le t) - P(S_{n+1} \le t) = F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t) = \boxed{F_X^{*n}(t) - F_X^{*(n+1)}(t)}$$

Υπολογισμός $m(t) = E(N(t))$: ανανεωτική συνάρτηση

Έστω ότι γνωρίζουμε την σκ $F_X(t) = P(X_n \le t)$, $n=1,2,\dots$

Έχουμε ότι:

$$\boxed{m(t)} = E(N(t)) = E\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n \le t\}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(1_{\{S_n \le t\}}\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[0 \cdot P(1_{\{S_n \le t\}} = 0) + 1 \cdot P(1_{\{S_n \le t\}} = 1)\right] =$$

Δηλαδή η μέση τιμή της δείκτριας ισούται με την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \le t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{S_n}(t) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} F_X^{*n}(t)}$$

LST βασικών ποσοτήτων

$$\boxed{\tilde{F}_{S_n}(s)} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dF_{S_n}(t) = \boxed{\left(\tilde{F}_X(s)\right)^n}$$

αφού ο LST μετατρέπει την συνέλιξη συναρτήσεων κατανομής σε γινόμενο των LST των συναρτήσεων κατανομής

Για $n \geq 0$. $\boxed{\tilde{P}_n(s) = \left(\tilde{F}_X(s)\right)^n - \left(\tilde{F}_X(s)\right)^{n+1}}$, $n \geq 0$.

LST της $\tilde{P}_n(t)$

$$\boxed{\tilde{m}(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{F}_X(s)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tilde{F}_X(s)\right)^n - \left(\tilde{F}_X(s)\right)^0 =$$

γεωμετρικό άθροισμα

$$\frac{1}{1-\tilde{F}_X(s)} - 1 = \boxed{\frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}}$$

Παράδειγμα (Poisson ανανεωτική διαδικασία)

$\{N(t),\ t \geq 0\}$ Poisson ανανεωτική διαδικασία

$\Updownarrow$

$X_n \sim Exp(\lambda)$, $n = 1, 2, \dots$
$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες , $m(t) = ;$

Λύση

Διαδικασία υπολογισμού $m(t)$
$F_X(t) \to \tilde{F}_X(s) \longrightarrow \tilde{m}(s) \longrightarrow m(t)$.

$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$

$$\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{s}$$

$m(t) = \lambda \cdot t$ αφού $\frac{1}{s}$ LST της $f(t) = t$.

Παράδειγμα (ενδιάμεσοι χρόνοι ~ μίξη εκθετικών)

$\{N(t) : t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία

$$X_n = \begin{cases} Y_1 \sim Exp(\lambda), & \text{με πιθ } p \\ Y_2 \sim Exp(\mu), & \text{με πιθ } 1-p \end{cases}$$

$\lambda \neq \mu$ (υπερεκθετική)

$m(t) = ;$

Λύση.

$$F_X(t) = P(X \leq t) = p\,P(Y_1 \leq t) + (1-p)\,P(Y_2 \leq t) = $$
$$p(1 - e^{-\lambda t}) + (1-p)(1 - e^{-\mu t}) =$$

$$\tilde{F}_X(s) = p \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s} + (1-p)\frac{\mu}{\mu + s}$$

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} = \frac{p\frac{\lambda}{\lambda+s} + (1-p)\frac{\mu}{\mu+s}}{1 - p\frac{\lambda}{\lambda+s} - (1-p)\frac{\mu}{\mu+s}} =$$

$$\frac{\dfrac{p\lambda(\mu+s)+(1-p)\mu(\lambda+s)}{(\lambda+s)(\mu+s)}}{\dfrac{(\lambda+s)(\mu+s)-p\lambda(\mu+s)-(1-p)\mu(\lambda+s)}{(\lambda+s)(\mu+s)}} = \frac{[p\lambda+(1-p)\mu]s+\lambda\mu.}{\lambda\mu+\lambda s+\mu s+s^2-p\lambda\mu-p\lambda s-(1-p)\lambda\mu-(1-p)\mu s}$$

$$= \frac{[p\lambda+(1-p)\mu]s+\lambda\mu}{s^2+(1-p)\lambda s+p\mu s} = \frac{[p\lambda+(1-p)\mu]s+\lambda\mu}{s\cdot[s+(1-p)\lambda+p\mu]} =$$

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+(1-p)\lambda+p\mu} \quad (1)$$

$$(1) \xRightarrow{\cdot s} \frac{[p\lambda+(1-p)\mu]s+\lambda\mu}{s+(1-p)\lambda+p\mu} = A + \frac{Bs}{s+(1-p)\lambda+p\mu} \xRightarrow{s=0}$$

$$A = \frac{\lambda\mu}{(1-p)\lambda+p\mu}. \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{\cdot[s+(1-p)\lambda+p\mu]} \frac{[p\lambda+(1-p)\mu]s+\lambda\mu}{s} = \frac{A(s+(1-p)\lambda+p\mu)}{s} + B \quad \underline{\underline{s=-(1-p)\lambda-p\mu}}$$

$$B = \frac{[p\lambda+(1-p)\mu][(1-p)\lambda+p\mu]-\lambda\mu}{[(1-p)\lambda+p\mu]} \quad (3)$$

Άρα $\tilde{m}(s) = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+(1-p)\lambda+p\mu}$ με A από (2), B από (3)

Δηλαδή $\tilde{m}(s) = A \cdot \dfrac{1}{s} + B\dfrac{1}{(1-p)\lambda+p\mu} \dfrac{(1-p)\lambda+p\mu}{(1-p)\lambda+p\mu+s}$

$$m(t) = At + \frac{B}{(1-p)\lambda+p\mu}\left(1-e^{-[(1-p)\lambda+p\mu]t}\right)$$