Μαθημα 6.

7. Ιδιοτητα αθροισματος

$X_1, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$.
$X_1, \dots, X_n$ ανεξαρτητες $\Bigg\}$ $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Erlang(n, \lambda)$

Αποδειξη

Θα βρουμε 1) LST της Erlang(n,λ), 2) LST του αθροισματος 3) Οτι είναι ίδιοι

Εστω $X \sim Erlang(n,\lambda)$. Τοτε $\tilde{F}_X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dF_X(t) \overset{X \text{ συνεχης}}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty} e^{-st} F_X'(t)\, dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-(\lambda+s)t}\, dt$$

$$= \frac{\lambda^n}{(\lambda+s)^n} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda+s)^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-(\lambda+s)t}\, dt}_{\text{σππ της } Erlang(n,\lambda+s)} \Rightarrow \tilde{F}_X(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$$

LST του $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι $\tilde{F}_{S_n}(s) = \tilde{F}_{\sum X_i}(s) \underset{X_1, X_2, \dots, X_n}{\overset{\text{ανεξαρτητες}}{=\!=\!=}} \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \tilde{F}_{X_2}(s) \cdots \tilde{F}_{X_n}(s)$

$\overset{X_i \sim Exp(\lambda)}{=\!=\!=} \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$

Αφου $\tilde{F}_X(s) = \tilde{F}_{S_n}(s)$, $S_n \sim Erlang(n,\lambda)$ ■

8 Ιδιότητα τυχαίου αθροίσματος

$X_1, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$
$X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες
N ανεξάρτητη των $X_1, \dots, X_n$
$P(N=n) = (1-p)^{n-1} p, \; n = 1, 2, \dots$
δηλ $N \sim Geom(p)$
$N = \#$ δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία

$\Bigg\} \; S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim Exp(\lambda p)$

Απόδειξη

Θα υπολογίσουμε τον LST της SN και θα δείξουμε ότι είναι ο LST μιας Exp(λ). Γνωρίζουμε ότι:

$$\tilde{F}_{SN}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s))$$

$$\blacktriangleright P_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \cdot p \cdot z^n = pz \sum_{n=1}^{\infty} [(1-p)z]^{n-1}$$

$$\overset{n'=n-1}{=} pz \sum_{n'=0}^{\infty} [(1-p)z]^{n'} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{γεωμετρικό} \\ \text{άθροισμα} \\ |(1-p)z|<1.}}{=} pz \frac{1}{1-(1-p)z}.$$

$$\text{Άρα } \tilde{F}_{SN}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s)) = p \cdot \tilde{F}_X(s) \frac{1}{1-(1-p)\tilde{F}_X(s)} = p\frac{\lambda}{\lambda+s} \cdot \frac{1}{1-(1-p)\frac{\lambda}{\lambda+s}}$$

$$= \frac{p\lambda}{\lambda+s} \cdot \frac{\lambda+s}{\lambda+s-(1-p)\lambda} = \frac{p\lambda}{\lambda+s-\lambda+p\lambda} = \frac{p\lambda}{s+p\lambda} \leftarrow \text{LST της } Exp(p\lambda)$$

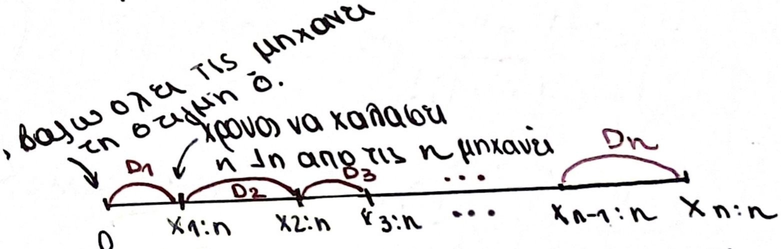
Άρα $S_N \sim Exp(\lambda p)$ $\blacksquare$

9 Διαστήματα

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$
$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες

$\downarrow$ τότε

$D_1, D_2, \dots, D_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $D_i \sim Exp((n-i+1)\lambda), \; i = 1, \dots, n$



δηλ συμβολίζουμε $X_{i:n}$ την i-οστή διατεταγμένη των $X_1, \dots, X_n$
οπότε $X_{1:n} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$
$X_{n:n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$
$D_i = X_{i:n} - X_{(i-1):n}, \; i \geq 2$
$D_1 = X_{1:n}$

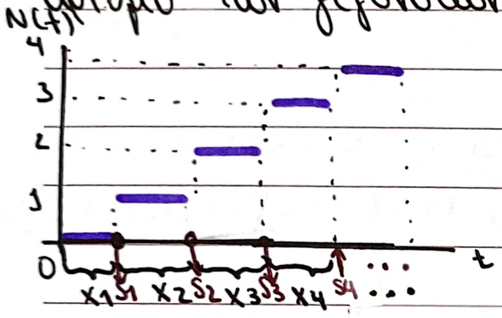
Απόδειξη

$D_1 = X_{1:n} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim Exp(n\lambda)$.
Τη στιγμή $X_{1:n}$ χαλάει η 1 μηχανή αλλά οι υπόλοιπες $n-1$ συνεχίζουν να λειτουργούν και ο χρόνος ζωής τους μετά την $X_{1:n}$ είναι $Exp(\lambda)$ [αμνήμονη ιδιότ.]

Αρα $D_2 = \min(X_2, \dots, X_n) \sim Exp((n-1)\lambda)$.
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τροπο προκυπτει το ζητουμενο ■

Ενότητα 2 - Ανανεωτικες διαδικασιες

Ορισμος [Απαριθμητρια στοχαστικη διαδικασια] Η στοχαστικη διαδικασια $\{N(t) : t \geq 0\}$ λεγεται απαριθμητρια αν η τμ $N(t)$ δινει τον αριθμό των γεγονότων που εχουν συμβει μεχρι τη στιγμη t.



Ιδιότητες
1) Η $N(t)$ παιρνει τιμες στο $\mathbb{N}$
2) $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$
3) $s < t \Rightarrow N(t) - N(s) = \#$γεγονότων στο $(s, t]$

Τυχαίες μεταβλητες που σχετιζονται με μια απαριθμητρια

X_1 = χρόνος μέχρι το πρώτο γεγονος
X_2 = χρονος μεταξυ πρωτου και δευτερου γεγονότος
γενικα X_n = χρονος μεταξύ $(n-1)$οστου και n-οστού γεγονότος
Η ακολουθια $\{X_n : n \geq 1\}$ ονομαζεται **ακολουθια ενδιαμεσων χρονων**

S_1 = χρονος 1ου γεγονοτος
γενικα S_n = χρονος ν-ου γεγονότος
Η ακολουθια $\{S_n : n \geq 1\}$ ονομαζεται **ακολουθία χρόνων γεγονότων**

Σχέσεις
- $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad , n \geq 1$
- $X_1 = S_1, \quad X_n = S_n - S_{n-1} \quad , n \geq 2$
- $\{N(t) \geq n\} \Leftrightarrow \{S_n \leq t\}$

Ορισμός [Ανανεωτική Διαδικασία] Μια απαριθμήτρια διαδικασία λέγεται ανανεωτική αν η ακολουθία ενδιαμεσων χρόνων $\{X_n : n \geq 1\}$ είναι ακολουθια ανεξάρτητων και ισόνομων τμ. Επίσης, τότε η $\{S_n, n \geq 1\}$ ονομαζεται ανανεωτική ακολουθία.

Μεταβατική κατανομή

Για πεπερασμένο $t \geq 0$, θεωρώντας ότι γνωρίζουμε την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων $[F_X(t)]$, θέλουμε να υπολογίσουμε

- $P(S_n \leq t) \underset{\text{συμβ}}{\equiv} F_{S_n}(t)$
- $P(N(t)=n) \underset{\text{συμβ}}{\equiv} P_n(t)$.

Για τους υπολογισμούς χρειαζόμαστε την έννοια της

συνέλιξης συναρτήσεων κατανομών.

Συνέλιξη συναρτήσεων κατανομών εμφανίζεται όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση κατανομής αθροίσματος ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με σκ $F_X(t), F_Y(t)$

Η σκ του αθροίσματος είναι:

$$F_{X+Y}(t) = P(X+Y=t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X+Y \leq t \mid Y=u) \cdot dF_Y(u) =$$

$$\underset{X,Y\ \text{ανεξ}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq t-u)\, dF_Y(u) = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} F_X(t-u)\, dF_Y(u) \equiv (F_X * F_Y)(t)}$$

Ειδική περίπτωση

Αν $X, Y \geq 0$, $F_{X+Y}(t) = \int_0^t F_X(t-u)\, dF_Y(u)$