Μάθημα 4

Μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes συνάρτησης

Έστω $\varphi: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσα. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes (LST) της φ είναι $\int_0^{+\infty} e^{-sx} dx = \tilde{\varphi}(s)$.

LST μιας τμ X

Έστω $X \geq 0$ με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, τότε ο LST της X είναι ο LST της $F_X(x)$ δηλαδή

$$\tilde{F}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dF_X(x) = E(e^{-sX})$$

Ειδικά, αν X διακριτή $\tilde{F}_X(s) = \sum_{x}^{+\infty} e^{-sx} P(X=x)$

αν X συνεχής $\tilde{F}_X(s) = \int_0 e^{-sx} f_X(x) dx$

Ιδιότητες LST

1) $\tilde{F}_X(0) = 1$ αφού $\tilde{F}_X(0) = E(e^{-0X}) = E(1) = 1$

2) X, Y τυχαίες μεταβλητές με $\tilde{F}_X(s) = \tilde{F}_Y(s)$ τότε X, Y ισονομες

3) $E[X^n] = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0)$

Απόδειξη: $\tilde{F}_X(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_X(x) = E(e^{-sX}) \overset{d/ds}{\Longrightarrow}$

$$\tilde{F}_X'(s) = \int_0^{\infty} (-x) e^{-sx} dF_X(x) = E(-Xe^{-sX}) \overset{d^n/d^n}{\Longrightarrow}$$

$$\tilde{F}_X^{(n)}(s) = \int_0^{\infty} (-x)^n e^{-sx} dF_X(x) = E((-X)^n e^{-sX}) \overset{s=0}{\Longrightarrow}$$

$$\tilde{F}_X^{(n)}(0) = E[(-X)^n] = (-1)^n E(X^n) \Rightarrow$$

$$E(X^n) = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0)$$

4) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Τότε $\tilde{F}_{S_n}(s) = \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \ldots \cdot \tilde{F}_{X_n}(s)$

Απόδειξη: $\tilde{F}(s) = E(e^{-s \cdot S_n}) = E(e^{-s\sum_{i=1}^{n} X_i}) = E(e^{-sX_1} e^{-sX_2} \cdots e^{-sX_n}) \overset{X_i \text{ ανεξάρτ.}}{=}$
$E(e^{-sX_1}) \cdot E(e^{-sX_2}) \cdots E(e^{-sX_n}) = \tilde{F}_{X_1}(s) \cdots \tilde{F}_{X_n}(s)$

5) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με LST $\tilde{F}_{X_i}(s) = \tilde{F}_X(s)$ $i=1,2,\ldots,n$. Έστω $N \geq 0$ τυχαία ακέραια μεταβλητή με πιθανογεννήτρια $P_N(z) = E(z^N)$ ανεξάρτητη των $X_1, \ldots, X_n$.

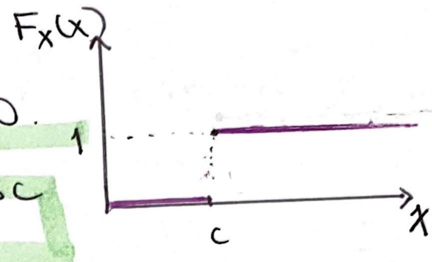
Τότε αν $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$, $\tilde{F}_{S_N}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s))$

Απόδειξη $\tilde{F}_{S_N}(s) = E(e^{-sS_N}) = E(e^{-s\sum_{i=1}^{N} X_i}) \overset{\Theta\Delta\Pi\Pi}{=} E[E(e^{-s\sum_{i=1}^{N} X_i} | N)] =$

$\sum_{n=0}^{\infty} E[e^{-s\sum_{i=1}^{N} X_i} | N=n] \cdot P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{E(e^{-s\sum_{i=1}^{n} X_i})}_{\text{LST της } \sum_{i=1}^{n} X_i} P(N=n) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{F}_X(s))^N \cdot P(N=n) = E[(\tilde{F}_X(s))^N] = P_N(\tilde{F}_X(s))$

LST βασικών Τ.μ.



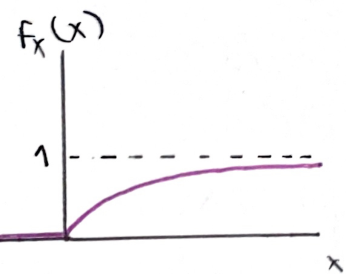
1) Σταθερή Τμ : $X = c$, $c \geq 0$.

$\boxed{\tilde{F}_X(s)} = E(e^{-sX}) = e^{-sc} \underbrace{P(X=c)}_{1} = \boxed{e^{-sc}}$

Ειδική περίπτωση: αν $X=0$, $\boxed{\tilde{F}_X(s) = 1}$

2) $X \sim Exp(\lambda)$.

$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ άρα $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$



$\tilde{F}_X(s) = E(e^{-sX}) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)x} dx$

$= \lambda \left[\frac{e^{-(\lambda+s)x}}{-(\lambda+s)} \right]_0^{\infty} \underset{\lambda+s>0}{=} \lambda \left(0 - \frac{1}{-(\lambda+s)}\right) = \frac{\lambda}{\lambda+s}, \lambda > -s.$

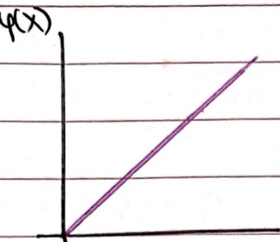
3) $X \sim Erlang(n, \lambda)$ [$= Gamma(n,\lambda)$ δηλαδή Erlang = Gamma για πρώτη παράμετρο $\in \mathbb{N}$]

Αν $X \sim Erlang(n, \lambda)$, τότε $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ με $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Exp(\lambda)$ όπου $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτ.

Τότε $\boxed{\tilde{F}_X(s)} = \tilde{F}_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(s) \underset{\substack{\text{ιδιότητα } 4 \\ X_1, X_2, \ldots, X_n \\ \text{ισόνομες}}}{=} \prod_{i=1}^{n} \tilde{F}_{X_i}(s) = \boxed{\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n}$

Υπενθυμιση: συνάρτηση κατανομής της Erlang

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 &, x<0 \\ 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x} \dfrac{(\lambda x)^k}{k!} &, x \geq 0. \end{cases}$$



LST συναρτήσεων

1) $\varphi(x)=x$, $\varphi:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\tilde{\varphi}(s)} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\, d\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \varphi'(x)\, dx = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-sx}\, dx \overset{x}{=} \left[\frac{e^{-sx}}{-s}\right]_0^{+\infty}$$

$$0 - \frac{1}{-s} = \boxed{\frac{1}{s}}$$

2) $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$

Αν $\varphi_1, \varphi_2 \; [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσες και $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$.
Τότε $\boxed{\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}_1(x) + \tilde{\varphi}_2(x)}$

3) $\varphi(x) = c\,\varphi_1(x)$

Αν $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσα και $c>0$. σταθερα. Τότε
$\boxed{\tilde{\varphi}(x) = c\, \tilde{\varphi}_1(x).}$

Αντιστροφη LST.

Γνωρίζω LST $\tilde{F}_X(s)$ $\Rightarrow$ Βρίσκω συναρτηση κατανομης $F_X(x)$

Παράδειγμα 1.

Εστω X μη αρνητικη τμ με LST $\tilde{F}_X(s) = \dfrac{10s+c}{3s^2+30s+75}$

(i) $c=0$;
(ii) $E(X)=$;
(iii) $F_X(x)=$;

(i) $\tilde{F}_X(0)=1 \Rightarrow \dfrac{c}{75} = 1 \Rightarrow c=75$ αρα $\tilde{F}_X(s) = \dfrac{10s+75}{3s^2+30s+75}$

(ii) $E(X) = (-1)^1 \tilde{F}_X'(0) = -1 \left(\dfrac{10(3s^2+30s+75) - (10s+75)(6s+30)}{(3s^2+30s+75)} \right)_{s=0}$

$\Rightarrow E(X) = -\dfrac{10 \cdot 75 - 75 \cdot 30}{75^2} = \dfrac{20}{75} = \dfrac{4}{25}$

(iii) Για την αντιστροφη μετασχηματισμου LST ρητης συναρτησης:

1ο βήμα Τη γράφω σαν άθροισμα απλών κλασμάτων

Παραγοντοποιώ παρονομαστή $\tilde{F}_X(s) = \dfrac{10s+75}{3s^2+30s+75} = \dfrac{10s+75}{3(s^2+10s+25)} = \dfrac{10s+75}{3(s+5)^2}$

Το γράφω σαν απλά κλάσματα $\dfrac{10s+75}{3(s+5)^2} = \dfrac{A}{(s+5)^2} + \dfrac{B}{s+5}$ (1)

$$(1) \xrightarrow{\cdot(s+5)^2} \frac{10s+75}{3} = A + B(s+5) \xRightarrow{s=-5}$$

$$\boxed{\frac{25}{3} = A}$$

$$(1) \xrightarrow[A=\frac{2}{5}]{\cdot(s+5)} \frac{(10s+75)}{3(s+5)} = \frac{\frac{25}{3}}{s+5} + B \Rightarrow B = \frac{10s+75-25}{3(s+5)}$$

$$B = \frac{10s+50}{3(s+5)} = \frac{10(s+5)}{3(s+5)} \Rightarrow \boxed{B = \frac{10}{3}}$$

Άρα $\tilde{F}_X(s) = \dfrac{25}{3(s+5)^2} + \dfrac{10}{3(s+5)}$

2ο βήμα Βρίσκω μετασχηματισμούς LST γνωστών μεταβλητών

$$\frac{25}{3(s+5)^2} = \frac{1}{3}\frac{5^2}{(s+5)^2} = \frac{1}{3}\underbrace{\left(\frac{5}{s+5}\right)^2}_{\text{LST Erlang }(2,5)}$$

$$\frac{10}{3(s+5)} = \frac{2}{3}\underbrace{\frac{5}{s+5}}_{\text{LST Exp}(5)}$$

Άρα $F_X(x) = \dfrac{1}{3}\underbrace{(1-e^{-5x}-e^{-5x}5x)}_{\text{σκ Erlang}(2,5)} + \dfrac{2}{3}\underbrace{(1-e^{-5x})}_{\text{σκ της Exp}(5)}$

αφού $\underset{X \sim \text{Erlang}(2,5)}{F_X(x)} = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{2-1} e^{-5x}\frac{(5x)^k}{k!} = 1-\left(e^{-5x}+e^{-5x}5x\right)$

Παράδειγμα 2

$X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\mu)$ για $\boxed{\lambda \neq \mu}$, X, Y ανεξάρτητες, $Z = X+Y$, $F_Z(z) = ?$

Λύση

Θα βρούμε πρώτα την LST της $Z = X+Y$ και θα αντιστρέψουμε την LST

$$\tilde{F}_z(s) = \tilde{F}_{x+y}(s) \xrightarrow[x,y \text{ ανεξ}]{} \tilde{F}_x(s)\,\tilde{F}_y(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}\,\frac{\mu}{\mu+s}$$ eclass 20-21

$$= \frac{\lambda\mu}{(\lambda+s)(\mu+s)}$$

Για να αντιστρέψω, γράφω σαν άθροισμα απλών κλασμάτων

$$\frac{\lambda\mu}{(\lambda+s)(\mu+s)} = \frac{A}{\lambda+s} + \frac{B}{\mu+s}$$