Μαθημα 2

$$var(S_N) = E[S_N^2] - E^2[S_N] \quad (1)$$

$$\blacktriangleright E[S_N^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2\right] \underset{\text{θεώρημα διπλής μ.τ.}}{\overset{\text{δεσμευση ως προς } N}{=\!=}} E\left[E\left[\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i)^2 \mid N\right]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\left(\sum X_i\right)^2 \mid N=n\right] P(N=n) \quad (2)$$

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2 \mid N=n\right] \overset{\text{θοπ}}{\underset{X_i}{=}} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} X_i X_j\right] =$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)}_{\substack{var(X_i)+E^2(X_i)=\\ \sigma_X^2+\mu_X^2}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \underbrace{E(X_i X_j)}_{\substack{E(X_i)\cdot E(X_j)\\ \mu_X^2}} = n(\sigma_X^2 + \mu_X^2) + n(n-1)\mu_X^2 \quad (3)$$

$$(2) \overset{(3)}{\Longrightarrow} E[S_n^2] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[n(\mu_X^2 + \sigma_X^2) + n(n-1)\mu_X^2 \right] P(N=n) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(\mu_X^2 + \sigma_X^2) P(N=n) + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\mu_X^2 P(N=n) =$$

$$(\mu_X^2+\sigma_X^2) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n)}_{E[N]} + \mu_X^2 \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \mu_X^2}_{\substack{E(N^2)=\\ var(N^2)+E^2(N)}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n)}_{E(N)} \right)$$

$$(\mu_X^2+\sigma_X^2)\mu_N + \mu_X^2(\sigma_N^2 + \mu_N^2) - \mu_X^2 \mu_N =$$

$$\mu_X^2 \mu_N + \sigma_X^2 \mu_N + \mu_X^2 \sigma_N^2 + \mu_X^2 \mu_N^2 - \mu_X^2 \mu_N =$$

$$\sigma_X^2 \mu_N + \mu_X^2 \sigma_N^2 + \mu_X^2 \mu_N^2 \quad (4)$$

$$(1) \overset{(4)}{\Longrightarrow} Var(S_n) = \sigma_X^2 \mu_N + \mu_X^2 \sigma_N^2 + \mu_X^2 \mu_N^2 - \mu_X^2 \mu_N^2$$

$E(S_n) = \mu_X \mu_N$

$$= \sigma_X^2 \mu_N + \mu_X^2 \sigma_N^2$$

▶ Πιθανογεννήτριες

Ορισμός: Έστω $X \geq 0$ ακέραια τμ με σπ $f_X(k) = P(X=k)$, $k=0,1,2,\ldots$
Η πιθανογεννήτρια της X είναι η

$$\boxed{P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X=k) = E[z^k]}$$

Ορίζεται στο διάστημα όπου η σειρά συγκλίνει, το ελάχιστο τέτοιο διάστημα είναι για $|z| \leq 1$.

Ιδιότητες:

1) $P(X=k) = f_X(k) = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$, $k=0,1,\ldots$

2) Αν X, Y τμ με $P_X(z) = P_Y(z) \Rightarrow X, Y$ ισόνομες δηλ. $f_X(k) = f_Y(k)$, $k=0,1,2,\ldots$

3) $P_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) = 1$. ← χρήσιμη συνθήκη για υπολογισμό σταθερών στον υπολογισμό της πιθανογεννήτριας

4) $\boxed{E[X(X-1)(X-2)(X-r+1)] = P_X^{(r)}(1)}$ (*)

Άρα,

$$E[X] = P'_X(1)$$

$$var[X] = \underbrace{E(X^2)}_{} - E^2(X) = P''_X(1) + P'_X(1) - (P'_X(1))^2$$

$$E(X(X-1)) + E(X) = P''_X(1) + P'_X(1)$$

Απόδειξη (*) $P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) z^k \xRightarrow[\text{φορές ως προς } z]{\text{παραγωγίζω } r}$

$$P_X^{(r)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)\, z^{k-r} \overset{z=1}{\Rightarrow}$$

$$P_X^{(r)}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) \underbrace{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}_{g(k)} \Rightarrow \text{τύπος αφηρημένου στατιστικού}$$

$$P_X^{(r)}(1) = E[X(X-1)(X-2)\cdots(X-r+1)] \blacksquare$$

5). $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ. τμ με πιθανογεννήτρια $P_{X_i}(z)$, $i = 1, \ldots, n$

Αν $\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i}$, τότε $\boxed{P_{S_n}(z) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z)}$

Απόδειξη $P_{S_n}(z) = E(z^{S_n}) = E(z^{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}) =$

$$E(z^{X_1} \cdot z^{X_2} \cdot \ldots \cdot z^{X_n}) \underset{\text{ανεξάρτητες}}{\overset{X_1, X_2, \ldots, X_n}{=}} E(z^{X_1}) E(z^{X_2}) \cdots E(z^{X_n}) =$$

$$P_{X_1}(z) \cdot P_{X_2}(z) \cdot \ldots \cdot P_{X_n}(z) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z) \blacksquare$$

6) • $X_1, X_2, \ldots$ ακολουθία ανεξ. και ισονόμων τμ με πιθανογεννήτριες $P_X(z) = P_{X_i}(z)$, $i = 1, 2, \ldots$

• N ακέραια τμ, ανεξ των $X_1, \ldots, X_n$ με πιθανογεννήτρια $P_N(z)$

Αν $\boxed{S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i}$, τότε $\boxed{P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))}$.

Αποδειξη $P_{S_N}(z) = E(z^{S_N}) = E\left(z^{\sum_{i=1}^{N} X_i}\right) \underset{\text{δεσμευση ως προς } N}{\overset{\text{ΘΔΜΤ}}{=\!=\!=}} E\left[E\left[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \mid N=n\right]\right]$

$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[z^{\sum_{i=1}^{N} X_i} \mid N=n\right] P(N=n)$ (1).

$E\left[z^{\sum_{i=1}^{N} X_i} \mid N=n\right] \underset{\substack{N \text{ ανεξ των} \\ X_i}}{=\!=\!=} E\left[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) \cdots P_{X_n}(z) =$

$= \left(P_X(z)\right)^n$ (2)

$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} P_{S_N}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(P_X(z)\right)^n P(N=n) = E\left[\left(P_X(z)\right)^N\right] = P_N\left(P_X(z)\right)$ ■

Βασικές δυναμοσειρές

① Γεωμετρική $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, $|z| \leq 1$

② Εκθετική $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$

③ Διωνυμική $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n$

$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^k$

④ Αρνητική διωνυμική $\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k = \frac{1}{(1-z)^n}$, $|z| \leq 1$

Πιθανογεννήτρια βασικών τμ.

1) $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

πείραμα: Δοκιμή Bernoulli με 2 αποτελέσματα → επιτυχία, πιθ p / → αποτυχία, πιθ $1-p$

$X = \#$ επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli

$$f_X(k) = \begin{cases} 1-p, & k=0 \\ p, & k=1 \end{cases}$$

$P_X(z) = \sum_{k=0}^{1} f_X(k) z^k = P(X=0) \cdot z^0 + P(X=1) z^1 = 1 - p + pz$

2) $X \sim Bin(n,p)$

πειραμα: n δοκιμες Bernoulli με πιθ επιτ p.

$X = \#$ επιτυχιων σε n δοκιμες Bernoulli

$$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2,\dots,n$$

$P_X(z) = (1-p+pz)^n, \; z \in \mathbb{R}$

1ος τροπος $P_X(z) = \sum_{k=0}^{n} f_X(k) z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k$

$$= (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{p^k z^k}{(1-p)^k} = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{pz}{1-p}\right)^k$$

$$= (1-p)^n \left(1 + \frac{pz}{1-p}\right)^n = (1-p)^n \left(\frac{1-p+pz}{1-p}\right)^n =$$

$$(1-p+pz)^n$$

2ος τροπος $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ οπου $X_i \sim Bern(p)$ $i=1,\dots,n$

X_i ανεξαρτητες

Αρα $P_X(z) = P_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(z) \underset{\text{ιδιοτητα } 5}{=} P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) \cdots P_{X_n}(z) \underset{X_i \sim Bern(p)}{=\!=} (1-p+pz)^n$

3) $X \sim Geom(p)$

πειραμα: ακολουθια ανεξαρτητων δοκιμων Bernoulli με πιθ επιτυχιας p

$X = \#$ επιτυχιων εως την 1η αποτυχια

$$f_X(k) = \underset{\uparrow \text{ k αποτυχιες}}{p^k} \; \underset{\uparrow \text{ 1η επιτυχια}}{(1-p)}, \quad k=0,1,2,\dots$$

$P_X(z) = 1-p/1-pz, \; |pz|<1.$

1ος τροπος $P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} p^k (1-p) z^k =$

$$(1-p) \sum_{k=0}^{\infty} (pz)^k = 1-p \cdot \frac{1}{1-pz} = \frac{1-p}{1-pz}, \; |pz|<1$$

2ος τροπος Εστω X_1 το αποτελεσμα της 1ης δοκιμης.

$(X \mid X_1 = \text{αποτυχια}) = 0$

$(X \mid X_1 = \text{επιτυχια}) = 1 + X$

1 δοκιμη με αποτ επιτυχια — ξεκινα απο την αρχη το πειραμα

$$P_X(z) = E(z^k) \overset{\text{ΘΔΜΤ}}{=} E[E[z^k \mid X_1]] = E[z^k \mid X_1 = \text{αποτ}] \cdot P(X_1 = \text{αποτ})$$

$$+ E[z^k \mid X_1 = \text{επιτ}] \cdot P(X_1 = \text{επιτ}) = \underbrace{E[z^0]}_{1} \cdot (1-p) + \underbrace{E[z^{1+X}]}_{E[z^X \cdot z] = zE[z^X] = z P_X(z)} \cdot p =$$

Άρα $P_X(z) = 1 - p + zp\, P_X(z) \Rightarrow$

$$(1 - zp) P_X(z) = 1 - p \Rightarrow P_X(z) = \frac{1-p}{1-pz}.$$

4) $X \sim NegBin(n, p)$

πείραμα: ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθ επιτυχίας p

X = # δοκιμών Bernoulli έως τη n-οστή επιτυχία

$$f_X(k) = \binom{n+k-1}{k} p^k (1-p)^n \quad , k = 0, 1, \ldots$$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ όπου $X_i \sim Geom(p)$ $i = 1, \ldots, n$

X_i ανεξάρτητες

$$\boxed{P_X(z)} = P_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(z) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z) = P_{X_1}(z) \cdots P_{X_n}(z) = \boxed{\left(\frac{1-p}{1-pz}\right)^n}$$