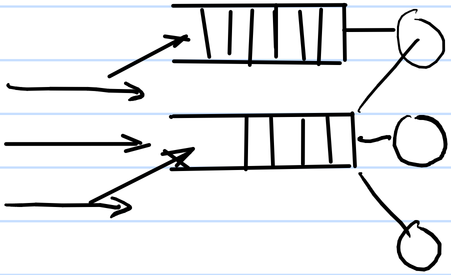
Ουρές Αναμονής

1 Νόμος Little - Διευκρινίσεις

$$E[Q] = \lambda \, E[S]$$

Μέσος αριθμός πελατών — Ρυθμός αφίξεων — Μέσος χρόνος παραμονής πελ.

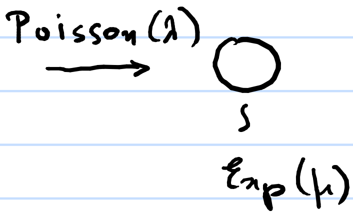


Ισχύει για κάθε "ροή" πελατών και για κάθε "υποσύστημα"

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ - ΠΡΟΣΟΧΗ!

Πρέπει τα $E[Q]$, λ, $E[S]$ να αναφέρονται στο ίδιο υποσύστ. και ροή πελατών.

Π.χ. η M/M/1/1 ουρά



1η περίπτωση:

Ροή πελατών: Αφικνούμενοι πελάτες

Σύστημα: Χώρος εξυπηρ.

$$E[Q^L] = \lambda^L \cdot E[S^L]$$

Μέσος αριθμός παρόντων πελ. (από αυτούς που έφθασαν) άσχετα αν μπήκαν ή όχι.

Ρυθμός αφίξεων ( )

Μέσος χρόνος παραμονής ( )

Στην περίπτωση αυτή: Ρυθμός αφίξεων: $\lambda^L = \lambda$

$$E[S^L] = a_0 \cdot \frac{1}{\mu} + a_1 \cdot 0$$

Άρα $E[Q] = \lambda a_0 \cdot 1/\mu = \rho a_0 \overset{PASTA}{=} \rho p_0 \Rightarrow 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_0 = \rho p_0 \Rightarrow p_1 = \rho p_0$

και $p_0 + p_1 = 1 \implies p_0 = \frac{1}{1+\rho}, \quad p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}.$

2η περίπτωση:

Ροή πελατών: Εισερχόμενοι πελάτες

Σύστημα: Χώρος εξυπηρ.

$$E[Q^L] = \lambda^L \cdot E[S^L]$$

Μέσος αριθμός παρόντων πελ. (από αυτούς που μπήκαν)

Ρυθμός αφίξεων ( )

Μέσος χρόνος παραμονής ( )

Στην περίπτωση αυτή: Ρυθμός αφίξεων: $\lambda^L = \lambda a_0$

$$E[S^L] = \frac{1}{\mu}$$

Άρα $E[Q] = \lambda a_0 \cdot 1/\mu$ κλπ.

② Ασκ. 5.1 / Φυλ. 2 (Θέμα 5 / Ιουν. 2020)

- Τροποποίηση M/M/1 ουράς
- λ : Ρυθμός αφίξεων
- μ : Ρυθμός εξυπηρ.
- Κενό σύστημα → Βέβαια είσοδος πελ.

  Όχι κενό → Είσοδος πελ. με πιθ. p
- Συνθήκη ευστάθειας;

  Κατανομή αριθμού πελατών (p_n);

  Μέσος χρόνος παραμ. αφικν. πελάτη;

  Μέσος χρόνος παραμ. εισερχ. πελάτη;

Λύση:

Καταστ.	Επομ. καταστ.	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
$n \geq 1$	$n+1$	$Exp(\lambda p)$
	$n-1$	$Exp(\mu)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda p"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda p"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda p"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

$$\frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \frac{\lambda^n p^{n-1}}{\mu^n} \qquad B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n p^{n-1}}{\mu^n}$$

$$= 1 + \frac{\lambda}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda p}{\mu}\right)^{n-1} = \begin{cases} 1 + \dfrac{\lambda}{\mu} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{\lambda p}{\mu}}, & \dfrac{\lambda p}{\mu} < 1 \\ \infty, & \dfrac{\lambda p}{\mu} \geq 1 \end{cases} \leftarrow \text{Συνθήκη ευστάθειας}$$

Υπό τη συνθ. ευστ.:

$$B^{-1} = 1 + \frac{\lambda}{\mu - \lambda p} = \frac{\mu - \lambda p + \lambda}{\mu - \lambda p} = \frac{\mu + \lambda(1-p)}{\mu - \lambda p}$$

$$p_n = \begin{cases} B, & n = 0 \\ B \dfrac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n}, & n \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\mu - \lambda p}{\mu + \lambda(1-p)}, & n = 0 \\ \dfrac{\mu - \lambda p}{\mu + \lambda(1-p)} \cdot \dfrac{\lambda^n p^{n-1}}{\mu^n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$S =$ Χρόνος παραμ. αφικν. πελ.

$$E[Q] = \lambda^{arr} E[S^{arr}] \qquad arr: \text{αφικν. πελ.}$$

$$\lambda^{arr} = \lambda, \quad E[S^{arr}] = E[S]$$

Άρα

$$E[S] = \frac{1}{\lambda} E[Q] = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\mu-\lambda p}{\mu+\lambda(1-p)} \cdot \frac{\lambda^n p^{n-1}}{\mu^n}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\mu-\lambda p}{\mu+\lambda(1-p)} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{\lambda p}{\mu}\right)^{n-1} = \frac{1}{\cancel{\lambda}} \cdot \frac{\mu-\lambda p}{\mu+\lambda(1-p)} \cdot \frac{\cancel{\lambda}}{\mu} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda p}{\mu}\right)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \ |t|<1 \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

Τελικά

$$E[S] = \frac{\mu}{(\mu+\lambda(1-p))(\mu-\lambda p)}$$

S^{enter} = Χρόνος παραμ. εισερχ. πελ.

$$E[Q] = \lambda^{enter} E[S^{enter}]$$ αφού: εισερχ. πελ.

Το $E[Q]$ δεν αλλάζει:

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{\lambda \mu}{(\mu + \lambda(1-p))(\mu - \lambda p)}$$

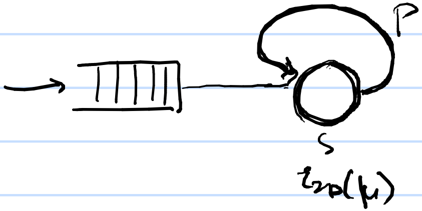
$$\lambda_{enter} = \text{πιθ. κενού συστημ.} \times \lambda + \text{πιθ. μη κενού συστ.} \times \lambda p$$

$$= p_0 \cdot \lambda + (1-p_0)\lambda p$$

$$= \frac{\mu - \lambda p}{\mu + \lambda(1-p)} \cdot \lambda + \frac{\lambda}{\mu + \lambda(1-p)} \cdot \lambda p = \frac{\lambda\mu - \cancel{\lambda^2 p} + \cancel{\lambda^2 p}}{\mu + \lambda(1-p)}$$

$$E[S^{enter}] = \frac{E[Q]}{\lambda^{enter}} = \frac{1}{\mu - \lambda p}.$$

③ Ασκ. 5.3 / Φυλ. 2 (Θέμα 4 - Σεπτ. 2019)



- M/M/1
- λ: Ρυθμός αφίξεων
- μ: Ρυθμός εξυπηρ.
- Μόλις τελειώσει μια εξυπηρ., επαναλαμβάνεται άμεσα με πιθ. p.

Κατανομή συνολικού χρόνου εξυπηρ. $F_X(t) =$;

Συνθ. ευστάθειας;

Οριακή κατην. αριθμού πελ;

Μέσος χρόνος παραμ;

Λύση:

$N = \#$ των επαναλήψεων εξυπηρ. πελάτη (μαζί με την αρχική).

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Συνολικός χρόνος εξυπηρ.}}}{X} = \sum_{i=1}^{N} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Διαδοχ. χρόνοι εξυπηρ. (για 1 επαν.)} \sim Exp(\mu)}}{X_i}$$

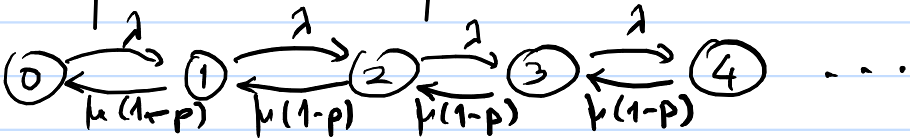
$$\Pr[N = n] = p^{n-1}(1-p), \quad n \geq 1$$

$$P_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr[N=n]\, z^n = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)\, z^n = (1-p)z \sum_{n=1}^{\infty} (pz)^{n-1}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{(1-p)z}{1-pz}. \\ \tilde{F}_{X_i}(s) &= \frac{\mu}{\mu+s} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \tilde{F}_X(s) = P_N(\tilde{F}_{X_i}(s)) = \frac{(1-p)\frac{\mu}{\mu+s}}{1-p\frac{\mu}{\mu+s}}$$

$$= \frac{\mu(1-p)}{s+\mu(1-p)} \Longrightarrow X \sim Exp(\mu(1-p))$$

Κατάστ.	Επόμ. Καταστ.	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
$n \geq 1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(\mu(1-p))$



$$\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \left(\frac{\lambda}{\mu(1-p)}\right)^n .$$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu(1-p)}\right)^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\dfrac{\lambda}{\mu(1-p)}} , & \dfrac{\lambda}{\mu(1-p)} < 1 \\ \infty , & \text{διαφορ.} \end{cases}$$

Συνθήκη Ευστάθειας

$$p_n = \begin{cases} B , & n = 0 \\ B\,\dfrac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n} , & n \geq 1 \end{cases} = \cdots = \left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-p)}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu(1-p)}\right)^n , \quad n \geq 0.$$

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{\dfrac{\lambda}{\mu(1-p)}}{1-\dfrac{\lambda}{\mu(1-p)}} = \frac{\lambda}{\mu(1-p)-\lambda}.$$

$$E[S] \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\lambda} E[Q] = \frac{1}{\mu(1-p)-\lambda}.$$

Θ. Little

④ Ασκ. 5.2 / Φυλ 2 (Θέμα 5 – Σεπτ. 2020)

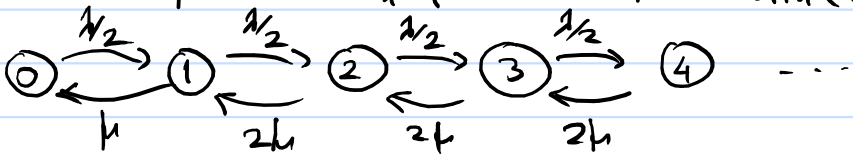
- M/M/2
- λ: Ρυθμός αφίξεων
- μ: Ρυθμός εξυπηρ.
- Πιθ. εισόδου $= 1/2$

→ Διαδικασία εισόδων Poisson με ρυθμό $\lambda/2$

Ευστάθεια; Οριακή καταν. αριθμού πελ.; Μέσος χρ παραμ. εισερχ.

Λύση:

Κατάστ.	Επόμ. κατάστ.	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda/2)$
1	2	$Exp(\lambda/2)$
	0	$Exp(\mu)$
$n \geq 2$	$n+1$	$Exp(\lambda/2)$
	$n-1$	$\min(Exp(\mu), Exp(\mu)) = Exp(2\mu)$



$$\frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \frac{(\lambda/2)^n}{\mu (2\mu)^{n-1}} = \frac{\lambda^n}{2^{2n-1}\mu^n}.$$

Συνθ. ευστ.

$$\frac{\lambda}{4\mu} < 1$$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^n = \begin{cases} 1 + \dfrac{\frac{\lambda}{4\mu}}{2\left(1 - \frac{\lambda}{4\mu}\right)} \\ \infty \end{cases}$$

διαφ.

$$P_n = \begin{cases} B & n = 0 \\ B \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$E[Q] = \underbrace{\lambda^{enter}}_{\lambda/2} \cdot E[S^{enter}]$$

$$\Rightarrow E[S^{enter}] = \frac{E[Q]}{\lambda/2} = \frac{2}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$$ (όπως και στην Ασκ. 5.1 / Φυλ. 2)