Ουρές Αναμονής

1 Βασικά εργαλεία

1| Ευστάθεια στο GI/GI/c $\iff$ $\rho = \lambda \times b < c$ # υπηρετών

ρυθμός αφίξεων, μέσος χρ. εξυπηρ.

2| Ιδιοτ. μεμονωμένων μεταβάσεων:

Μεμον. αφίξεις/αναχωρήσεις $\Rightarrow$ $a_j = d_j$, $j = 0, 1, \ldots$

πιθ. j πελ. σε άφιξη, πιθ. j πελ. σε αναχωρ.

3| Ιδιότητα PASTA

Αφίξεις Poisson $\Rightarrow$ $a_j = p_j$

πιθ. j πελ. σε άφιξη, πιθ. j πελ. σε τυχαία στιγμή = ποσοστό χρόνου που $\exists$ j πελ. στο σύστ.

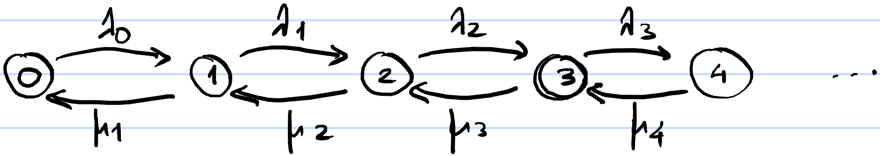
4| Νόμος του Little : $E[Q] = \lambda \times E[S]$

Μέσο # πελ. στο σύστημα — ρυθμός αφίξεων — μέσος χρ. παραμ. πελ στο σύστημα

5| Μεθοδολογία:

$Q(t)$ = # πελ. στο σύστημα

$\{Q(t)\}$ αλυσίδα Γ-Θ.



$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} < \infty \iff \text{Ευστάθεια.}$$

$$P_j = Pr[Q=j] = \begin{cases} B & \text{αν } j=0 \\ B\,\dfrac{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdots \mu_j}, & \text{αν } j \geq 1 \end{cases}$$

πιθ. j άτομα στο σύστημα

② Ασκ. 5.6 / Φυλ. 1

- Poisson διαδ. αφίξεων με ρυθμό λ
- $Exp(\mu)$ χρ. εξυπ.
- 1 υπηρ.
- ∞ χωρητικ

$\Big\}$ M/M/1 ουρά

- Εναλλαγή υπηρέτη μεταξύ περιόδων λειτουργίας & αργίας
- $Exp(\zeta)$ χρ. λειτουργίας
- $Exp(\theta)$ χρ. αργίας
- Αφίξεις πάντα / εξυπηρ. μόνο σε περιόδους λειτουργίας

$\Big\}$ M/M/1 ουρά με λειτ/αργία

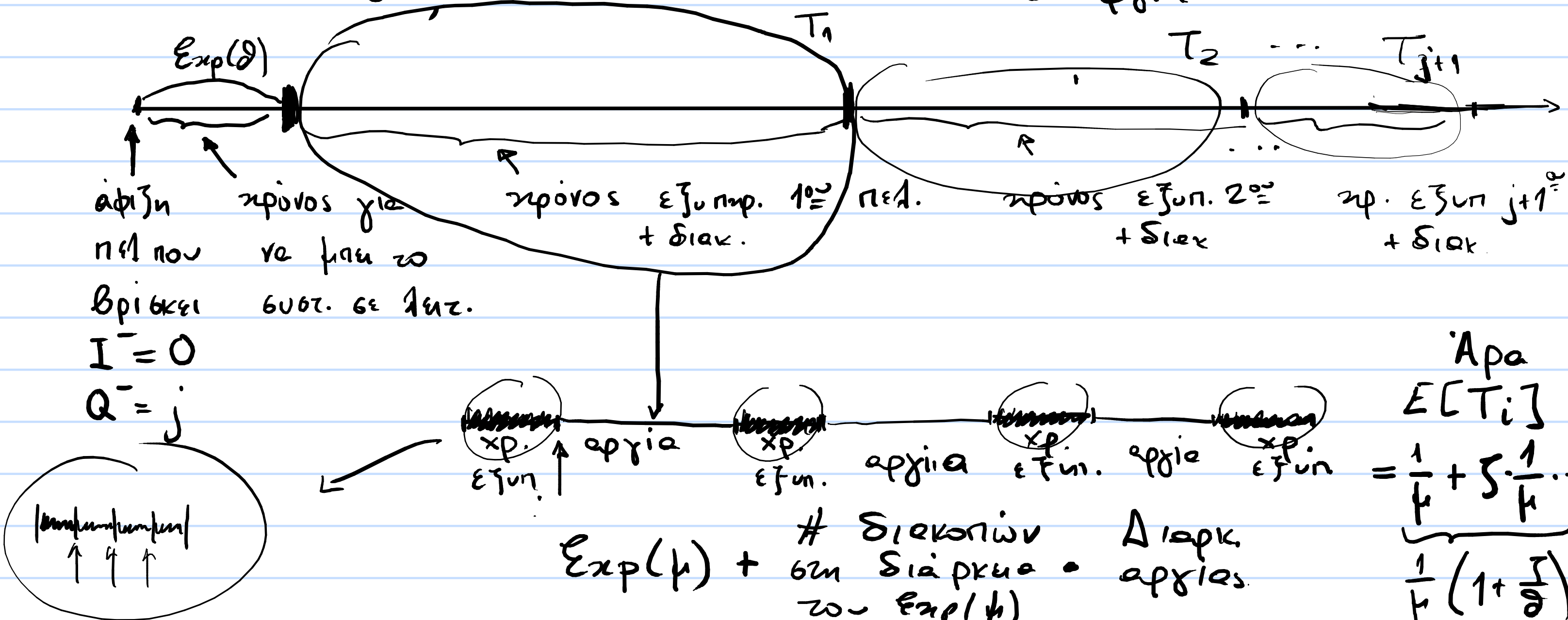
$E[Q] = ;$ $\quad E[S] = ;$

Λύση:

- Θ. Little: $E[Q] = \lambda E[S]$
- Υπολογισμός του $E[S]$ δεσμεύοντας στο # πελ που βρίσκει ένας πελ. φθάνοντας στο σύστημα, Q^-

Έστω ένας αφικνούμενος πελάτης που βρίσκει $Q^- = j$ πελ στο σύστημα.

Έστω $I^- = \begin{cases} 1, & \text{αν βρει το συστ σε λειτουργία} \\ 0 & \text{-''- σε αργία.} \end{cases}$



$Exp(\mu)$ + # διακοπών στη διάρκεια του $Exp(\mu)$ · Διαρκ. αργίας

Άρα

$$E[T_i] = \underbrace{\frac{1}{\mu} + \lambda \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{\theta}}_{\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)}$$

$$E[S \mid Q^- = j] = \frac{1}{\theta} \Pr[I^- = 0] + (j+1) \cdot \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\zeta}{\theta}\right)$$

Apo

$$E[S] = \sum_{j=0}^{\infty} \Pr[Q^- = j]\, E[S \mid Q^- = j]$$

$$= \frac{1}{\theta}\Pr[I^- = 0] + \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\zeta}{\theta}\right) \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \underbrace{\Pr[Q^- = j]}_{a_j}$$

$$a_j \underset{\text{PASTA}}{=} p_j = \Pr[Q = j]$$

$$= \frac{1}{\theta}\Pr[I^- = 0] + \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\zeta}{\theta}\right)\left(E[Q] + 1\right).$$

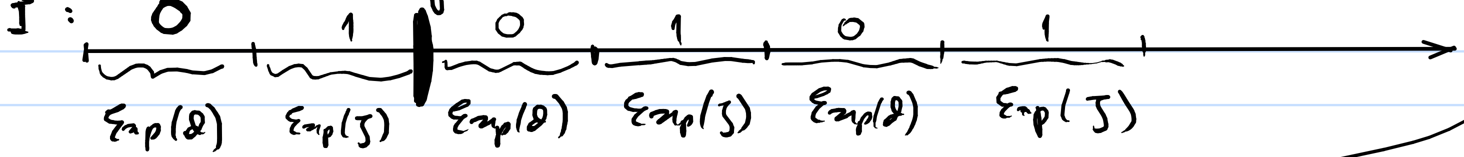
Apo:

$$E[Q] = \lambda E[S]$$

$$E[S] = \frac{1}{\theta}\Pr[I^- = 0] + \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\zeta}{\theta}\right)\left(E[Q] + 1\right)$$

$$\Pr[I^- = 0] \underset{\uparrow}{=} \Pr[I = 0] = $$ μακροπροθ. ποσοστό του χρόνου που το συστ. είναι σε αργία $\equiv$

Poisson αφίξεις (γενικ. PASTA)



$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1/\theta}{1/\theta + 1/\zeta} = \frac{\zeta}{\theta + \zeta}.$$

ρε: ΣΑΘΚ

Άρα: $E[Q] = \lambda E[S]$

$$E[S] = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\zeta}{\theta + \zeta} + \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\zeta}{\theta}\right)(E[Q] + 1)$$

Λύση $\Longrightarrow$

Έχουμε:

$$E[Q] = \lambda \cdot E[S] = \frac{\lambda}{\theta}\cdot\frac{\zeta}{\zeta+\theta} + \overset{\rho}{\frac{\lambda}{\mu}}\left(1+\frac{\zeta}{\theta}\right)\left(E[Q]+1\right)$$

$$\left(1-\frac{\rho(\theta+\zeta)}{\theta}\right)E[Q] = \frac{\lambda}{\theta}\cdot\frac{\zeta}{\zeta+\theta} + \rho\,\frac{\theta+\zeta}{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad E[Q] = \frac{\frac{\lambda}{\theta}\cdot\frac{\zeta}{\zeta+\theta} + \rho\,\frac{\theta+\zeta}{\theta}}{1-\rho\,\frac{(\theta+\zeta)}{\theta}}, \qquad E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda}.$$

Για ευστάθεια:

$$1-\rho\frac{(\theta+\zeta)}{\theta} > 0 \iff \rho < \frac{\theta}{\theta+\zeta} \iff \underbrace{\frac{\lambda}{\mu}}_{\text{ποσό εργασίας που εισέρχ. ανά χρον. μονάδα}} < \frac{\theta}{\theta+\zeta} = \underbrace{\overbrace{\frac{\frac{1}{\zeta}}{\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\zeta}}}^{\text{μακρ. ποσοστό χρόνου που λειτ. το συστ.}}}_{\text{ποσό εργ. που μπορεί να διεκπερ. ανά χρον. μον.}}$$

② Ασκ. 5.8 / φυλ 1

- M/M/1
- λ: ρυθμός αφ.
- μ: ρυθμός εξυπ.
- Κάθε πελ. στο χώρο αναμ.
  έχει χρόνο υπομονής ~ Exp(γ)
- Μοντελοπ. της {Q(t)} ως Γ-Θ
- Υπολογ. της (p_j) $p_j = Pr[Q=j]$, $j \geq 0$ όταν $\gamma = \mu$

Κατεστ.	Επομ. καταστ.	Χρόνος
0	1	Exp(λ)
$n \geq 1$	$n+1$	Exp(λ)
	$n-1$	min (Χρ. εξυπηρ. πελ σε εξυπηρ., Χρ. υπομ. 1ου πελ αναμ., Χρ. υπομ. 2ου πελ, ...) = $Exp(\mu + (n-1)\gamma)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu+\nu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu+2\nu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu+3\nu"]
\end{tikzcd}$$

Για $\nu = \mu$ έχουμε

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "3\mu"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \overset{\frac{\rho^0}{0!}}{\overset{\shortparallel}{1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \overset{\frac{\rho^n}{n!}}{\overset{\shortparallel}{\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = \underset{<\infty}{e^{\rho}}$$

Πάντα ευστάθεια.

$$P_j = \begin{cases} B & , j = 0 \\ B \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} & , j \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} e^{-\rho} & , j = 0 \\ e^{-\rho} \cdot \dfrac{\rho^j}{j!} & , j \geq 1 \end{cases} = e^{-\rho} \frac{\rho^j}{j!} \, , j \geq 0$$

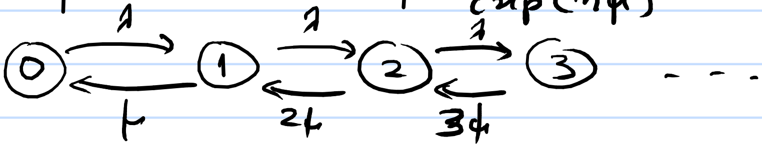
δηλ. $Q \sim \text{Poisson}(\rho)$.

③ Άσκ. 5.11 / Φυλ. 1

- $M/M/\infty$
- λ: ρυθμός αφίξεων
- μ: ρυθμός εξυπ.

Συνθ. ευστ. + (p_j). ;

Καταστ.	Επομ. καταστ.	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
$n \geq 1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	min (Χρ. εξυπ. 1, Χρ. εξυπ. 2, ..., Χρ. εξυπ. n) " $Exp(n\mu)$



· Ίδια λύση με την προηγ. με $\nu=\mu$ (Άσκ. 5.8/Φυλ. 1)