Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα: 20/4/21

Μάθημα Ασκήσεων (Δ. Poisson κ. Αναν. Θεωρία)

Λογοθέτης Δημήτρης
υποψ. διδάκτορας
dlogothetis@math.uoa.gr

Άσκηση 3.6 (Θέμα 1. Ιούνιος 2018)

$N_1(t), N_2(t)$ ανεξ. Δ. Poisson με ρυθμούς λ, μ.

$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ υπέρθεση

1. $\mathbb{P}$(το 1ο γεγονός της N_1 να είναι το n-οστό γεγονός της N)

↳ Έστω $S_k^{(i)}$ ο χρόνος του k-οστού γεγονότος της N_i, $i=1,2$.

Στο $[0,t]$ να έχουμε n γεγ. από την $N(t)$ και 1 γεγ. από την N_1

$\Longleftrightarrow$

Στο $[0,t]$ να έχουμε 1 γεγονός N_1 και $n-1$ N_2

Ζητούμε την

$$\mathbb{P}(N_2(S_1^{(1)}) = n-1) = \int_0^\infty \mathbb{P}(N_2(S_1^{(1)})=n-1 \mid S_1^{(1)}=x)\, dF_{S_1^{(1)}}(x)$$

$S_1^{(1)} \sim Exp(\lambda)$

$$= \int_0^\infty \mathbb{P}(N_2(x)=n-1)\, f_{S_1}(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \frac{\mu^{n-1}\lambda}{(\lambda+\mu)^n}\underbrace{\int_0^\infty (\lambda+\mu)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(\lambda+\mu)x}\, dx}_{Erlang(n,\lambda+\mu)}$$

$$= \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

αλλιώς

Έστω $p = \mathbb{P}$(το επόμ. γεγ. της $N(t)$ να είναι από τη $N_2(t)$)

$$= \mathbb{P}(\underbrace{S_1^{(2)} < S_1^{(1)}}) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

Έστω $\{I_i = j\} = \{$το i γεγονός είναι από την $N_j\}$, $j=1,2$

Ζητάμε την $\mathbb{P}(I_1=2, I_2=2, \ldots, I_{n-1}=2, I_n=1)$

$$= \mathbb{P}(I_1=2)^{n-1}\,\mathbb{P}(I_n=1)$$

$$= \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1} \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

---

2 Να υπολογιστεί η $\mathbb{P}(N_1(t)=1 \mid N(t)=n)$

↳ $$\mathbb{P}(N_1(t)=1 \mid N(t)=n) = \frac{\mathbb{P}(N_1(t)=1,\ N_1(t)+N_2(t)=n)}{\mathbb{P}(N(t)=n)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_1(t)=1,\ N_2(t)=n-1)}{\mathbb{P}(N(t)=n)} \overset{N_1, N_2 \text{ ανεξ}}{=} \frac{\mathbb{P}(N_1(t)=1)\,\mathbb{P}(N_2(t)=n-1)}{\mathbb{P}(N(t)=n)} \quad (1)$$

$N_1 \sim P(\lambda t)$, $N_2 \sim P(\mu t)$ $N \sim P((\lambda+\mu)t)$

$$(1) = \frac{\cancel{e^{-\lambda t}}\, \frac{\lambda t}{1} \cdot \cancel{e^{-\mu t}}\, \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}}{\cancel{e^{-(\lambda+\mu)t}}\, \frac{[(\lambda+\mu)t]^n}{n!}} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1}$$

---

3. $\mathbb{P}(N(t)=n \mid N_2(t/2)=n-1) = ;$

↳ $$\frac{\mathbb{P}(N_1(t)+N_2(t)=n,\ N_2(t/2)=n-1)}{\mathbb{P}(N_2(t/2)=n-1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_1(t) + N_2(t) - N_2(t/2) = 1,\ N_2(t/2)=n-1)}{\mathbb{P}(N_2(t/2)=n-1)} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} N_2(t) - N_2(t/2),\ N_2(t/2) & \text{ανεξ} \\ N_1(t),\ N_2(t) & \text{ανεξ} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} N_1(t) + N_2(t) - N_2(t/2) \\ N_2(t/2) \end{array} \ \text{ανεξ.}$$

$$(2) = \frac{\mathbb{P}(N_1(t) + N_2(t) - N_2(t/2) = 1)\ \cancel{\mathbb{P}(N_2(t/2)=n-1)}}{\cancel{\mathbb{P}(N_2(t/2)=n-1)}}$$

$$= \mathbb{P}(\underbrace{N_1(t) + N_2(t) - N_2(t/2)}_{\sim P((\lambda+\frac{\mu}{2})t)} = 1)$$

από το επόμενο ερώτημα

$$= \mathbb{P}(N_1(t)=1)\,\mathbb{P}(N_2(t/2)=0) + \mathbb{P}(N_1(t)=0)\,\mathbb{P}(N_2(t/2)=1)$$
$$= e^{-\lambda t}\lambda t\, e^{-\mu t/2} + e^{-\lambda t} e^{-\mu t/2}\,\mu t/2 .$$

4. Ζητούμε την κατανομή της $N(t) - N_2(t/2)$

↳ $\underbrace{N_1(t)}_{P(\lambda t)} + \underbrace{N_2(t) - N_2(t/2)}_{P(\mu t/2)}$ από θεωρία

$0 < t_1 < t_2$

$N(t_1+t_2) - N(t_1) \overset{\text{ισον.}}{=} N(t_2)$

από θεωρία (αθροισμα Poisson → Poisson)

Αρα $N_1(t) + N_2(t) - N_2(t/2) \sim P(\lambda t + \mu t/2)$

5. $\mathrm{Cov}(N_1(t), N(t)) = E[N_1(t)\overset{N_1(t)+N_2(t)}{N(t)}] - E[N_1(t)]E[N(t)]$

$$= E[N_1^2(t) + N_1(t)N_2(t)] - \lambda t(\lambda+\mu)t$$
$$= E[N_1^2(t)] + E[N_1(t)N_2(t)] - \lambda t(\lambda+\mu)t$$
$$= E[N_1^2(t)] - E[N_1(t)]^2 + E[N_1(t)]^2$$
$$+ \cancel{\lambda\mu t^2} - \lambda^2 t^2 - \cancel{\lambda\mu t^2}$$
$$= V[N(t)] + \cancel{(\lambda t)^2} - \cancel{(\lambda t)^2}$$
$$= V[N(t)] = \lambda t$$

αλλιως (με ιδιοτητες Συνδιακ.)

$$\mathrm{Cov}(N_1(t), N_1(t)+N_2(t)) = \mathrm{Cov}(N_1(t), N_1(t))$$
$$+ \cancel{\mathrm{Cov}(N_1(t), N_2(t))} \to 0 \quad N_2, N_1 \text{ ανεξ}$$
$$= V[N_1(t)] = \lambda t$$

Ασκηση 3.5 (Θέμα 1 Σεπτ 2019)

$\overset{\text{ενηλικες}}{N_1} \sim P(\lambda)$, $\lambda = 5/\text{ωρα}$ $\quad \overset{\text{παιδια}}{N_2} \sim P(\mu)$, $\mu = 25/\text{ωρα}$

$N(t) = N_1(t) + N_2(t) \sim P((\lambda+\mu)t)$

1. $E[\underbrace{N_2(1) \mid N(1)=60}_{Bin(n,p)}]$

$n=60 \quad p = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{25}{30}$

$N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \dots N_k(t)$

$N_j(t) \mid N(t) = n$

$\sim Bin(n, p_j)$

$p_j = \frac{\lambda_j}{\Sigma\lambda}$

Αρα

$E[N_2(1) \mid N(1)=60] =$

$np = 50$

2. $\mathbb{P}(N_1(1)=10 \mid N_1(2)=15, \underbrace{N_2(2)=60})$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_1(1)=10, N_1(2)=15, \cancel{N_2(2)=60})}{\mathbb{P}(N_1(2)=15, \cancel{N_2(2)=60})}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_1(1)=10, N_1(2)=15)}{\mathbb{P}(N_1(2)=15)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_1(1)=10, N_1(2)-N_1(1)=5)}{\mathbb{P}(N_1(2)=15)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_1(1)=10)\,\mathbb{P}(N_1(2)-N_1(1)=5)}{\mathbb{P}(N_1(2)=15)} = \dots$$

3. όπως στην 3.6 το 1.

$$\mathbb{P}(I_1=2, I_2=2, I_3=2, I_4=2, I_5=1) = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^4 \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

4. $\mathbb{P}(N_2(2)=100 \mid N_2(1)=70, N_1(1)=35)$ → ανεξ. της N_2

όπως το ερώτημα 2.

5. (S_k) χρονοι γεγονότων της $N(t)$, $S_k \sim Erlang(k, \lambda+\mu)$

Ζητάμε την

$$E[S_{10} \mid N(1)=29] \overset{\text{θεωρία}}{=} E[U_{10:29}] = \frac{10}{30} = 20\,min.$$

$$\boxed{k \le n: E[U_{k:n}] = \frac{kt}{n+1} \qquad E[S_k \mid N(t)=n]}$$

$$E[S_{34} \mid N(1)=29] = 1 + 5E[S_1] = 1 + \frac{5}{30} = \frac{35}{30}$$

Γενικά, για $k > n$

$$\boxed{E[S_k \mid N(t)=n] = t + (k-n)E[S_1]}$$

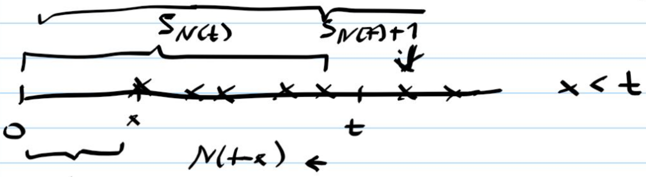
Άσκηση 2.6 (Θέμα 2 Ιούνιος 2018)

$$h(t) = E\left[\frac{S_{N(t)} + S_{N(t)+1}}{2}\right]$$

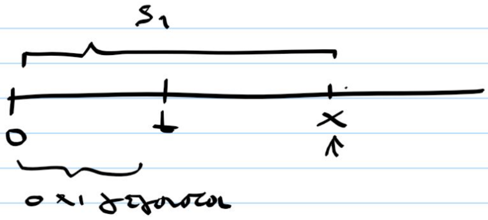
1. Αναν. εξίσωση.

2. Κλειστός τύπος για τη λύση όταν $N(t) \sim P(\lambda t)$

↳ 1. Δεσμεύουμε στο χρόνο του 1ου γεγ. Έστω $S_1 = x$



$$S_{N(t)} \mid S_1 = x = \begin{cases} 0 & x > t \\ x + S_{N(t-x)} & x \le t \end{cases}$$



$$S_{N(t)+1} \mid S_1 = x = \begin{cases} x & x > t \\ x + S_{N(t-x)+1} & x \le t \end{cases}$$

Αρα $h(t) = E[\frac{S_{N(t)} + S_{N(t)+1}}{2}] =$

$$= \int_0^t E[\frac{x + S_{N(t-x)} + x + S_{N(t-x)+1}}{2}] dF_{S_1}(x)$$

$$+ \int_t^\infty \frac{x}{2} dF_{S_1}(x) = \int_0^t x\, dF_{S_1}(x) + \int_t^\infty \frac{x}{2} dF_{S_1}(x)$$

$$+ \int_0^t \underbrace{E[\frac{S_{N(t-x)} + S_{N(t-x)+1}}{2}]}_{h(t-x)} dF_{S_1}(t)$$

$$= D(t) + \int_0^t h(t-x)\, dF_{S_1}(t)$$

με $D(t) = \int_0^t \frac{x}{2} dF_{S_1}(x) + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty x\, dF_{S_1}(x)}_{E[S_1]}$ (3)

---

2 Η λύση της Ανα. εξίσωσης (3) είναι

$$h(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dm(x)$$

οπου $D(t) = \frac{1}{2}\int_0^t x\, dF_{S_1}(x) + \frac{1}{2} E[S_1]$

και η $m(t) = E[N(t)]$

Εδω εχουμε οτι $N(t) \sim P(\lambda t)$ και αρα $S_1 \sim Exp(\lambda)$

Οποτε,

$$D(t) = \frac{1}{2} \int_0^t x \lambda e^{-\lambda x} dx + \frac{1}{2\lambda}$$

$$= \frac{1}{2} [-x e^{-\lambda x}\Big|_0^t - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^t] + \frac{1}{2\lambda}$$

$$= \frac{1}{2} [-t e^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}] + \frac{1}{2\lambda}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\lambda} - e^{-\lambda t}\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$dm(x) = \lambda dx$$
$\rightarrow \lambda x$

$$h(t) = D(t) + \lambda\int_0^t D(t-x)\,dx \underset{\substack{du=-dx \\ u_1=t \\ u_2=0}}{\overset{u=t-x}{=}} \lambda\int_0^t D(u)\,du + D(t)$$

- $$\lambda\int_0^t D(u)\,du = \lambda\int_0^t \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\lambda} - e^{-\lambda t}\left(u+\frac{1}{\lambda}\right)\right]du$$

$$= \lambda\left[\frac{1}{\lambda}t - \frac{1}{2}\int_0^t u e^{-\lambda u} - \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2}\int_0^t \lambda e^{-\lambda u}\,du\right]$$

$$= \lambda\left[\frac{1}{\lambda}t - \frac{1}{2}\left[-\frac{u e^{-\lambda u}}{\lambda}\Big|_0^t + \frac{e^{-\lambda u}}{\lambda^2}\Big|_0^t\right] - \frac{1}{2\lambda^2}(1-e^{-\lambda t})\right]$$

$$= t + \frac{1}{2}\left[t e^{-\lambda t}\right] + \frac{1}{2\lambda}(e^{-\lambda t}-1) - \frac{1}{2\lambda} + \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}$$

Αρα

$$h(t) = \cancel{\frac{1}{\lambda}} \cancel{-\frac{te^{-\lambda t}}{2}} - \cancel{\frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}}\big)\big] + t + \cancel{\frac{te^{-\lambda t}}{2}} + \cancel{\frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}}$$
$$\cancel{-\frac{1}{\lambda}} + \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda} = \underline{\underline{t + \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}}}$$

Γενικη υπενθυμιση: <u>οταν $N(t) \sim Poisson(\lambda)$</u>

$$E[S_{N(t)}] = t - \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda} \longrightarrow \text{λυση Αν.Εξ:}\ h(t) = D(t) + \lambda\int_0^t D(t-x)\,dx$$
$$D(t) = \int_0^t x\,dF_X(x)$$

$$E[S_{N(t)+k}] = E[X](m(t)+k)$$
$k \geq 1$
$$= \frac{1}{\lambda}(\lambda t + k) = t + \frac{k}{\lambda}$$

$$E[A(t)] = \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}$$

$\uparrow$

$t - S_{N(t)}$

$$E[B(t)] = \frac{1}{\lambda}$$

$\uparrow$

$S_{N(t)+1} - t$

$$E[C(t)] = \frac{1}{\lambda}(2 - e^{-\lambda t}) \longrightarrow$$ Λύση αν.εξ: $h(t) = D(t) + \lambda \int_0^t D(t-x)\,dx$

με

$$D(t) = \int_t^\infty x \, dF_X(x)$$
$$= te^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

$\|$

$S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$