Ανανεωτική Θεωρία: Ανανεωτική Εξίσωση, Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα (ΒΑΘ)

1 Βασικά θέματα

- Ανανεωτικός συλλογισμός → Ανανεωτική Εξίσωση → λύση → Οριακή λύση

  Υπολογισμός Pr ή E

  που σχετίζεται με την $N(t)$

  π.χ. $h(t) =$ $Pr[N(t)$ άρτιος$]$ ή $E[(N(t))^2]$ $\longrightarrow h(t) = d(t) + (h * F_X)(t) \longrightarrow h(t) = d(t) + (d * m_X)(t)$

  Δέσμευση στον $S_1 = X_1$

  ΒΑΘ:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(t)\,dt}{\underbrace{E[X]}_{\text{μέσος ενδιάμ. χρόνος}}},$$

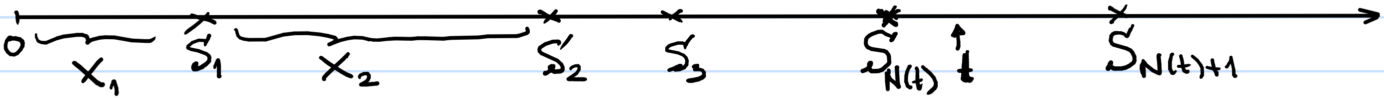
όταν X συνεχής τ.μ. $(t>0)$

$d(t) = d_1(t) - d_2(t)$, $d_1(t), d_2(t) \geq 0$, ↘, φραγμ.

και $\int_0^\infty |d(t)|\,dt < \infty$.

② Ασκ. 2.6 / Φυλ. 1

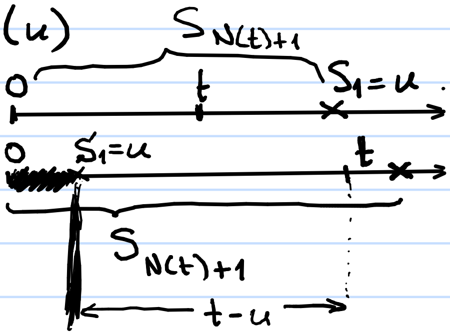
$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμ. χρ. $F_X(t)$ (συνεχής) και $E[X]=\mu$. S_n: Χρόνος του n-οστού γεγονότος.



$h(t) = E[S_{N(t)+1}]$ = Μέσος χρόνος που συμβαίνει το 1ο γεγονός μετά τη στιγμή t.

Ανανεωτικός συλλογισμός ≡ Δέσμευση στο S_1.

$$h(t) = E[S_{N(t)+1}] = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u]\, dF_X(u)$$



$$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = \begin{cases} u, & u>t \\ u + \underbrace{E[S_{N(t-u)+1}]}_{h(t-u)}, & u\le t \end{cases}$$

διότι:

Για $u \le t$: $S_{N(t)+1} \stackrel{d}{=} u + S_{N(t-u)+1}$

Άρα $h(t) = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u]\, dF_X(u)$, $E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = \begin{cases} u, & u > t \\ u + h(t-u), & u \le t. \end{cases}$

$$= \int_t^\infty u\, dF_X(u) + \int_0^t (u + h(t-u))\, dF_X(u)$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty u\, dF_X(u)}_{d(t) = E[X] = \mu} + \underbrace{\int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)}_{(h * F_X)(t)} \quad : \text{Αναν. εξισ.}$$

Λύση: $h(t) = d(t) + (d * m_X)(t) = \mu + \int_0^t \overbrace{d(t-u)}^{\mu}\, dm_X(u) = \mu + \mu \int_0^t dm_X(u)$

$$= \mu + \mu m_X(t) = \mu(1 + m_X(t)).$$

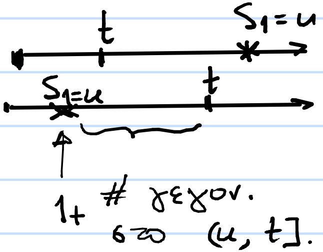
③ <u>Ασκ. 2.4 / Φυλ. 2 (Θέμα 2α – Ιούνιος 2020)</u>

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με συνεχή καταν. $F_X(t)$. Να διατυπωθεί αναν. εξισ. για την $h(t) = E[N(t)(N(t)+1)]$.

Λύση:

$$h(t) = E[N(t)(N(t)+1)] = \int_0^\infty E[N(t)(N(t)+1) \mid S_1=u]\, dF_X(u)$$

$$E[N(t)(N(t)+1) \mid S_1=u] = \begin{cases} 0 & u>t \\ E[(1+N(t-u))(2+N(t-u))] & u \le t \end{cases}$$



διότι:

$$(N(t) \mid S_1=u) \overset{d}{=} 1 + N(t-u) \quad \text{για} \quad u \le t.$$

$$h(t) = \int_0^t \underbrace{E[(1+N(t-u))(2+N(t-u))]}_{\substack{2+E[N(t-u)]+2E[N(t-u)]+E[(N(t-u))^2] \\ \underbrace{2+3E[N(t-u)]+E[(N(t-u))^2]}_{h(t-u)+2(1+E[N(t-u)])}}} dF_X(u)$$

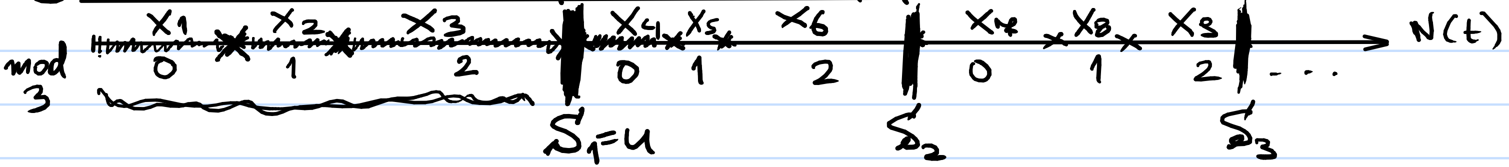
Σύνδεση με $h(t-u) = E[N(t-u)(N(t-u)+1)]$

Άρα:

$$h(t) = \underbrace{\int_0^t 2(1+\overbrace{E[N(t-u)]}^{m_X(t-u)})\, dF_X(u)}_{d(t)=2F_X(t)+2\cdot(m_X * F_X)(t)} + \underbrace{\int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)}_{(h * F_X)(t).}$$

Ανανεωτική εξίσωση.

④ Ασκ 2.7 / Φυλ. 2 (Θέμα 2 - Σεπτέμβριος 2020)



$\{N(t)\}$ ανάν. διαδ. με συνεχή σ.κ. $F_X(t)$ με $E[X]=a$.

$h(t) = \Pr[N(t)$ πολ/σιο του $3] =$; ← Ανάν. εξίσ. $\lim_{t\to\infty} h(t) =$;

Λύση:

Η "περιοδικότητα" του $\{N(t)$ πολ/σιο του $3\}$ είναι κάθε 3 γεγον. της $\{N(t)\}$. Οπότε ορίζω $\{M(t)\}$ ανάν. διαδικ με ενδιάμ. χρόνους $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ όπου

$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$ $\qquad S_1 = Y_1$

$Y_2 = X_4 + X_5 + X_6$ $\qquad S_2 = Y_1 + Y_2$

$Y_3 = X_7 + X_8 + X_9$ ... $\qquad S_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3$

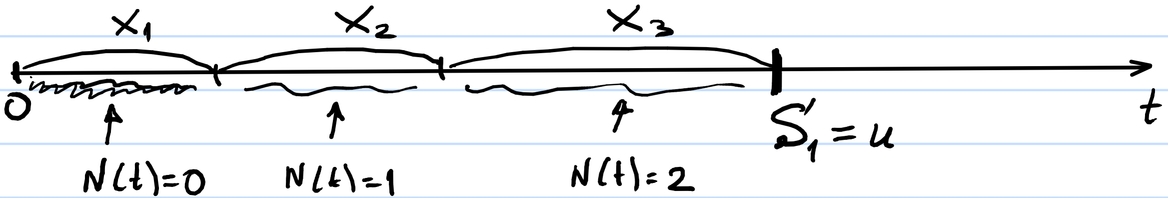
$$h(t) = \int_0^\infty \Pr[N(t) \text{ πολ/σιο του } 3 \mid S_1 = u]\, dF_Y(u)$$

$$\Pr[N(t) \text{ πολ/σιο του } 3 \mid S_1 = u] = \begin{cases} \Pr[N(t)=0 \mid S_1 = u], & u > t \\ \Pr[N(t-u) \text{ πολ/σιο του } 3] = h(t-u), & u \le t \end{cases}$$

$$h(t) = \int_0^\infty \Pr[N(t) \text{ πολ/σιο του } 3 \mid S_1 = u]\, dF_Y(u)$$

$$\Pr[N(t) \text{ πολ/σιο του } 3 \mid S_1 = u] = \begin{cases} \Pr[N(t) = 0 \mid S_1 = u], & u > t \\ \Pr[N(t-u) \text{ πολ/σιο του } 3] = h(t-u), & u \le t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \Pr[t < X_1 \mid X_1 + X_2 + X_3 = u], & u > t \\ h(t-u), & u \le t \end{cases}$$



Άρα

$$h(t) = \underbrace{\int_t^\infty \Pr[t < X_1 \mid X_1 + X_2 + X_3 = u]\, dF_Y(u)}_{d(t)} + \underbrace{\int_0^t h(t-u)\, dF_Y(u)}_{(h * F_Y)(t)}$$

$$d(t) = \underbrace{\int_t^\infty \Pr[t < X_1 \mid S_1 = u]\, dF_Y(u)}_{\Pr[t < X_1,\ S_1 \ge t] \,=\, \Pr[t < X_1,\ X_1 + X_2 + X_3 \ge t] \,=\, \overbrace{\Pr[t < X_1]}^{1 - F_X(t)}} \leftarrow *$$

* Βλ. επιπλέον εξήγηση, επόμ. σελ.

Η ανανεωτική εξίσωση είναι:

$$h(t) = \underbrace{1 - F_X(t)}_{d(t)} + \underbrace{\int_0^t h(t-u)\, dF_Y(u)}_{(h * F_Y)(t)}, \quad \text{όπου } F_Y(t) = F_X^{*3}(t)$$

διότι

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$$

* (Επιπλέον εξήγηση)

$$\int_t^{\infty} Pr[t < X_1 \mid X_1 + X_2 + X_3 = u]\, dF_Y(u) \underset{\substack{\text{αν ήταν} \\ \text{διακριτές}}}{=} \sum_{u=t}^{\infty} Pr[t < X_1 \mid X_1 + X_2 + X_3 = u]\, Pr[Y_1 = u]$$

$$= \sum_{u=t}^{\infty} Pr[t < X_1 / X_1 + X_2 + X_3 = u]\, Pr[X_1 + X_2 + X_3 = u]$$

$$= \sum_{u=t}^{\infty} \frac{Pr[t < X_1,\ X_1 + X_2 + X_3 = u]}{\cancel{Pr[X_1 + X_2 + X_3 = u]}}\, \cancel{Pr[X_1 + X_2 + X_3 = u]}$$

$$= Pr[t < X_1,\ X_1 + X_2 + X_3 \geq t] = Pr[t < X_1]$$

Έχουμε $\quad h(t) = \underbrace{1 - F_X(t)}_{d(t)} + \underbrace{\int_0^t h(t-u)\, dF_Y(u)}_{(h * F_Y)(t)}$, $\quad F_Y(t) = F_X^{*3}(t)$.

Εφαρμόζω ΒΑΘ.

1| $F_Y(t)$ συνεχής , διότι $F_Y(t) = F_X^{*3}(t)$, $F_X(t)$ συνεχής.

2| $d(t) = \underset{\substack{\| \\ 1-F_X(t)}}{d_1(t)} - \underset{\substack{\| \\ 0}}{d_2(t)}$ $\quad d_1(t), d_2(t) \geq 0$, $\searrow$, φραγμ.

3| $\int_0^\infty |d(t)|\, dt = \int_0^\infty (1 - F_X(t))\, dt = E[X] = a < \infty$

Άρα έχω

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(t)\, dt}{E[Y]} = \frac{E[X]}{E[Y]} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}.$$