Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα 25/2/2021

Δεσμευμένη μέση τιμή

① Βασικά θέματα

- Ορισμός $E[X|Y=y]$, $E[X|A]$, $E[X|Y]$.
- Θεώρημα Δέσμευσης Μέσης Τιμής, Θεωρ. Διπλής Μέσης Τιμής.

② Ασκ. 1.3/φυλ. 1

Ρίψη νομίσματος, $Pr[K]=p$, $Pr[\Gamma]=1-p$.
$X = \#$ ρίψεων έως r συνεχόμενες K. $E[X]=$;

Λύση:

Ιδέα: Βρίσκω μια άλλη τ.μ. Y που "ελέγχει" την X και χρησιμοποιώ ΘΔΜΤ: $E[X] = \sum_y Pr[Y=y]\, E[X|Y=y]$

1η ιδέα: $Y = \#$ ρίψεων έως την 1η φορά "Γ"

$$E[X] = \sum_{y=1}^{\infty} Pr[Y=y]\, E[X \mid Y=y]$$

$K \to p$

$\Gamma \to 1-p$

$$Pr[Y=y] = Pr[\underbrace{KKK\ldots}_{y-1}K\Gamma] = p^{y-1}(1-p) \quad , \quad y = 1, 2, \ldots$$

$$E[X \mid Y=y] = \begin{cases} r & , y \geq r+1 \\ y + E[X] & , y \leq r \end{cases}$$

$\underbrace{KKK\ldots K\Gamma}_{y}$

$y \geq r+1$: $\underbrace{KKK\ldots}_{r}\underset{\uparrow\, y-1}{K}\Gamma$: Η γνώση $Y = y \geq r+1$ σημαίνει ότι $X = r$

$y \leq r$: $\underbrace{KKK\ldots K}\Gamma$

Δεν έχουν εμφανιστεί οι r συνεχ. K οπότε πάλι απ' την αρχή

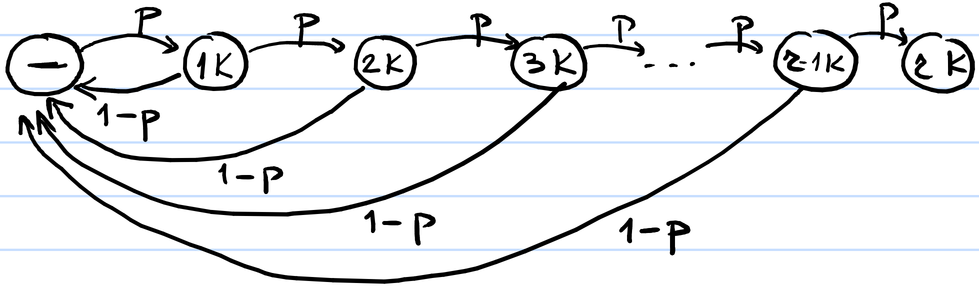
$$E[X] = \sum_{y=1}^{r} p^{y-1}(1-p)\left(y+E[X]\right) + \sum_{y=r+1}^{\infty} p^{y-1}(1-p)\, r$$

$$= (1-p)\sum_{y=1}^{r} y\, p^{y-1} + (1-p)E[X]\underbrace{\sum_{y=1}^{r} p^{y-1}}_{\underbrace{1+p+p^2+\dots+p^{r-1}}_{\frac{1-p^r}{1-p}}} + (1-p)\, r \underbrace{\sum_{y=r+1}^{\infty} p^{y-1}}_{\underbrace{p^r+p^{r+1}+p^{r+2}+\dots}_{p^r\cdot\frac{1}{1-p}}}$$

$$\sum_{y=1}^{r} p^{y} = p\cdot\frac{1-p^{r}}{1-p} \xRightarrow{d/dp} \sum_{y=1}^{r} y\, p^{y-1} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p-p^{r+1}}{1-p}\right) = \dots$$

Εξισωση για την $E[X]$ + λύση $\Rightarrow \dots$

2η ιδέα: Δέσμευση στο πόσες "Κ" έχουν μαζευτεί μέχρι να "χαλάσει" η συλλογή r συνεχόμενων "Κ"



Y = # συνεχ. "Κ" μέχρι τώρα.

Ιδέα από Στοχ. Ανάλ. (Ανάλυση 1ου βήματος)

επιπλέον ρίψεων μέχρι r συν. "Κ"

$E[X] = E[Z \mid Y=0] = ;$ Να λύσω το γενικότερο $E[Z \mid Y=y]$, $y = 0, 1, \ldots, r$

$$\overbrace{E[Z \mid Y=r]}^{m_r} = 0$$

$$\underbrace{E[Z \mid Y=y]}_{m_y} = 1 + p\,\underbrace{E[Z \mid Y=y+1]}_{m_{y+1}} + (1-p)\,\underbrace{E[Z \mid Y=0]}_{m_0}$$

$0 \le y \le r-1$

$$\left.\begin{array}{ll} m_r = 0 & \\ m_y = 1 + p\, m_{y+1} + (1-p)\, m_0 , & y = 0, 1, 2, \ldots, r-1 \end{array}\right\}\ \text{Σύστημα } (r+1) \text{ αγνώστων με } (r+1) \text{ εξισ.}$$

Άρα

$$E[X] = E[Z \mid Y=0] = m_0 = 1 + p\, m_1 + (1-p)\, m_0$$

$$= 1 + p\left(1 + p\, m_2 + (1-p)\, m_0\right) + (1-p)\, m_0$$

$$= 1 + p + p^2 m_2 + \left[p(1-p) + (1-p)\right] m_0$$

$$= 1 + p + p^2\left(1 + p\, m_3 + (1-p)\, m_0\right) + \left[p(1-p) + (1-p)\right] m_0$$

$$= 1 + p + p^2 + p^3 m_3 + \underbrace{\left[p^2(1-p) + p(1-p) + (1-p)\right]} m_0$$

$$= 1 + p + p^2 + \ldots + p^{r-1} + \cancel{p^r m_r}^{\,0}$$

$$+ \underbrace{(1-p)\cdot\left[p^{r-1} + p^{r-2} + \ldots + 1\right]} m_0$$

$$= \frac{1-p^r}{1-p} + (1-p^r)\, m_0$$

$$\Rightarrow E[X] = m_0 = \frac{1-p^r}{1-p} \cdot \frac{1}{p^r} = \left(1 + p + p^2 + \ldots + p^{r-1}\right) / p^r = \frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^{r-1}} + \ldots + \frac{1}{p}$$

3^{η} ιδέα: Y = # ρίψεων για μικρότερο αριθμό συνεχ. "Κ" ($r-1$ συνεχόμενων "Κ")

$X = Y_r$ = # ρίψεων μέχρι r συνεχ. "Κ"

$$\left.\begin{aligned} E[Y_r] &= \sum_y \Pr[Y_{r-1} = y]\, E[Y_r \mid Y_{r-1} = y] \\ E[Y_r \mid Y_{r-1} = y] &= p(y+1) + (1-p)(y+1+E[Y_r]) = (y+1) + (1-p)E[Y_r] \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[Y_r] = \sum_y \Pr[Y_{r-1} = y]\big((y+1) + (1-p)E[Y_r]\big)$$

$$\underbrace{\underbrace{\text{ΚΚΓ ΚΚΚΓ ΚΓΓ}}_{\text{Δεν πήγαν καλά}}\ \underbrace{\text{ΚΚΚΚΚ...Κ}}_{r-1}}_{y}$$

$$\Rightarrow E[Y_r] = E[Y_{r-1}] + 1 + (1-p)E[Y_r]$$

$$\Rightarrow pE[Y_r] = E[Y_{r-1}] + 1$$

$$\Rightarrow E[Y_r] = \frac{1}{p}E[Y_{r-1}] + \frac{1}{p}$$

Άρα

$$E[X] = E[Y_z] = \frac{1}{p} E[Y_{z-1}] + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} E[Y_{z-2}] + \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{1}{p^2} E[Y_{z-2}] + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} = \dots = \frac{1}{p^{z-1}} \underbrace{E[Y_1]}_{\frac{1}{p}:\ \text{Μέση τιμή γεωμετρ.}} + \frac{1}{p^{z-1}} + \frac{1}{p^{z-2}} + \dots + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{z-1}} + \dots + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{1 + p + \cdots p^{z-1}}{p^z} = \frac{(1-p^z)}{(1-p)p^z}.$$