Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα

Σημειώσεις (πρόχειρες, υπό διαμόρφωση) 2018-2019, έκδοση 3/3/2019

Αντώνης Οικονόμου

Οι σημειώσεις αυτές αναπτύσσονται στα πλαίσια των προπτυχιακών μαθημάτων "Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακη Έρευνα Ι" και "Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακη Έρευνα ΙΙ", καθώς και του μεταπτυχιακού μαθήματος "Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα" του Τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Περιέχουν λάθη και ασάφειες και βρίσκονται υπό συνεχή αναθεώρηση. Η υπόδειξη λαθών και οποιαδήποτε σύσταση για την παρουσίαση ή το περιεχόμενο τους είναι ιδιαίτερα καλοδεχούμενες.

Αντώνης Οικονόμου

Περιεχόμενα

Μέρος I

Στοχαστικές διαδικασίες με κόστη

1

Ανανεωτικές διαδικασίες με κόστη: Βασική θεωρία

1.1 Επισκόπηση των ανανεωτικών διαδικασιών

Ένα γενικό μοντέλο για τη μελέτη γεγονότων που συμβαίνουν στον χρόνο με τυχαίο τρόπο δίνουν οι λεγόμενες σημειακές διαδικασίες και οι αντίστοιχες απαριθμήτριές τους. Πιο συγκεκριμένα, αν έχουμε μια ακολουθία μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots$ μπορούμε να ορίσουμε τις τυχαίες μεταβλητες $S_0 = 0$ και $S_n = \sum_{i=1}^{n} S_n$, $n \geq 1$, για τις οποίες ισχύει $S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \ldots$. Η στοχαστική διαδικασία $\{S_n : n \geq 0\}$ αναφέρεται ως σημειακή διαδικασία με χρόνους γεγονότων S_n, $n \geq 0$, και ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων X_n, $n \geq 1$. Η απαριθμήτρια (σημειακή) διαδικασία $\{N(t) : t \geq 0\}$ της $\{S_n : n \geq 0\}$ ορίζεται από τη σχέση

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\},\ t \geq 0,$$

δηλαδή, η $N(t)$ μετράει το πλήθος των γεγονότων που έχουν συμβεί στο $(0, t]$.

Το πιο απλό μοντέλο για τη μελέτη γεγονότων που συμβαίνουν στο χρόνο, με τυχαίο τρόπο με κάποια μορφή πιθανοθεωρητικής περιοδικότητας, είναι μια ανανεωτική διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1 (Ανανεωτική διαδικασία) *Έστω $\{S_n : n \geq 0\}$ σημειακή διαδικασία με $S_0 = 0$ και $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$, όπου $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $F_X(t) = \Pr[X_i \leq t]$, που αντιστοιχούν στους ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων. Έστω, επίσης, $\{N(t)\}$ η αντίστοιχη απαριθμήτρια διαδικασία με*

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\},\ t \geq 0$$

να είναι το πλήθος των γεγονότων που έχουν συμβεί στο $(0, t]$. Η $\{N(t) : t \geq 0\}$ αναφέρεται ως (απαριθμήτρια) ανανεωτική διαδικασία που γεννάται από την ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \geq 1\}$. Η συνάρτηση $m(t) = E[N(t)]$ που δίνει το μέσο αριθμό γεγονότων στο $(0, t]$ για κάθε χρονική στιγμή t αναφέρεται ως ανανεωτική συνάρτηση.

Σε πρώτο επίπεδο, οι βασικοί υπολογισμοί που μας ενδιαφέρουν αφορούν τις κατανομές του χρόνου του n-οστού γεγονότος, S_n, και του αριθμού των γεγονότων μέχρι τη χρονική στιγμή t, $N(t)$, καθώς και την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ για σταθερά n και t. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2 (Βασικοί ανανεωτικοί υπολογισμοί σε πεπερασμένη χρονική στιγμή) *Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t) : t \geq 0\}$ με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$ και* *ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων* $X_1, X_2, \ldots$ *με κατανομή* $F_X(t) = \Pr[X_i \leq t]$. *Τότε έχουμε:*

(i) *Η συνάρτηση κατανομής του χρόνου του* k*-οστού γεγονότος είναι*

$$F_{S_k}(t) = \Pr[S_k \leq t] = F_X^{*k}(t), \quad k \geq 1, \quad t \geq 0,$$

όπου $F_X^{*k}(t) = (F_X * F_X * \cdots * F_X)(t)$ *είναι η* k*-οστή συνέλιξη της* $F_X(t)$, *με* $(G * F)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x)dF(x)$.

(ii) *Η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή* t *είναι*

$$p_k(t) = \Pr[N(t) = k] = F_X^{*k}(t) - F_X^{*(k+1)}(t), \quad k \geq 1, \quad t \geq 0,$$

με τη σύμβαση $F_X^{*0}(t) = 1$, $t \geq 0$.

(iii) *Η ανανεωτική συνάρτηση είναι*

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t), \quad t \geq 0.$$

Το (i) είναι προφανές αφού η τυχαία μεταβλητή S_k είναι το άθροισμα k ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή $F_X(t)$, και η συνέλιξη $(G*F)(t)$ δυο κατανομών $G(t)$ και $F(t)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος δυο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τις κατανομές αυτές.

Για το (ii), αρκεί να παρατηρήσουμε την ισότητα ενδεχομένων $\{N(t) = k\} = \{S_k \leq t < S_{k+1}\} = \{S_k \leq t\} \setminus \{S_{k+1} \leq t\}$, να πάρουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες και να χρησιμοποιήσουμε το (i). Πράγματι, το ενδεχόμενο να έχουν συμβεί k γεγονότα ως τη στιγμή t ισοδυναμεί με το ότι το k-οστό γεγονός συνέβει το πολύ ως και τη στιγμή t, ενώ το $(k+1)$-οστό γεγονός θα συμβεί μετά από αυτή. Οπότε,

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \Pr[N(t) = k] = \Pr[S_k \leq t < S_{k+1}] \\ &= \Pr[S_k \leq t] - \Pr[S_{k+1} \leq t] = F_X^{*k}(t) - F_X^{*(k+1)}(t). \end{aligned}$$

Τέλος, το (iii) προκύπτει παρατηρώντας ότι $N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{S_k \leq t\}}$ και χρησιμοποιώντας το (i):

$$m(t) = E[N(t)] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{S_k \leq t\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[S_k \leq t] = \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t).$$

Επειδή η συνέλιξη κατανομών είναι άβολη από υπολογιστική σκοπιά, συχνά στις εφαρμογές δουλεύουμε με τους μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjes των αντίστοιχων ποσοτήτων. Μετασχηματίζοντας τους τύπους του Θεωρήματος 2, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3 (Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes βασικών ανανεωτικών ποσοτήτων σε πεπερασμένη χρονική στιγμή) *Οι μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes των*

$F_{S_k}(t)$, $p_k(t)$ *και* $m(t)$ *δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους*

$$\tilde{F}_{S_k}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_{S_k}(t) = (\tilde{F}_X(s))^k, \quad k \geq 1,$$
$$\tilde{p}_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} dp_k(t) = (1 - \tilde{F}_X(s))(\tilde{F}_X(s))^k, \quad k \geq 0,$$
$$\tilde{m}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dm(t) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\tilde{F}_{S_k}(s) = \tilde{F}_X^{*k}(s) = (\tilde{F}_X(s))^k,$$
$$\tilde{p}_k(s) = \tilde{F}_X^{*k}(s) - \tilde{F}_X^{*(k+1)}(s) = (\tilde{F}_X(s))^k - (\tilde{F}_X(s))^{k+1} = (1 - \tilde{F}_X(s))(\tilde{F}_X(s))^k,$$
$$\tilde{m}(s) = \sum_{k=1}^\infty \tilde{F}_X^{*k}(s) = \sum_{k=1}^\infty (\tilde{F}_X(s))^k = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}.$$

Όσον αφορά την οριακή συμπεριφορά της $\{N(t)\}$, έχουμε τα αποτελέσματα που περιγράφονται παρακάτω, στα θεωρήματα 4 και 5. Το θεώρημα 4 αναφέρεται στην κατανομή του συνολικού πλήθους των ανανεώσεων μιας ανανεωτικής διαδικασίας στο διάστημα $(0, \infty)$. Το θεώρημα 5 δίνει κάποια αντίστοιχα των κλασικών αποτελεσμάτων της Θεωρίας Πιθανοτήτων, του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών και του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, στα πλαίσια της θεωρίας των ανανεωτικών διαδικασιών.

Θεώρημα 4 (Κατανομή συνολικού πλήθους ανανεώσεων) *Έστω* $N(\infty)$ *το πλήθος των ανανεώσεων της* $\{N(t)\}$ *στο* $(0, \infty)$ *και* $F_X(\infty) = \lim_{t\to\infty} F_X(t) = \Pr[X_n < \infty]$.

(i) *Αν* $F_X(\infty) = 1$, *τότε* $\Pr[N(\infty) = \infty] = 1$.

(ii) *Αν* $F_X(\infty) < 1$, *τότε* $\Pr[N(\infty) = \infty] = 0$ *και* $\Pr[N(\infty) = k] = (1 - F_X(\infty))F_X(\infty)^k$, $k \geq 0$.

Πράγματι, αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι πεπερασμένοι με πιθανότητα 1, τότε είναι βέβαιο ότι μετά από κάθε ανανέωση ακολουθεί και άλλη σε πεπερασμένο χρόνο. Επομένως, το συνολικό πλήθος των ανανεώσεων σε άπειρο χρονικό ορίζοντα είναι άπειρο με πιθανότητα 1. Αν, όμως, υπάρχει θετική πιθανότητα $1 - F_X(\infty)$ ένας ενδιάμεσος χρόνος να είναι άπειρος, τότε μετά από κάθε ανανέωση ακολουθεί και άλλη μόνο με πιθανότητα $F_X(\infty)$. Στην περίπτωση αυτή, το συνολικό πλήθος των ανανεώσεων είναι γεωμετρικά κατανεμημένο με τη συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται στο (ii).

Θεώρημα 5 (Οριακά θεωρήματα στην ανανεωτική θεωρία) *Έστω ανανεωτική διαδικασία* $\{N(t) : t \geq 0\}$, *με ενδιάμεσους χρόνους* X_k, $k \geq 1$, *με* $E[X_k] = \mu$, $Var[X_k] = \sigma^2$, $k \geq 1$, *και ανανεωτική συνάρτηση* $m(t)$. *Τότε:*

(i) *Νόμος μεγάλων αριθμών: Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό (μακροπρόθεσμη συχνότητα) ανανεώσεων έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}, \text{ με πιθανότητα } 1.$$

(ii) *Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα: Για το μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό (μακροπρόθεσμη μέση συχνότητα) ανανεώσεων έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu}.$$

(iii) *Κεντρικό οριακό θεώρημα: Αν $\mu<\infty$ και $\sigma^2\in(0,\infty)$, έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty}\Pr\left(\frac{N(t)-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}}\le x\right)=\Phi(x),\ x\in\mathbb{R},$$

όπου $\Phi(x)$ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής.

Μια θεμελιώδης τεχνική για τη μελέτη των ανανεωτικών διαδικασιών και των εφαρμογών τους είναι ο ανανεωτικός συλλογισμός. Συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $h(t)$ που αναφέρεται στην εξέλιξη της ανανεωτικής διαδικασίας στο $(0,t]$ (π.χ., η $h(t)$ μπορεί να είναι κάποια πιθανότητα ή μέση τιμή που εξαρτάται από το t, όπως η ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ ή ο μέσος χρόνος $E[S_{N(t)+1}-t]$ που απαιτείται για το επόμενο ανανεωτικό γεγονός τη στιγμή t). Ο ανανεωτικός συλλογισμός συνίσταται στη δέσμευση στον χρόνο $S_1=u$ του πρώτου ανανεωτικού γεγονότος για τον υπολογισμό της ποσότητας. Αυτή η τεχνική οδηγεί σε ολοκληρωτικές εξισώσεις συγκεκριμένου τύπου για την $h(t)$ που αναφέρονται ως ανανεωτικές εξισώσεις. Για να γίνει κατανοητή η τεχνική δίνουμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 6 (Η ανανεωτική εξίσωση για την ανανεωτική συνάρτηση) Έστω $h(t)=m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$. Έστω S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της $\{N(t)\}$ και $F_X(t)$ η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t)\}$. Δεσμεύοντας στον S_1, έχουμε

$$h(t)=m(t)=\int_0^\infty E[N(t)|S_1=u]dF_X(u). \tag{1.1}$$

Όμως, όταν $u\le t$, τότε η δεσμευμένη κατανομή της $N(t)$, δεδομένου του ενδεχομένου $\{S_1=u\}$ είναι η ίδια με την κατανομή της $1+N(t-u)$. Συμβολικά γράφουμε $(N(t)|S_1=u)\overset{d}{=}1+N(t-u)$, για $u\le t$, ώστε να δηλώσουμε την ισότητα κατά κατανομή (το d πάνω από την ισότητα παραπέμπει στη λέξη distribution). Επομένως, έχουμε

$$E[N(t)|S_1=u]=\begin{cases}0, & \text{αν } t<u,\\ 1+E[N(t-u], & \text{αν } t\ge u,\end{cases}$$

Αντικαθιστώντας στη (1.1), παίρνουμε

$$\begin{aligned}h(t)&=\int_0^t dF_X(u)+\int_0^t h(t-u)dF_X(u)\\ &=F_X(t)+\int_0^t h(t-u)dF_X(u).\end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

όπου η $h(t)$ είναι η υπό μελέτη (άγνωστη) ποσότητα, ενώ η $d(t)$ είναι μια γνωστή συνάρτηση και η $F_X(t)$ είναι η συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων της υποκείμενης ανανεωτικής διαδικασίας. Τέτοιες (ολοκληρωτικές) εξισώσεις αναφέρονται ως ανανεωτικές εξισώσεις.

Στην προκειμένη περίπτωση, έχουμε $d(t) = F_X(t)$, αλλά στη γενική περίπτωση μιας ανανεωτικής εξίσωσης η $d(t)$ δεν είναι κατ΄ ανάγκη κάποια συνάρτηση κατανομής, αλλά μια γνωστή συνάρτηση που έχει υπολογιστεί.

Παράδειγμα 7 (Η ανανεωτική εξίσωση για το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης) Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία και $h(t) = E[S_{N(t)+1} - t]$ ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t, δηλαδή ο μέσος χρόνος που απαιτείται για το επόμενο ανανεωτικό γεγονός τη στιγμή t. Έστω S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της $\{N(t)\}$ και $F_X(t)$ η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t)\}$. Δεσμεύοντας στον S_1, έχουμε

$$h(t) = E[S_{N(t)+1} - t] = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} - t | S_1 = u] dF_X(u). \tag{1.2}$$

Όμως, όταν $u \le t$, η δεσμευμένη κατανομή του $S_{N(t)+1} - t$ δεδομένου του ενδεχομένου $\{S_1 = u\}$ είναι η ίδια με την κατανομή του $S_{N(t-u)+1} - (t-u)$. Δηλαδή, έχουμε $(S_{N(t)+1} - t | S_1 = u) \stackrel{d}{=} S_{N(t-u)+1} - (t-u)$, για $u \le t$. Αυτό συμβαίνει, διότι κάθε φορά που συμβαίνει ένα ανανεωτικό γεγονός, ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης επανεκκινεί. Με άλλα λόγια, μετά από ένα ανανεωτικό γεγονός, ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης έχει την ίδια συμπεριφορά, σαν όλα να ξεκινούν από την αρχή. Επομένως, έχουμε

$$E[S_{N(t)+1} - t | S_1 = u] = \begin{cases} u - t, & \text{αν } t < u, \\ E[S_{N(t-u)+1} - (t-u)], & \text{αν } t \ge u, \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας στην (1.2), παίρνουμε

$$h(t) = \int_t^\infty (u-t) dF_X(u) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u).$$

Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

είναι, δηλαδή, μια ανανεωτική εξίσωση (με την έννοια που είπαμε στο προηγούμενο παράδειγμα). Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_t^\infty (u-t) dF_X(u) = \int_t^\infty \int_t^u dy dF_X(u) \\ &= \int_t^\infty \int_y^\infty dF_X(u) dy = \int_t^\infty (1 - F_X(y)) dy. \end{aligned}$$

Τα δυο αυτά παραδείγματα δείχνουν πώς η τεχνική του ανανεωτικού συλλογισμού οδηγεί σε ανανεωτικές εξισώσεις. Υπάρχουν βέβαια ανανεωτικές εξισώσεις για πολλές συναρτήσεις $h(t)$ που συνδέονται με την εξέλιξη μιας ανανεωτικής διαδικασίας. Έχοντας τώρα μια εξίσωση για μια τέτοια συνάρτηση, μας ενδιαφέρει η λύση της, δηλαδή η εύρεση κάποιου τύπου για την $h(t)$, καθώς και η οριακή συμπεριφορά της λύσης για $t \to \infty$.

Όσον αφορά τη λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8 (Λύση ανανεωτικής εξίσωσης) *Έστω η ανανεωτική εξίσωση*

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t), \quad t \geq 0.$$

Η ανανεωτική εξίσωση έχει μοναδική λύση, που δίνεται από τον τύπο

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)dm_X(u) = d(t) + (d * m_X)(t),$$

όπου $m_X(t)$ είναι η ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων γεγονότων $F_X(t)$.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος στη γενική περίπτωση έχει κάποια τεχνικά σημεία, αλλά σε τυπικό επίπεδο μπορεί να γίνει πολύ εύκολα μετασχηματίζοντας την ανανεωτική εξίσωση, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes. Πράγματι, αν συμβολίσουμε με $\tilde{h}(s)$, $\tilde{d}(s)$ και $\tilde{F}_X(s)$ τους μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjes των $h(t)$, $d(t)$ και $F_X(t)$, αντίστοιχα, έχουμε

$$\begin{aligned} & h(t) = d(t) + (h * F_X)(t) \\ \Rightarrow\ & \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{h}(s)\tilde{F}_X(s) \\ \Rightarrow\ & \tilde{h}(s) = \frac{\tilde{d}(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} \\ \Rightarrow\ & \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s)\frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}. \end{aligned}$$

Όμως, από το θεώρημα 3, ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της ανανεωτικής συνάρτησης είναι $\tilde{m}_X(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}$, οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s)\tilde{m}_X(s) \\ \Rightarrow\ & h(t) = d(t) + (d * m_X)(t). \end{aligned}$$

Η ανανεωτική εξίσωση και η λύση της έχουν επίσης την εξής "φυσική" ερμηνεία: Έστω ότι κάθε γεγονός επάγει μια επίδραση, την οποίας η ένταση είναι $d(t)$, t χρονικές μονάδες μετά την εκδήλωσή του και έστω $h(t)$ η ένταση της συνολικής επίδρασης από όλα τα γεγονότα μέχρι τη χρονική στιγμή t. Θεωρούμε, επίσης, ότι τη χρονική στιγμή 0 έχει συμβεί γεγονός (το γεγονόσ-0), του οποίου η επίδραση λαμβάνεται υπόψη στην $h(t)$. Τότε, ο ανανεωτικός συλλογισμός δίνει για την $h(t)$

την ανανεωτική εξίσωση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u),$$

η οποία εκφράζει ότι η ένταση της συνολικής επίδρασης τη στιγμή t ισούται με την ένταση της επίδρασης του αρχικού γεγονότος της στιγμής 0 συν την ένταση της συνολικής επίδρασης των υπόλοιπων γεγονότων. Όμως, η $h(t)$ μπορεί να μετρηθεί εναλλακτικά, προσθέτοντας τις εντάσεις των γεγονότων, δεσμεύοντας στις στιγμές που συνέβησαν. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} h(t) &= d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d(t-u)dF_{S_k}(u) = d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d(t-u)dF_X^{*k}(u) \\ &= d(t) + \int_0^t d(t-u)dm_X(u). \end{aligned}$$

Όπως είπαμε, συχνά μας ενδιαφέρει το $\lim_{t\to\infty} h(t)$, όπου $h(t)$ είναι η λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης. Το όριο αυτό υπάρχει κάτω από κάποιες συνθήκες κανονικότητας και υπολογίζεται με έναν σχετικά εύκολο τρόπο. Το σχετικό θεώρημα αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως βασικό ανανεωτικό θεώρημα (key renewal theorem). Η διατύπωσή του εξαρτάται από μια ιδιότητα της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων (περιοδικότητα - απεριοδικότητα). Συγκεκριμένα, δίνουμε για την ιδιότητα αυτή τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 9 (Περιοδική μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή) *Μια μη-αρνητική, γνήσια τυχαία μεταβλητή X (δηλαδή $\Pr[0 \leq X < \infty] = 1$) λέγεται περιοδική, αν υπάρχει $p > 0$ ώστε $\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = kp] = 1$. Ο μεγαλύτερος αριθμός p με αυτή την ιδιότητα αναφέρεται ως περίοδος της X. Αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός p, η X λέγεται απεριοδική. Για την αντίστοιχη κατανομή της τυχαίας μεταβλητής χρησιμοποιούμε τους ίδιους όρους (περιοδική - απεριοδική).*

Οι συνεχείς και οι μικτές κατανομές (αυτές, δηλαδή, που έχουν κάποιο συνεχές και κάποιο διακριτό μέρος) είναι απεριοδικές. Από τις διακριτές κατανομές, κάποιες είναι περιοδικές και κάποιες όχι. Π.χ., οι κλασικές διακριτές κατανομές, όπως η διωνυμική, η γεωμετρική, η Poisson κλπ. είναι περιοδικές και μάλιστα με περίοδο 1. Από την άλλη μεριά, μια διακριτή που παίρνει με θετική πιθανότητα μόνο τις τιμές 1 και $\sqrt{2}$ είναι απεριοδική. Μια διακριτή που παίρνει με θετική πιθανότητα όλες τις τιμές $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$, είναι επίσης απεριοδική.

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το βασικό ανανεωτικό θεώρημα.

Θεώρημα 10 (Βασικό ανανεωτικό θεώρημα) *Έστω $h(t)$ η μοναδική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης*

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t), \quad t \geq 0.$$

Έστω, επίσης, ότι η $d(t)$ γράφεται ως διαφορά δυο μη-αρνητικών, φραγμένων, φθινουσών συναρτήσεων και $\int_0^{\infty} |d(u)|du < \infty$. Τότε

(i) *Αν η $F_X(t)$ είναι απεριοδική με μέση τιμή $\mu > 0$,*

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(u)du}{\mu}.$$

(ii) *Αν η $F_X(t)$ είναι περιοδική με περίοδο p και μέση τιμή $\mu > 0$,*

$$\lim_{t\to\infty} h(tp+x) = \frac{p\sum_{t=0}^{\infty} d(tp+x)}{\mu}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η απόδειξη του βασικού ανανεωτικού θεωρήματος είναι ιδιαίτερα τεχνική. Όμως, είναι σχετικά εύκολο να δούμε γιατί ένα τέτοιο αποτέλεσμα είναι εύλογο να ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι η $F_X(t)$ είναι απεριοδική. Η $h(t)$, ως λύση της ανανεωτικής εξίσωσης, δίνεται από τη σχέση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)dm_X(u).$$

Έχουμε άμεσα ότι $\lim_{t\to\infty} d(t) = 0$, αφού $\int_0^\infty d(u)du < \infty$, και επομένως

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t d(t-u)dm_X(u).$$

Επιλέγοντας ένα $\epsilon \in (0,t)$, το παραπάνω ολοκλήρωμα σπάει σε δυο κομμάτια $\int_0^\epsilon d(t-u)dm_X(u)$ και $\int_\epsilon^t d(t-u)dm_X(u)$. Η τεχνική απόδειξη επιλέγει το ϵ κατάλληλα ώστε το $\int_0^\epsilon d(t-u)dm_X(u)$ να τείνει στο 0, καθώς $t \to \infty$. Πράγματι, αυτό είναι εύλογο, αφού για μικρά u (στο $[0,\epsilon]$) το $d(t-u)$ θα είναι κοντά στο 0, αφού $\lim_{t\to\infty} d(t) = 0$. Επίσης για μεγάλα u (στο (ϵ,t)) η $m_X(u) \simeq \frac{u}{\mu}$, από το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα (θεώρημα 5(ii)), οπότε

$$\int_\epsilon^t d(t-u)dm_X(u) \simeq \frac{1}{\mu}\int_\epsilon^t d(t-u)du = \frac{1}{\mu}\int_0^{t-\epsilon} d(y)dy \to \frac{\int_0^\infty d(y)dy}{\mu},$$

καθώς $t \to \infty$.

Ως παράδειγμα εφαρμογής του βασικού ανανεωτικού θεωρήματος, συνεχίζουμε το παράδειγμα 7.

Παράδειγμα 11 (Οριακός μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης) Θεωρούμε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, με απεριοδικούς ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων. Ένας ενδιάμεσος χρόνος γεγονότων X έχει κατανομή $F_X(t)$, με μέση τιμή $\mu \in (0,\infty)$ και διασπορά $\sigma^2 \in (0,\infty)$. Όπως είδαμε στο παράδειγμα 7, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t, $h(t)$, ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$h(t) = d(t) + (h * F_X)(t), \quad t \geq 0,$$

με

$$d(t) = \int_t^\infty (1 - F_X(y))dy, \quad t \geq 0.$$

Η $d(t)$ είναι μη-αρνητική και φθίνουσα αφού $1 - F_X(y) \geq 0$, $y \geq 0$. Επίσης, είναι φραγμένη αφού $d(t) \leq \int_0^\infty (1 - F_X(y))dy = \mu < \infty$, $t \geq 0$. Τέλος, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |d(u)|du &= \int_0^\infty d(u)du \\
&= \int_0^\infty \int_u^\infty (1 - F_X(y))dydu \\
&= \int_0^\infty \int_u^\infty \int_y^\infty dF_X(x)dydu \\
&= \int_0^\infty \int_0^x \int_0^y dudydF_X(x) \\
&= \int_0^\infty \int_0^x ydydF_X(x) \\
&= \int_0^\infty \frac{x^2}{2} dF_X(x) \\
&= \frac{E[X^2]}{2} = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2} < \infty.
\end{aligned}$$

Επομένως το βασικό ανανεωτικό θεώρημα είναι εφαρμόσιμο και έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} h(t) &= \frac{\int_0^\infty d(u)du}{\mu} \\
&= \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu}. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό λέει ότι αν αφήσουμε να περάσει αρκετός χρόνος ώστε το σύστημα να βρεθεί σε κάποια κατάσταση " ισορροπίας ", οπότε έχει χαθεί η αρχική επίδραση της ύπαρξης γεγονότος τη στιγμή 0, ο αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος για το επόμενο γεγονός είναι $\frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}$, δηλαδή μεγαλύτερος από μισό αναμενόμενο ενδιάμεσο χρόνο. Αυτό μοιάζει καταρχήν παράδοξο και μάλιστα αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως ανανεωτικό παράδοξο. Την κατάσταση αυτή θα τη συζητήσουμε εκτενώς στην παράγραφο 2.5.

1.2 Επισκόπηση της διαδικασίας Poisson

Η στοχαστική διαδικασία Poisson είναι η ειδική περίπτωση ανανεωτικής διαδικασίας, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων έχουν την εκθετική κατανομή. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 12 (Ανανεωτικός ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας Poisson) *Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με την Exp(λ) κατανομή, με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, που αντιστοιχούν στους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ γεγονότων, και $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ο χρόνος του n-οστού γεγονότος για $n \geq 1$ και $S_0 = 0$. Η ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με*

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\},\ t \geq 0,$$

που καταγράφει το πλήθος των γεγονότων στο $(0, t]$ λέγεται στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ.

Οι εκθετικοί ενδιάμεσοι χρόνοι της στοχαστικής διαδικασίας Poisson επιτρέπουν κλειστές μορφές για τις βασικές ποσότητες σε πεπερασμένη χρονική στιγμή. Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας το θεώρημα 2, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 13 (Βασικοί υπολογισμοί στοχαστικής διαδικασίας Poisson σε πεπερασμένη χρονική στιγμή) *Έστω διαδικασία Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$ με χρόνους $S_1, S_2, \ldots$ και ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων $X_1, X_2, \ldots$ με εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Τότε έχουμε:*

(i) *Η κατανομή του S_k είναι Erlang(k, λ), δηλαδή η συνάρτηση κατανομής είναι*

$$F_{S_k}(t) = \Pr[S_k \leq t] = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!},\ t \geq 0,\ k \geq 0,$$

και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$f_{S_k}(t) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t},\ t \geq 0,\ k \geq 0.$$

(ii) *Η κατανομή της $N(t)$ είναι Poisson με παράμετρο λt, οπότε*

$$p_k(t) = \Pr[N(t) = k] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!},\ t \geq 0,\ k \geq 0.$$

(iii) *Η ανανεωτική συνάρτηση δίνεται ως*

$$m(t) = E[N(t)] = \lambda t.$$

Η στοχαστική διαδικασία Poisson μπορεί να οριστεί εναλλακτικά με δυο ακόμη τρόπους:

Ορισμός 14 (Ολικός ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας Poisson) *Μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t)\}$ λέγεται στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ αν*

(i) *έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή για κάθε $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές $N(t_1)$, $N(t_2) - N(t_1)$, ..., $N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες,*

(ii) *έχει ομογενείς προσαυξήσεις, δηλαδή για κάθε $t, s > 0$, η κατανομή της $N(t + s) - N(s)$ δεν εξαρτάται από το s,*

(iii) *η κατανομή της $N(t)$ είναι Poisson με παράμετρο λt, δηλαδή*

$$\Pr[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},\ n \geq 0.$$

Ορισμός 15 (Τοπικός ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας Poisson) *Μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t)\}$ λέγεται στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ αν*

(i) *έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή για κάθε $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές $N(t_1)$, $N(t_2) - N(t_1)$, ..., $N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες,*

(ii) *έχει ομογενείς προσαυξήσεις, δηλαδή για κάθε $t, s > 0$, η κατανομή της $N(t+s) - N(s)$ δεν εξαρτάται από το s,*

(iii) *Ισχύει*

$$\Pr[N(h) = n] = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h), & \text{αν } n = 0, \\ \lambda h + o(h), & \text{αν } n = 1, \\ o(h), & \text{αν } n \geq 2, \end{cases}$$

για $h \to 0^+$ (όπου $o(h)$ είναι μια συνάρτηση του h με $\lim_{h\to\, 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$).

Η απόδειξη της ισοδυναμίας των τριών ορισμών είναι κάπως μακροσκελής, οπότε περιοριζόμαστε στο να δώσουμε μόνο το γενικό της περίγραμμα.

Από τον ανανεωτικό ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας Poisson είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε χρονική στιγμή s, η $\{N(u) : 0 \leq u \leq s\}$ και η $\{N_s(u) = N(s+u) - N(s) : u \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητες και επιπλέον η διαδικασία $\{N_s(u) : u \geq 0\}$ είναι στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, όμοια με την αρχική. Δηλαδή, δοθείσης μιας χρονικής στιγμής, το μέλλον της διαδικασίας (που αντιστοιχεί στην $\{N_s(u) : u \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητο από το παρελθόν της (που αντιστοιχεί στην $\{N(u) : 0 \leq u \leq s\}$) και επιπλέον οποιαδήποτε χρονική στιγμή η διαδικασία είναι σαν να ξεκινάει από την αρχή. Πραγματικά, η $\{N(u) : 0 \leq u \leq s\}$ καθορίζεται πλήρως από τους ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \ldots, X_k$ της αρχικής διαδικασίας και το ενδεχόμενο $\{X_{k+1} > s - X_1 - X_2 - \cdots - X_k\}$, για κάποιο k (οπότε ισχύει $N(s) = k$). Η $\{N_s(u) : u \geq 0\}$ καθορίζεται από τον υπολειπόμενο χρόνο για το πρώτο γεγονός που είναι ο $X_{k+1} - (s - X_1 - X_2 - \cdots - X_k)$ και τους ενδιάμεσους χρόνους $X_{k+2}, X_{k+3}, \ldots$ της αρχικής διαδικασίας. Λόγω της ανεξαρτησίας των ενδιάμεσων χρόνων της αρχικής διαδικασίας και της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής που εξασφαλίζει ότι η κατανομή του $X_{k+1} - (s - X_1 - X_2 - \cdots - X_k)$, δεδομένου ότι $\{X_{k+1} > s - X_1 - X_2 - \cdots - X_k\}$, είναι $\mathrm{Exp}(\lambda)$ και ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots, X_k$ και του ενδεχομένου $\{X_{k+1} > s - X_1 - X_2 - \cdots - X_k\}$ έχουμε τη ζητούμενη ανεξαρτησία. Επιπλέον, έχουμε ότι η $\{N_s(u) : u \geq 0\}$ έχει ανεξάρτητους και ισόνομους ενδιάμεσους χρόνους με την $\mathrm{Exp}(\lambda)$ κατανομή. Επομένως, έχουμε και ότι ισχύουν οι ιδιότητες (i) και (ii) του ολικού ορισμού της διαδικασίας Poisson, ενώ η ιδιότητα (iii) ισχύει από το θεώρημα 13(ii). Επομένως, ο ανανεωτικός ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας Poisson συνεπάγεται τον ολικό ορισμό.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\{N(t)\}$ ικανοποιεί τον ολικό ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας Poisson και έστω $X_1, X_2, \ldots$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων της $\{N(t)\}$. Θα δικαιολογήσουμε ότι η $\{N(t)\}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες του ανανεωτικού ορισμού της στοχαστικής διαδικασίας Poisson. Έχουμε

$$\Pr[X_1 > t] = \Pr[N(t) = 0] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

που είναι η συνάρτηση επιβίωσης της $\mathrm{Exp}(\lambda)$ κατανομής. Επομένως, η X_1 έχει την

$\mathrm{Exp}(\lambda)$ κατανομή. Επίσης, για τη δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης της X_{k+1}, δοθέντος ότι $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, $\ldots$ $X_k = x_k$, έχουμε

$$\begin{aligned} &\Pr[X_{k+1} > t | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k] \\ &= \Pr[0 \text{ γεγονότα στο } (x_1 + \cdots + x_k, x_1 + \cdots + x_k + t]] \\ &= \Pr[N(t) = 0] \\ &= e^{-\lambda t}, t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Πράγματι, η ισχύς της πρώτης ισότητας γίνεται φανερή μεταφράζοντας τα ενδεχόμενα που αφορούν τις $X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}$ με όρους της $\{N(t)\}$: Το ενδεχόμενο $\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k\}$ δίνει την ιστορία της $\{N(t)\}$ στο διάστημα $[0, x_1 + x_2 + \cdots + x_k]$. Είναι $N(t) = 0$ για $t \in [0, x_1)$, $N(t) = 1$ για $t \in [x_1, x_1 + x_2)$ κ.ο.κ. Το ενδεχόμενο $\{X_{k+1} > t\}$ είναι ισοδύναμο με το $\{0$ γεγονότα στο $(x_1 + \cdots + x_k, x_1 + \cdots + x_k + t]\}$, υπό τη δέσμευση. Οπότε, από τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις της $\{N(t)\}$ (ιδιότητα (i) του ολικού ορισμού) η ιστορία της $\{N(t)\}$ στο διάστημα $[0, x_1 + x_2 + \cdots + x_k]$ είναι ανεξάρτητη από το ενδεχόμενο $\{0$ γεγονότα στο $(x_1 + \cdots + x_k, x_1 + \cdots + x_k + t]\}$ και έχουμε την πρώτη ισότητα. Η δεύτερη ισότητα έπεται άμεσα από την ιδιότητα ομογενών προσαυξήσεων της $\{N(t)\}$ (ιδιότητα (ii) του ολικού ορισμού). Τέλος, η τρίτη ισότητα έπεται από το ότι η $N(t)$ έχει την κατανομή $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ (ιδιότητα (iii) του ολικού ορισμού). Επομένως, η (1.4) δείχνει ότι η X_{k+1} έχει την $\mathrm{Exp}(\lambda)$ κατανομή και είναι ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Θα αιτιολογήσουμε, τώρα, την ισοδυναμία του ολικού και του τοπικού ορισμού της στοχαστικής διαδικασίας Poisson. Δεδομένου ότι οι ιδιότητες (i) και (ii) είναι κοινές σε αυτούς τους δυό ορισμούς, επικεντρωνόμαστε στην ιδιότητα (iii).

Έστω, ότι η $\{N(t)\}$ ικανοποιεί τον ολικό ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας Poisson. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \Pr[N(h) = 0] &= e^{-\lambda h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^k}{k!} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \to 0^+, \\ \Pr[N(h) = 1] &= e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^1}{1!} = (1 - \lambda h + o(h))\lambda h = \lambda h + o(h), \quad h \to 0^+, \\ \Pr[N(h) = n] &= e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^n}{n!} = o(h), \quad h \to 0^+, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

που δείχνουν ότι η $\{N(t)\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (iii) του τοπικού ορισμού της στοχαστικής διαδικασίας Poisson. Επομένως ο ολικός ορισμός της διαδικασίας Poisson συνεπάγεται τον τοπικό ορισμό.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\{N(t)\}$ ικανοποιεί τον τοπικό ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας Poisson. Τότε, εξετάζοντας την εξέλιξη της $\{N(t)\}$ στο $[0, t + h]$, δεσμεύοντας στην $N(t)$, μπορούμε να πάρουμε κάποιες διαφορικές εξισώσεις για την $p_n(t) = \Pr[N(t) = n]$. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$p_0(t + h) = p_0(t) p_0(h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h)), \quad h \to 0^+,$$

οπότε

$$\frac{p_0(t + h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h}, \quad h \to 0^+.$$

Παίρνοντας $h \to 0^+$ έχουμε

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t), \quad t \geq 0,$$

η οποία μαζί με την αρχική συνθήκη $p_0(0) = 1$ δίνει

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \tag{1.5}$$

Ομοίως, για $n \geq 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= p_n(t)p_0(h) + p_{n-1}(t)p_1(h) + \sum_{k=2}^{n} p_{n-k}(t)p_k(h) \\ &= p_n(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_{n-1}(t)(\lambda h + o(h)) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n} p_{n-k}(t)o(h) \\ &= p_n(t)(1 - \lambda h) + p_{n-1}(t)\lambda h + o(h), \quad h \to 0^+, \end{aligned}$$

οπότε

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}, \quad h \to 0^+.$$

Παίρνοντας $h \to 0^+$ έχουμε

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad t \geq 0.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} & p_n'(t) + \lambda p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) \\ \Rightarrow\ & e^{\lambda t} p_n'(t) + \lambda e^{\lambda t} p_n(t) = \lambda e^{\lambda t} \lambda p_{n-1}(t) \\ \Rightarrow\ & \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} p_n(t)\right) = \lambda e^{\lambda t} \lambda p_{n-1}(t) \\ \Rightarrow\ & e^{\lambda t} p_n(t) - p_n(0) = \int_0^t \lambda e^{\lambda u} \lambda p_{n-1}(u) du. \end{aligned}$$

η οποία μαζί με την αρχική συνθήκη $p_n(0) = 0$, $n \geq 1$ δίνει

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda e^{\lambda u} \lambda p_{n-1}(u) du, \quad t \geq 0. \tag{1.6}$$

Χρησιμοποιώντας, τώρα τις σχέσεις (1.5) και (1.6), αποδεικνύεται εύκολα επαγωγικά ότι $p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n \geq 0$, δηλαδή ισχύει η ιδιότητα (iii) του ολικού ορισμού της Poisson για τη διαδικασία $\{N(t)\}$. Επομένως, ο τοπικός ορισμός της διαδικασίας Poisson συνεπάγεται τον ολικό ορισμό.

Είδαμε, λοιπόν, ότι οι τρεις ορισμοί της στοχαστικής διαδικασίας Poisson είναι ισοδύναμοι και δίνουν κάποιες διαφορετικές όψεις της ιδέας ότι μια στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ μοντελοποιεί την εκδήλωση γεγονότων στο χρόνο που συμβαίνουν 'έντελώς τυχαία" και 'ομογενώς " με ρυθμό λ. Το 'έντελώς τυχαία" αποδίδεται στον πρώτο ορισμό με την απαίτηση οι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων να είναι ανεξάρτητοι και εκθετικοί. Λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής, αυτό σημαίνει ότι δοθείσης της μέχρι τώρα ιστορίας της διαδικασίας, ο χρόνος που απομένει ως το επόμενο γεγονός είναι εκθετικός με παράμετρο λ. Δηλαδή, το παρελθόν της διαδικασίας δεν προσφέρει κάποια πληροφορία για το μέλλον της. Ανάλογα το "έντελώς τυχαία" αποδίδεται στους άλλους δυο ορισμούς με την ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων. Η ομογένεια της διαδικασίας στο χρόνο αποδίδεται στον πρώτο ορισμό με το ότι οι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων είναι ισόνομοι, ενώ στους άλλους δυο ορισμούς με την ιδιότητα των ομογενών προσαυξήσεων.

Πρέπει, εδώ, να τονιστεί ότι η στοχαστική διαδικασία Poisson έχει μια πιο ειδική δομή από μια αυθαίρετη ανανεωτική διαδικασία. Η δομή αυτή επάγει επιπλέον ιδιότητες. Έτσι, π.χ., μια αυθαίρετη ανανεωτική διαδικασία δεν έχει την ιδιότητα των ανεξάρτητων, ούτε των ομογενών προσαυξήσεων. Δεν υπάρχουν, δηλαδή, αντίστοιχοι των τελευταίων δυο ορισμών της διαδικασίας Poisson για ανανεωτικές διαδικασίες.

Ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά τη διαδικασία Poisson και δεν έχει αντίστοιχο στις άλλες ανανεωτικές διαδικασίες είναι το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 16 (Δεσμευμένη κατανομή χρόνων γεγονότων διαδικασίας Poisson, δεδομένου του αριθμού τους σε διάστημα) *Η από κοινού κατανομή των χρόνων των γεγονότων $S_1, S_2, \ldots, S_n$ μιας στοχαστικής διαδικασίας Poisson $\{N(t)\}$, δεδομένου ότι $N(t) = n$, ισούται με την από κοινού κατανομή των διατεταγμένων τυχαίων μεταβλητών από n ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, ομοιόμορφες στο $[0, t]$. Πιο συγκεκριμένα η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, δεδομένου ότι $N(t) = n$, δίνεται ως*

$$f_{(S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)=n)}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_n \le t, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Πράγματι, για $0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_n \le t$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & f_{(S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)=n}(s_1, s_2, \ldots, s_n) \\ &= \lim_{h_1,h_2,\ldots,h_n \to 0^+} \frac{\Pr[s_1 < S_1 \le s_1 + h_1, \ldots, s_n < S_n \le s_n + h_n | N(t) = n]}{h_1 h_2 \cdots h_n} \\ &= \lim_{h_1,h_2,\ldots,h_n \to 0^+} \frac{\Pr[s_1 < S_1 \le s_1 + h_1, \ldots, s_n < S_n \le s_n + h_n, N(t) = n]}{h_1 h_2 \cdots h_n \Pr[N(t) = n]}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Όμως, το ενδεχόμενο $\{s_1 < S_1 \le s_1 + h_1, \ldots, s_n < S_n \le s_n + h_n, N(t) = n\}$ είναι ισοδύναμο με το ότι συμβαίνουν 0 γεγονότα στο $[0, s_1]$, 1 γεγονός στο $(s_1, s_1 + h_1]$, 0 γεγονότα στο $(s_1 + h_1, s_2]$, 1 γεγονός στο $(s_2, s_2 + h_2]$, 0 γεγονότα στο $(s_2 + h_2, s_3]$, κ.ο.κ., 1 γεγονός στο $(s_n, s_n + h_n]$, 0 γεγονότα στο $(s_n + h_n, t]$. Επομένως, λόγω των ανεξάρτητων και ομογενών προσαυξήσεων, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \Pr[s_1 < S_1 \le s_1 + h_1, \ldots, s_n < S_n \le s_n + h_n, N(t) = n] \\ &= \Pr[N(s_1) = 0] \Pr[N(h_1) = 1] \Pr[N(s_2 - s_1 - h_1) = 0] \Pr[N(h_2) = 1] \\ &\quad \cdots \Pr[N(h_n) = 1] \Pr[N(t - s_n - h_n) = 0] \\ &= e^{-\lambda s_1} \lambda h_1 e^{-\lambda h_1} e^{-\lambda(s_2 - s_1 - h_1)} \lambda h_2 e^{-\lambda h_2} \cdots \lambda h_n e^{-\lambda h_n} e^{-\lambda(t - s_n - h_n)} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda t} h_1 h_2 \cdots h_n. \end{aligned}$$

Οπότε η (1.8) γίνεται

$$f_{(S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)=n}(s_1,s_2,\ldots,s_n) = \lim_{h_1,h_2,\ldots,h_n\to 0^+} \frac{\lambda^n e^{-\lambda t} h_1 h_2 \cdots h_n}{h_1 h_2 \cdots h_n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

που δίνει τον πρώτο κλάδο της (1.7). Ο δεύτερος κλάδος είναι βέβαια προφανής.

Το θεώρημα 16 μας επιτρέπει υπολογισμούς δεσμευμένων πιθανοτήτων της μορφής $\Pr[(S_1,S_2,\ldots,S_n)\in A|N(t)=n]$, καθώς και δεσμευμένων μέσων τιμών της μορφής $E[g(S_1,S_2,\ldots,S_n)|N(t)=n]$. Πράγματι, αν συμβολίσουμε με $(U_{1:n},U_{2:n},\ldots,U_{n:n})$ το διάνυσμα των διατεταγμένων παρατηρήσεων από τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές U_i, $i=1,2,\ldots,n$, με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,t]$, τότε

$$\Pr[(S_1,S_2,\ldots,S_n)\in A|N(t)=n] = \Pr[(U_{1:n},U_{2:n},\ldots,U_{n:n})\in A],$$
$$E[g(S_1,S_2,\ldots,S_n)|N(t)=n] = E[g((U_{1:n},U_{2:n},\ldots,U_{n:n}))].$$

Ειδικότερα, για την δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής, τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και τη δεσμευμένη μέση τιμή της S_i, δεδομένου ότι $N(t)=n$, για $i=1,2,\ldots,n$, έχουμε αντίστοιχα

$$F_{(S_i|N(t)=n)}(s_i) = F_{U_{i:n}}(s_i) = \sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{s_i}{t}\right)^k\left(1-\frac{s_i}{t}\right)^{n-k}, \quad 0\le s_i\le t,$$

$$f_{(S_i|N(t)=n)}(s_i) = f_{U_{i:n}}(s_i) = \frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!}\left(\frac{s_i}{t}\right)^{i-1}\frac{1}{t}\left(1-\frac{s_i}{t}\right)^{n-i}, \quad 0\le s_i\le t,$$

$$E[S_i|N(t)=n] = \frac{it}{n+1}, \quad 1\le i\le n.$$

Όταν έχουμε απαριθμήτριες διαδικασίες διαφόρων τύπων γεγονότων, μπορούμε να δημιουργήσουμε την απαριθμήτρια διαδικασία όλων των γεγονότων που αναφέρεται ως η υπέρθεσή τους. Αντίστροφα, από μια απαριθμήτρια διαδικασία μπορούμε να δημιουργήσουμε τη διάσπασή της σε απαριθμήτριες γεγονότων συγκεκριμένων τύπων. Κάτω, από κάποιες προϋποθέσεις οι δυο αυτές διαδικασίες, της υπέρθεσης και της διάσπασης, διατηρούν την ιδιότητα μιας απαριθμήτριας διαδικασίας να είναι Poisson. Συγκεκριμένα έχουμε τα ακόλουθα δυο αποτελέσματα.

Θεώρημα 17 (Υπέρθεση διαδικασιών Poisson) *Αν $\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}, \ldots, \{N_r(t)\}$ είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ και η $\{N(t)\}$ είναι η υπέρθεσή τους, με $N(t)=\sum_{j=1}^r N_j(t)$, τότε η $\{N(t)\}$ είναι στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda=\sum_{i=1}^r\lambda_i$. Επιπλέον, έστω Z_k ο τύπος του k-οστού γεγονότος της υπέρθεσης, δηλαδή το ενδεχόμενο $\{Z_k=i\}$ αντιστοιχεί στο ότι το k-οστό γεγονός της $\{N(t)\}$ προέρχεται από γεγονός της $\{N_i(t)\}$. Τότε, οι Z_k, $k\ge 1$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και επιπλέον $\Pr[Z_k=i]=\frac{\lambda_i}{\lambda}$, $i=1,2,\ldots,r$.*

Θεώρημα 18 (Διάσπαση διαδικασιών Poisson) *Έστω $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού λ και $Z_1,Z_2,\ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\{1,2,\ldots,r\}$ και $\Pr[Z_k=i]=p_i$, $1\le i\le r$. Έστω, επίσης $N_i(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}1_{\{Z_k=i\}}$, $t\ge 0$, $1\le i\le r$. Οι διαδικασίες $\{N_i(t)\}$, $1\le i\le r$ αποτελούν μια τυχαία διάσπαση της $\{N(t)\}$ και είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με αντίστοιχους ρυθμούς λp_i, $1\le i\le r$.*

Τα Θεωρήματα 17 και 18 αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε από τους τρεις ισοδύναμους ορισμούς της Poisson. Ειδικότερα με τον τοπικό ορισμό της Poisson προκύπτουν ιδιαίτερα εύκολες αποδείξεις. Δεν υπάρχουν ανάλογα αυτών των θεωρημάτων για γενικές ανανεωτικές διαδικασίες.

1.3 Ανανεωτικές διαδικασίες κόστους και παραδείγματα

Έστω $\{N(t)\}$ μια ανανεωτική διαδικασία με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$, ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων $X_1, X_2, \ldots$ και κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$. Θεωρούμε επίσης διαδικασία $\{C(t)\}$, την οποία ονομάζουμε διαδικασία κόστους και η οποία μπορεί να είναι εξαιρετικά γενική. Για κάθε συγκεκριμένη σταθερή στιγμή t, σκεφτόμαστε την τυχαία μεταβλητή $C(t)$ ως το κόστος που έχει συσσωρευτεί στο διάστημα $(0, t]$ στο υπό εξέταση σύστημα. Το κόστος αυτό μπορεί να μην είναι μονότονη συνάρτηση του t για μια πραγματοποίηση της διαδικασίας. Το κόστος μπορεί να σχετίζεται με κάποιο τρόπο με τα γεγονότα της $\{N(t)\}$ και να συσσωρεύεται με συνεχή τρόπο ή με άλματα στις στιγμές των γεγονότων. Το κόστος μπορεί να παίρνει και αρνητικές τιμές, οπότε τότε μπορεί να ερμηνεύεται ως αμοιβή.

Η διαδικασία κόστους $\{C(t)\}$ λέγεται συμβατή με την ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, αν οι διδιάστατες τυχαίες μεταβλητές (X_n, C_n) με $C_n = C(S_n) - C(S_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες για $n \geq 1$ με κοινή συνάρτηση κατανομής $F_{X,C}(x, y)$. Αυτή η συνθήκη σημαίνει ότι το κόστος C_n που συσσωρεύεται σε έναν ανανεωτικό κύκλο δεν εξαρτάται από το τί συμβαίνει στους άλλους ανανεωτικούς κύκλους, αλλά μπορεί βέβαια να εξαρτάται από το τι συμβαίνει στο τρέχοντα ανανεωτικό κύκλο. Είναι σημαντικό για τις εφαρμογές οι C_n και X_n να μπορεί να είναι εξαρτημένες. Δίνουμε έτσι τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 19 (Ανανεωτική διαδικασία κόστους) *Μια στοχαστική διαδικασία $\{C(t)\}$ που είναι συμβατή με μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ λέγεται ανανεωτική διαδικασία κόστους. Η συνάρτηση κατανομής $F_{X,C}(x, y)$ των τυχαίων μεταβλητών (X_n, C_n) που δίνουν τις διάρκειες των ανανεωτικών κύκλων και τα αντίστοιχα κόστη αναφέρεται ως γεννώσα συνάρτηση κατανομής της $\{C(t)\}$.*

Παράδειγμα 20 (Αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους) Αν έχουμε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \ldots$, μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $Y_1, Y_2, \ldots$, ανεξάρτητων της $\{N(t)\}$, και μια συνάρτηση $g(x, y)$ τότε η διαδικασία $\{C(t)\}$ με

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g(X_i, Y_i), \ t \geq 0,$$

αναφέρεται ως αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους. Στην περίπτωση αυτή

$$C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}) = g(X_n, Y_n),$$

οπότε οι τυχαίες μεταβλητές $(X_n, C_n) = (X_n, g(X_n, Y_n))$, $n \geq 1$ είναι ανεξάρτητες και επομένως η $C(t)$ είναι πράγματι ανανεωτική διαδικασία κόστους.

Η φυσική ερμηνεία της αλματικής ανανεωτικής διαδικασίας κόστους είναι ότι το κόστος συσσωρεύεται με άλματα που συμβαίνουν τις στιγμές των γεγονότων της υποκείμενης ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t)\}$. Το κόστος που επάγεται τη στιγμή S_n που τελειώνει ο n-οστός ανανεωτικός κύκλος εξαρτάται από τη διάρκεια X_n του ανανεωτικού κύκλου και τυχαίους παράγοντες που εκφράζονται μέσω της τυχαίας μεταβλητής Y_n. Η συνάρτηση $g(x, y)$ εκφράζει τη σύνδεση του κόστους που επάγεται στο τέλος του n-οστού ανανεωτικού κύκλου με τη διάρκειά του και τους τυχαίους παράγοντες που υπεισήλθαν σε αυτόν.

Παράδειγμα 21 (Ανανεωτική διαδικασία) Μια ανανεωτική διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους ορίζοντας $Y_i = 0$ (ή γενικά κάποια αυθαίρετη τιμή) και $g(x, y) = 1$. Στην περίπτωση αυτή $C_n = 1$, $n \geq 1$ και $C(t) = N(t)$.

Παράδειγμα 22 (Σύνθετη ανανεωτική διαδικασία) Η περίπτωση της αλματικής ανανεωτικής διαδικασίας κόστους με $f(x, y) = y$ αναφέρεται ως σύνθετη ανανεωτική διαδικασία. Στην περίπτωση αυτή $C_n = Y_n$, $n \geq 1$ και $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$. Η διαδικασία αυτή είναι χρήσιμη για να περιγράψουμε τη συσσώρευση κόστους λόγω εκδήλωσης γεγονότων καθένα από τα οποία επάγει κόστος ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, όταν τα κόστη των γεγονότων είναι ισόνομα.

Μια ειδική περίπτωση προκύπτει όταν η $\{N(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson που μοντελοποιεί τις απαιτήσεις αποζημίωσης που φθάνουν σε μια ασφαλιστικη εταιρεία και $Y_1, Y_2, \ldots$ είναι τα χρηματικά ποσά των απαιτήσεων. Ομοίως, η $\{N(t)\}$ μπορεί να είναι μια διαδικασία που μοντελοποιεί τις αφίξεις παραγγελιών σε μια αποθήκη και $Y_1, Y_2, \ldots$ είναι τα μεγέθη των παραγγελιών.

Μια άλλη περίπτωση προκύπτει όταν οι $Y_1, Y_2, \ldots$ είναι ακέραιες, μη-αρνητικές. Στην περίπτωση αυτή η $\{N(t)\}$ μπορεί να μοντελοποιεί τη διαδικασία ομάδων πελατών σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης και $Y_1, Y_2, \ldots$ είναι τα μεγέθη των ομάδων.

1.4 Μέσος ρυθμός κόστους - Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη

Οι ανανεωτικές διαδικασίες κόστους είναι το κατάλληλο μοντέλο για να περιγραφούν στοχαστικά περιοδικά φαινόμενα κατά τα οποία συσσωρεύεται κόστος. Κατόπιν το ενδιαφέρον εστιάζεται στον υπολογισμό του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους (δηλαδή του μέσου κόστους ανά χρονική μονάδα). Το βασικό αποτέλεσμα για τον υπολογισμό αυτό είναι το παρακάτω στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη που ουσιαστικά λέει ότι ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει επικεντρώνοντας την προσοχή μας σε έναν τυπικό ανανεωτικό κύκλο. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής:

Θεώρημα 23 (Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη) *Έστω $\{C(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία κόστους, με τυπικό ζεύγος διάρκειας ανανεωτικού κύκλου και αντίστοιχης αμοιβής (X, C) με κατανομή $F_{X,C}(x, y)$. Υποθέτουμε επίσης $E[X] < \infty$ και $E[C] < \infty$. Τότε:*

(i) *Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}, \text{ με πιθανότητα } 1.$$

(ii) *Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

1.5 Επισκόπηση των αναγεννητικών διαδικασιών

Το κατάλληλο μοντέλο για την καταγραφή της κατάστασης ενός συστήματος που εξελίσσεται στο χρόνο με τυχαίο τρόπο με κάποια μορφή περιοδικότητας είναι μια αναγεννητική διαδικασία. Διαισθητικά μια διαδικασία $\{X(t)\}$ είναι αναγεννητική, αν υπάρχει μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με χρόνους γεγονότων S_n, έτσι ώστε η εξέλιξη της $\{X(t)\}$ σε κάθε ανανεωτικό κύκλο της $\{N(t)\}$ να είναι πιθανοθεωρητικά ίδια και ανεξάρτητη από ό,τι συμβαίνει στους άλλους κύκλους. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 24 (Αναγεννητική διαδικασία) *Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}$ λέγεται αναγεννητική διαδικασία, αν υπάρχει μια μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή S_1 με $\Pr[S_1 = 0] < 1$ και $\Pr[S_1 < \infty] = 1$, τέτοια ώστε*

(i) *οι $\{X(t) : t \geq 0\}$ και $\{X(t + S_1) : t \geq 0\}$ να είναι στοχαστικά ισοδύναμες και*
(ii) *οι $\{X(t) : 0 \leq t < S_1\}$ και $\{X(t + S_1) : t \geq 0\}$ να είναι ανεξάρτητες.*

Ο ορισμός αυτός συνεπάγεται την ύπαρξη μιας αύξουσας ακολουθίας χρόνων $S_1, S_2, \ldots$ τέτοιων ώστε οι διαδικασίες $\{X(t) : t \geq 0\}$ και $\{X(t + S_n) : t \geq 0\}$ να είναι στοχαστικά ισοδύναμες. Επιπλέον, για κάθε $n \geq 1$, έχουμε ότι οι $\{X(t) : 0 \leq t < S_n\}$ και $\{X(t + S_n) : t \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητες. Επομένως, οι χρόνοι $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$ (με τη σύμβαση $S_0 = 0$) είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι και επομένως οι S_n μπορούν να θεωρηθούν ως οι χρόνοι των γεγονότων μιας ανανεωτικής διαδικασίας. Σε κάθε τέτοιο γεγονός, η διαδικασία $\{X(t\}$ "ξεχνά" το παρελθόν της (αφού οι $\{X(t) : 0 \leq t < S_n\}$ και $\{X(t + S_n) : t \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητες) και ξαναρχίζει την εξέλιξή της σαν να ξεκινούσαν όλα όπως τη χρονική στιγμή 0 (αφού οι $\{X(t) : t \geq 0\}$ και $\{X(t+S_n) : t \geq 0\}$ είναι στοχαστικά ισοδύναμες). Για το λόγο αυτό λέμε ότι η $\{X(t)\}$ αναγεννάται στοχαστικά σε αυτά τα σημεία και αναφέρεται ως αναγεννητική διαδικασία.

Παραδείγματα αναγεννητικών διαδικασιών θα δούμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 2. Συγκεκριμένα, η εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία, $\{X(t)\}$, που καταγράφει την κατάσταση μιας μηχανής που εναλλάσεται μεταξύ περιόδων λειτουργίας και αντικατάστασης, όπως περιγράφεται στην παράγραφο 2.2, είναι αναγεννητική διαδικασία. Οι στιγμές αναγέννησης είναι οι στιγμές που τελειώνουν οι χρόνοι αντικατάστασης της μηχανής. Ομοίως, οι διαδικασίες που καταγράφουν το ύψος αποθέματος μιας αποθήκης που εκκαθαρίζεται περιοδικά, όπως περιγράφονται στις παραγράφους 2.3 και 2.4 είναι αναγεννητικές διαδικασίες που αναγεννώνται τις στιγμές εκκαθάρισης της αποθήκης. Τέλος, οι διαδικασίες $\{A(t)\}$ (ηλικία), $\{R(t)\}$ (υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης) και $\{T(t)\}$ (t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης) που περιγράφονται στην παράγραφο 2.5 και σχετίζονται με την εξέλιξη μιας ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t)\}$ είναι αναγεννητικές και αναγεννώνται τις στιγμές των γεγονότων της $\{N(t)\}$.

Δοθείσης μιας αναγεννητικής διαδικασίας $\{X(t)\}$ με χώρο καταστάσεων κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με αριστερά όρια, ορίζουμε την οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής της $\{X(t)\}$ ως

$$F_X(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{X(u)\leq x\}} du\right]}{t},\ x \in \mathbb{R}.$$

Η οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής της $\{X(t)\}$ σε ένα σημείο x εκφράζει το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η $\{X(t)\}$ περνάει σε καταστάσεις μικρότερες ή ίσες του x. Η οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής της $\{X(t)\}$ μπορεί να υπολογιστεί μελετώντας τη συμπεριφορά της $\{X(t)\}$ μέχρι την πρώτη αναγεννητική στιγμή της. Συγκεκριμένα έχουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 25 (Οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής αναγεννητικής διαδικασίας) *Έστω μια αναγεννητική διαδικασία $\{X(t)\}$ με χώρο καταστάσεων κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με αριστερά όρια. Έστω επίσης X ένας ενδιάμεσος χρόνος αναγέννησης της $\{X(t)\}$ και $S(x) = \int_0^X 1_{\{X(u)\leq x\}}du$ ο συνολικός χρόνος στο $(0, X]$ που η $\{X(t)\}$ είναι το πολύ x. Τότε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)\leq x\}}du}{t} = \frac{E[S(x)]}{E[X]}, \quad \text{με πιθανότητα } 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$F_X(x) = \frac{E[S(x)]}{E[X]},\ x \in \mathbb{R}.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι άμεση, αρκεί κανείς να εφαρμόσει το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη στην ανανεωτική διαδικασία κόστους $\{C(t)\}$ με

$$C(t) = \int_0^t 1_{\{X(u)\leq x\}}du$$

που καταγράφει το χρόνο που η αναγεννητική διαδικασία πέρασε σε καταστάσεις μικρότερες ή ίσες της x στο διάστημα $(0, t]$ για κάθε t.

Μια άλλη κατανομή που περιγράφει την οριακή συμπεριφορά της $\{X(t)\}$ είναι η οριακή κατανομή της που ορίζεται ως

$$F_{X(\infty)}(x) = \lim_{t\to\infty} \Pr[X(t) \leq x],\ x \in \mathbb{R}.$$

Στην περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι αναγεννήσεων της διαδικασίας $\{X(t)\}$ είναι επιπλέον απεριοδικοί, η οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ της $\{X(t)\}$ ταυτίζεται με την οριακή συνάρτηση κατανομής $F_{X(\infty)}(x)$ της $\{X(t)\}$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 26 (Οριακή συνάρτηση κατανομής αναγεννητικής διαδικασίας) *Έστω μια αναγεννητική διαδικασία $\{X(t)\}$ με χώρο καταστάσεων κάποιο υποσύνολο του*

$\mathbb{R}$ και δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με αριστερά όρια. Έστω επίσης X ένας ενδιάμεσος χρόνος αναγέννησης της $\{X(t)\}$ και $S(x) = \int_0^X 1_{\{X(u)\le x\}}du$ ο συνολικός χρόνος στο $(0, X]$ που η $\{X(t)\}$ είναι το πολύ x. Τότε, αν ο X είναι απεριοδικός έχουμε

$$\begin{aligned} F_{X(\infty)}(x) &= \lim_{t\to\infty} \Pr[X(t) \le x] \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}}du}{t}, \text{ με πιθανότητα } 1, \\ &= F_X(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}}du\right]}{t} \\ &= \frac{E[S(x)]}{E[X]}, \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που ο χώρος καταστάσεων μιας αναγεννητικής διαδικασίας $\{X(t)\}$ είναι διακριτός, π.χ. το σύνολο των μη-αρνητικών ακεραίων $\mathbb{N}_0$, μπορούμε να επικεντρωνόμαστε στην οριακή μέση δειγματική συνάρτηση πιθανότητας της $\{X(t)\}$ που ορίζεται ως

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}}du\right]}{t}, \ j \in \mathbb{N}_0.$$

Η p_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η διαδικασία $\{X(t)\}$ περνάει στην κατάσταση j. Ισχύει, επίσης, ότι

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}}du}{t}, \quad \text{με πιθανότητα } 1, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

δηλαδή, για σχεδόν κάθε πραγματοποίηση της $\{X(t)\}$, το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που περνάει στην j ισούται επίσης με p_j. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$p_j = \frac{E[\hat{S}(j)]}{E[X]}, \ j \in \mathbb{N}_0,$$

όπου $\hat{S}(j) = \int_0^X 1_{\{X(u)=j\}}du$ ο συνολικός χρόνος παραμονής της $\{X(t)\}$ στην κατάσταση j κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $(0, X]$. Δηλαδή, η p_j είναι ίση με το μέσο χρόνο παραμονής της $\{X(t)\}$ στην κατάσταση j σε έναν αναγεννητικό κύκλο διά τη μέση διάρκεια του αναγεννητικού κύκλου. Αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι αναγέννησης της ανανεωτικής διαδικασίας είναι απεριοδικοί, έχουμε και ότι η p_j είναι η οριακή πιθανότητα να βρίσκεται η $\{X(t)\}$ στην κατάσταση j, δηλαδή,

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \Pr[X(t) = j], \ j \in \mathbb{N}_0.$$

1.6 Μέσος ρυθμός κόστους

Δοθείσης μιας αναγεννητικής διαδικασίας $\{X(t)\}$ με χώρο καταστάσεων $\mathbb{R}$, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα κόστος $c(x)$ ανά χρονική μονάδα παραμονής στην x. Μπορούμε τώρα, χρησιμοποιώντας το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη να δούμε ότι ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους βρίσκεται επικεντρώνοντας την προσοχή μας σε έναν τυπικό αναγεννητικό κύκλο.

Θεώρημα 27 (Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους σε αναγεννητική διαδικασία) *Έστω $\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία με χώρο καταστάσεων $\mathbb{R}$ και οριακή δειγματική κατανομή $F_X(x)$. Έστω, επίσης, διαδικασία κόστους $\{C(t)\}$ που ορίζεται από τη σχέση*

$$C(t) = \int_0^t c(X(u))du, \ t \geq 0,$$

όπου η συνάρτηση $c(x)$ είναι φραγμένη άνω ή κάτω. Τότε:

(i) *Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = \int_{-\infty}^{\infty} c(u)dF_X(u), \text{ με πιθανότητα 1.}$$

(ii) *Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \int_{-\infty}^{\infty} c(u)dF_X(u).$$

Στην περίπτωση που ο χώρος καταστάσεων της αναγεννητικής διαδικασίας $\{X(t)\}$ είναι διακριτός, π.χ. $\mathbb{N}_0$, μπορούμε να απλοποιήσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας την οριακή μέση δειγματική συνάρτηση πιθανότητας (p_j) της $\{X(t)\}$. Τότε έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = \sum_{j=0}^{\infty} c(j)p_j, \text{ με πιθανότητα } 1,$$

και

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \sum_{j=0}^{\infty} c(j)p_j.$$

1.7 Ασκήσεις

1. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $\text{Exp}(\lambda)$, δηλαδή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

   $$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

   Να υπολογιστούν η συνάρτηση κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$, η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t, $(p_k(t) : k \geq 0)$, και η ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$. Να υπολογιστούν, επίσης, οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\tilde{m}(s)$.

2. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων Erlang(r,λ), δηλαδή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(t) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!}t^{r-1}e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F_X(t) = 1 - \sum_{j=0}^{r-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}, \quad t \geq 0.$$

Να υπολογιστούν η συνάρτηση κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$ και η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t, $(p_k(t) : k \geq 0)$. Να αποδειχθεί ότι η ανανεωτική συνάρτηση δίνεται από τον τύπο

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{1 - \sum_{j=0}^{kr-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right\}, \quad t \geq 0.$$

Να υπολογιστούν, επίσης, οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\tilde{m}(s)$.

3. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων Hyperexp$(p, 1-p, \lambda, \mu)$, δηλαδή, μίξη δυο κατανομών Exp(λ) και Exp(μ), με πιθανότητες p και $1-p$ αντίστοιχα. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων είναι, επομένως,

$$f_X(t) = p\lambda e^{-\lambda t} + (1-p)\mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

και η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F_X(t) = p(1-e^{-\lambda t}) + (1-p)(1-e^{-\mu t}), \quad t \geq 0.$$

Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\tilde{m}(s)$, της συνάρτησης κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$, της συνάρτησης πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t, $(p_k(t) : k \geq 0)$ και της ανανεωτικής συνάρτησης $m(t)$, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η ανανεωτική συνάρτηση είναι της μορφής

$$m(t) = A + Bt + Ce^{-(\lambda(1-p)+\mu p)t}, \quad t \geq 0,$$

και να υπολογιστούν οι σταθερές A, B και C.

4. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, όπου ένας ενδιάμεσος χρόνος ανανέωσης είναι 0 με πιθανότητα p, και έχει την Exp(λ) κατανομή με πιθανότητα $1-p$. Δηλαδή, η συνάρτηση κατανομής του είναι μικτή, με μάζα πιθανότητας p στο 0 και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $(1-p)\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. Η συνάρτηση κατανομής του είναι

$$F_X(t) = p + (1-p)(1-e^{-\lambda t}), \quad t \geq 0.$$

Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq$

0) και $\tilde{m}(s)$, της συνάρτησης κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$, της συνάρτησης πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t, $(p_k(t) : k \geq 0)$ και της ανανεωτικής συνάρτησης $m(t)$, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η ανανεωτική συνάρτηση είναι της μορφής

$$m(t) = A + Bt, \quad t \geq 0,$$

και να υπολογιστούν οι σταθερές A και B.

5. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $\mathrm{Uniform}([0,1])$, δηλαδή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(t) = 1, \; 0 \leq t \leq 1.$$

Να αποδειχθεί ότι για την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ ισχύει

$$m(t) = e^t - 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

6. Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$, με μέση τιμή μ και έστω $h(t) = E[S_{N(t)+1}]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι

$$h(t) = \mu(1 + m(t)), \quad t \geq 0,$$

όπου $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση.

7. Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και έστω $h(t) = E[N(t)(N(t)-1)]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι

$$h(t) = 2(m * m)(t), \quad t \geq 0,$$

όπου $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση.

8. Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και έστω $h(t) = \Pr[N(t) \text{ περιττός}]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και να λυθεί. Να βρεθεί το όριο $\lim_{t\to\infty} h(t)$.

9. Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$, με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$. Έστω $R(t) = S_{N(t)+1} - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t. Θεωρούμε κάποιο σταθερό $x \geq 0$ και έστω $h(t) = \Pr[R(t) > x]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι

$$h(t) = \Pr[R(t) > x] = 1 - F_X(x+t) + \int_0^t (1 - F_X(x+t-u))dm(u), \quad t, x \geq 0.$$

Να αποδειχθεί, επίσης, ότι

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \Pr[R(t) > x] = \frac{\int_x^\infty (1 - F_X(u))du}{\mu}, \quad x \geq 0.$$

Έστω $A(t) = t - S_{N(t)}$ ο παρελθών χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t. Δικαιολογήστε την ισότητα ενδεχομένων $\{A(t) > x\} = \{R(t-x) > x\}$ και, χρησιμοποιώντας την, βρείτε το $\lim_{t\to\infty} \Pr[A(t) > x]$. Ομοίως, δείξτε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \Pr[A(t) > x, R(t) > y] = \frac{\int_{x+y}^{\infty}(1 - F_X(u))du}{\mu}, \quad x, y \geq 0.$$

10. Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ με μέση τιμή $\mu \in (0, \infty)$ και διασπορά $\sigma^2 \in [0, \infty)$. Έστω, επίσης, $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση και $h(t) = m(t) - \frac{t}{\mu}$, $t \geq 0$. Να αποδειχθεί ότι η $h(t)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t), \quad t \geq 0,$$

με

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_0^t \left(1 - \frac{u}{\mu}\right) dF_X(u) - \int_t^{\infty} \frac{t}{\mu} dF_X(u) \\ &= \frac{1}{\mu}\int_t^{\infty}(1 - F_X(u))du - (1 - F_X(t)). \end{aligned}$$

Επίσης, αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty}\left(m(t) - \frac{t}{\mu}\right) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2},$$

δηλαδή η ευθεία $\frac{1}{\mu}t + \frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $m(t)$.

11. Έστω μια διαδικασία Poisson(λ), $0 < s < t$ και n μη αρνητικός ακέραιος. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $\Pr[N(s) = k|N(t) = n]$, $0 \leq k \leq n$. Τι κατανομή είναι η δεσμευμένη κατανομή της $N(s)$ δεδομένου του ότι $N(t) = n$; Μπορείτε να ερμηνεύσετε διαισθητικά το αποτέλεσμα;

12. Έστω δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson, $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$, με ρυθμούς λ_1 και λ_2, αντίστοιχα. Έστω, επίσης $\{N(t)\}$ η υπέρθεσή τους. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $\Pr[N_1(t) = k|N(t) = n]$, $0 \leq k \leq n$. Τι κατανομή είναι η δεσμευμένη κατανομή της $N_1(t)$ δεδομένου του ότι $N(t) = n$; Μπορείτε να ερμηνεύσετε διαισθητικά το αποτέλεσμα;

13. Έστω $\{N(t)\}$ μια διαδικασία Poisson(λ) και X μια τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη της $\{N(t)\}$, με κατανομή Exp(μ). Έστω N το πλήθος των γεγονότων της $\{N(t)\}$ στο (τυχαίο) διάστημα $[0, X]$. Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας της N. Τί κατανομή είναι;

14. Έστω $\{N(t)\}$ μια διαδικασία Poisson(λ) και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων της. Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος του τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή t, δηλαδή η $E[S_{N(t)}]$.

15. Έστω ότι ένα μηχάνημα έχει εκθετικό χρόνο ζωής με παράμετρο λ και ότι μπορεί να επιθεωρείται κατά μέσο όρο κάθε $\tau = \frac{1}{\mu}$ χρονικές μονάδες,
    1. είτε στις στιγμές $0, \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$ μιας ντετερμινιστικής διαδικασίας επιθεωρήσεων,
    2. είτε στις στιγμές μιας Poisson διαδικασίας επιθεωρήσεων με ρυθμό μ.

    Έστω Y_α και Y_β ο χρόνος στον οποίο θα ανακαλυφθεί ότι το μηχάνημα είναι χαλασμένο με τις διαδικασίες (α) και (β) αντίστοιχα, δηλαδή οι στιγμές των πρώτων επιθεωρήσεων μετά το πέρας του χρονου ζωής του μηχανήματος. Να υπολογιστούν οι $E[Y_\alpha]$ και $E[Y_\beta]$. Ποιά διαδικασία επιθεωρήσεων είναι προτιμότερη;

16. Θεωρήστε ένα δρόμο και μια συγκεκριμένη διάβαση πεζών επί αυτού. Τα αυτοκίνητα περνάνε τη διάβαση σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ αυτοκίνητα το λεπτό. Ο δρόμος έχει πλάτος x μέτρα. Ένας πεζός που περπατάει με ταχύτητα u μέτρα το λεπτό, θέλει να διασχίσει το δρόμο και για λόγους ασφαλείας αρχίζει να τον διασχίζει μόνο όταν βλέπει ότι δεν θα περάσουν αυτοκίνητα από τη διάβαση ενόσω θα την περνάει ο ίδιος (υποθέτουμε ότι ο δρόμος είναι ευθύς και ο πεζός έχει εποπτεία των αυτοκινήτων που έρχονται και μπορεί να εκτιμήσει με απόλυτη ακρίβεια πότε θα περάσει το επόμενο αυτοκίνητο από τη διάβαση). Βρείτε το μέσο χρόνο που απαιτείται από την άφιξή του στη διάβαση μέχρι να την περάσει.

2

Ανανεωτικές διαδικασίες με κόστη: Εφαρμογές

Στις επόμενες παραγράφους, θα δούμε μερικές τυπικές εφαρμογές του στοιχειώδους ανανεωτικού θεωρήματος με κόστη σε προβλήματα Επιχειρησιακής Έρευνας.

2.1 Συντήρηση - αντικατάσταση μηχανήματος

Θεωρούμε μια μηχανή η οποία έχει χρόνους ζωής (λειτουργίας) $O_1, O_2, \ldots$. Η μηχανή αντικαθίσταται όταν χαλάσει ή όταν περάσει χρόνος s. Το κόστος αντικατάστασης είναι c_f αν η αντικατάσταση γίνει λόγω βλάβης ή c_p αν η αντικατάσταση γίνει προληπτικά μετά από s χρονικές μονάδες από την έναρξη της λειτουργίας της. Οι χρόνοι που απαιτούνται για την αντικατάσταση της μηχανής είναι οι $D_1, D_2, \ldots$. Οι τυχαίες μεταβλητές (O_n, D_n), $n \geq 1$, θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή $F_{O,D}(x, y)$. Έστω $C(t)$ το συνολικό κόστος για τις αντικαταστάσεις της μηχανής στο $(0, t]$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους.

Αν συμβολίσουμε με S_n τη χρονική στιγμή που ολοκληρώνεται η n-οστή αντικατάσταση, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
X_n &= S_n - S_{n-1} = \min(O_n, s) + D_n,\ n \geq 1, \\
C_n &= C(S_n) - C(S_{n-1}) = c_f 1_{\{O_n \leq s\}} + c_p 1_{\{O_n > s\}},\ n \geq 1.
\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε άμεσα ότι οι (X_n, C_n), $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες αφού οι (O_n, D_n), $n \geq 1$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Οπότε, το στοιχειώδες ανανεωγικό θεωρήμα με κόστη είναι εφαρμόσιμο και έχουμε ότι ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους λόγω αντικαταστάσεων είναι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Εδώ έχουμε

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[\min(O, s)] + E[D] = \int_0^\infty \Pr[\min(O, s) > t]dt + \int_0^\infty \Pr[D > t]dt \\
&= \int_0^s (1 - F_O(t))dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t))dt, \\
E[C] &= c_f \Pr[O_n \leq s] + c_p \Pr[O_n > s] = c_f F_O(s) + c_p(1 - F_O(s)),
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[C(t)]}{t}=\frac{c_fF_O(s)+c_p(1-F_O(s))}{\int_0^s(1-F_O(t))dt+\int_0^\infty(1-F_D(t))dt}.$$

Συμβολίζουμε το μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους ως συνάρτηση του s ως $c(s)$.

Αν $c_f \leq c_p$, δηλαδή αν το κόστος αντικατάστασης λόγω βλάβης είναι μικρότερο ή ίσο του κόστους προληπτικής αντικατάστασης τότε το $c(s)$ είναι λόγος μιας φθίνουσας μη-αρνητικής προς μια αύξουσα μη-αρνητική συνάρτηση του s, δηλαδή είναι φθίνουσα συνάρτηση του s. Επομένως η βέλτιστη πολιτική αντικατάστασης είναι για $s=\infty$, δηλαδή το μηχάνημα να αντικαθίσταται μόνο όταν παθαίνει βλάβη.

Αν $c_f > c_p$, όπως είναι λογικό να συμβαίνει στις εφαρμογές, δηλαδή το κόστος αντικατάστασης λόγω βλάβης είναι μεγαλύτερο του κόστους προληπτικής αντικατάστασης, τότε το $c(s)$ είναι λόγος μιας αύξουσας μη-αρνητικής προς μια αύξουσα μη-αρνητική συνάρτηση του s, οπότε δεν είναι σαφές ποιά είναι η βέλτιστη τιμή του s. Ουσιαστικά στην περίπτωση αυτή πρέπει να βρεθεί ένα ιδανικό σημείο ισορροπίας. Μικρό s συνεπάγεται ότι θα γίνονται συχνές αντικαταστάσεις, αλλά σχεδόν όλες θα είναι λόγω προληπτικής αντικατάστασης. Επομένως θα πληρώνεται κυρίως το μικρό c_p, αλλά συχνά. Μεγάλο s συνεπάγεται ότι θα γίνονται κυρίως αντικαταστάσεις λόγω βλάβης και επομένως θα πληρώνεται το μεγάλο c_f, αλλά πιό αραιά. Στη γενική περίπτωση η βέλτιστη τιμή του s δεν είναι υπολογίσιμη. Μόνο σε πολύ ειδικές περιπτώσεις έχουμε κλειστούς τύπους.

Στην ειδική περίπτωση που οι χρόνοι ζωής της μηχανής είναι $Exp(\lambda)$ και οι αντικαταστάσεις γίνονται ακαριαία, δηλαδή $D_n=0$ έχουμε

$$c(s)=\frac{c_f(1-e^{-\lambda s})+c_pe^{-\lambda s}}{\int_0^s e^{-\lambda t}dt}=\lambda c_f+\frac{\lambda c_pe^{-\lambda s}}{1-e^{-\lambda s}}=\lambda(c_f-c_p)+\frac{\lambda c_p}{1-e^{-\lambda s}},$$

που είναι φθίνουσα συνάρτηση του s. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι η βέλτιστη τιμή του s είναι ∞, δηλαδή η μηχανή πρέπει να αντικαθίσταται μόνο όταν υφίσταται βλάβη. Αυτό είναι, βέβαια, αναμενόμενο αφού λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής των χρόνων ζωής της μηχανής, η μηχανή είναι πάντα σαν καινούργια και επομένως δεν έχει νόημα να αντικατασταθεί προληπτικά μετά από χρόνο s για κάποιο $s<\infty$.

2.2 Εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία

Θεωρούμε μια μηχανή η οποία έχει χρόνους ζωής (λειτουργίας) $O_1, O_2, \ldots$ που εναλλάσσονται με χρόνους αντικατάστασης (αργίας) $D_1, D_2, \ldots$. Οι τυχαίες μεταβλητές (O_n, D_n), $n \geq 1$, θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή $F_{O,D}(x,y)$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου λειτουργίας της μηχανής.

Είναι φανερό ότι ξεκινώντας από μια μηχανή που έχει μόλις αρχίσει να λειτουργεί, οι ανανεωτικοί κύκλοι αρχίζουν κάθε φορά που η μηχανή ξεκινά έναν νέο χρόνο λειτουργίας. Επομένως, ο χρόνος του n-οστού ανανεωτικού γεγονότος, S_n, είναι ο χρόνος που τελειώνει ο n-οστός χρόνος αντικατάστασης της μηχανής, οπότε η μηχανή ξαναμπαίνει σε λειτουργία. Επίσης, αφού μας ενδιαφέρει το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου λειτουργίας της μηχανής, είναι φυσικό να ορίσουμε ως $C(t)$ το συνολικό χρόνο λειτουργίας της μηχανής στο $(0,t]$. Επομένως έχουμε ότι

$$X_n = S_n - S_{n-1} = O_n + D_n,\ n \geq 1,$$
$$C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}) = O_n,\ n \geq 1.$$

Επομένως, έχουμε άμεσα ότι οι (X_n, C_n), $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, αφού οι (O_n, D_n), $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Συνεπώς, το στοιχειώδες ανανεωγικό θεωρήμα με κόστη είναι εφαρμόσιμο και έχουμε ότι το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου λειτουργίας της μηχανής είναι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]} = \frac{E[O]}{E[O]+E[D]}.$$

2.3 Εκκαθάριση αποθήκης Ι

Σε μια αποθήκη φθάνουν αντικείμενα σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία $\{A(t)\}$ με ενδιάμεσους χρόνους $Y_1, Y_2, \ldots$, με μέση τιμή μ. Μόλις συγκεντρωθούν m προϊόντα η αποθήκη εκκαθαρίζεται ακαριαία και η παρτίδα με τα m προϊόντα διανέμεται σε λιανοπωλητές. Υπάρχει εφάπαξ κόστος K ανά εκκαθάριση της αποθήκης, ανεξάρτητο του αριθμού των προϊόντων που θα εκκαθαριστούν. Επίσης υπάρχει κόστος k ανά εκκαθάριση προϊόντος και κόστος h ανά προϊόν και χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη. Μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους λειτουργίας της αποθήκης και η τιμή του m που τον ελαχιστοποιεί.

Έστω η ανανεωτική διαδικασία $\{N(t) : t \geq 0\}$ που μετράει το πλήθος των εκκαθαρίσεων της αποθήκης και S_n ο χρόνος της n-οστής εκκαθάρισης. Έστω, επίσης, $C(t)$ το συνολικό κόστος λειτουργίας της αποθήκης στο $(0,t]$. Για ευκολία στο συμβολισμό, ονομάζουμε $Y_{n,i}$ τον ενδιάμεσο χρόνο της $\{A(t)\}$ πριν την άφιξη του i-οστού αντικειμένου που φθάνει στον n-οστο κύκλο λειτουργίας του συστήματος (δηλαδή μεταξύ $n-1$-οστής και n-οστής εκκαθάρισης). Με άλλα λόγια, έχουμε $Y_{n,i} = Y_{(n-1)m+i}$, $n \geq 1$, $1 \leq i \leq m$. Έχουμε ότι

$$X_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{i=1}^{m} Y_{n,i},\ n \geq 1,$$
$$C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}) = K + mk + h\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j},\ n \geq 1.$$

Ο τελευταίος τύπος γίνεται φανερός βλέποντας ότι το i-οστό αντικείμενο του n-οστού κύκλου λειτουργίας θα παραμείνει στην αποθήκη για χρόνο $\sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j}$, μέχρι να συγκεντρωθούν τα αντικείμενα $i+1, i+2, \ldots, m$ για να εκκαθαριστεί και πάλι η αποθήκη. Επομένως έχουμε άμεσα ότι οι (X_n, C_n), $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Επομένως, το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη είναι εφαρμόσιμο και έχουμε ότι ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους λειτουργίας της αποθήκης είναι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Εδώ έχουμε

$$\begin{aligned} E[X_n] &= E\left[\sum_{i=1}^{m} Y_{n,i}\right] = m\mu, \quad n \geq 1, \\ E[C_n] &= E\left[K + mk + h\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j}\right] \\ &= K + mk + h\sum_{i=1}^{m}(m-i)\mu \\ &= K + mk + h\frac{(m-1)m}{2}\mu, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

και επομένως

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{K}{m\mu} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(m-1)}{2}. \tag{2.1}$$

Έστω ότι συμβολίζουμε το μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους ως συνάρτηση του m ως $c(m)$. Για την αντίστοιχη συνεχή επέκταση της $c(m)$ στο $(0,\infty)$ έχουμε

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{K}{\mu x} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(x-1)}{2}, \\ c'(x) &= -\frac{K}{\mu x^2} + \frac{h}{2}, \\ c''(x) &= \frac{2K}{\mu x^3}, \end{aligned}$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι η $c(x)$ είναι κυρτή και ελαχιστοποιείται στο σημείο

$$x^* = \sqrt{\frac{2K}{h\mu}}$$

που μηδενίζει την παράγωγό της. Επομένως, το βέλτιστο m είναι το $\lfloor x^* \rfloor$ ή $\lceil x^* \rceil$.

2.4 Εκκαθάριση αποθήκης ΙΙ

Σε μια αποθήκη φθάνουν αντικείμενα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson $\{A(t)\}$ με ρυθμό λ. Κάθε x χρονικές μονάδες η αποθήκη εκκαθαρίζεται ακαριαία και η παρτίδα με τα προϊόντα διανέμεται σε λιανοπωλητές. Υπάρχει εφάπαξ κόστος K ανά εκκαθάριση της αποθήκης, ανεξάρτητο του αριθμού των προϊόντων που θα εκκαθαριστούν. Επίσης υπάρχει κόστος k ανά εκκαθάριση προϊόντος και κόστος h ανά προϊόν και χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη. Μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους λειτουργίας της αποθήκης και η τιμή του x που τον ελαχιστοποιεί.

Έστω η ντετερμινιστική ανανεωτική διαδικασία $\{N(t) : t \geq 0\}$ που μετράει το πλήθος των εκκαθαρίσεων της αποθήκης και $S_n = nx$ ο χρόνος της n-οστής εκκαθάρισης. Έστω, επίσης, $C(t)$ το συνολικό κόστος λειτουργίας της αποθήκης στο $(0, t]$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
X_n &= S_n - S_{n-1} = x,\ n \geq 1, \\
C_n &= C(S_n) - C(S_{n-1}) \\
&= K + k(A(nx) - A((n-1)x)) \\
&\quad + h \int_0^x (A((n-1)x + u) - A((n-1)x)du,\ n \geq 1.
\end{aligned}$$

Πράγματι, στον n-οστό ανανεωτικό κύκλο λειτουργίας της αποθήκης, εκκαθαρίζονται τα αντικείμενα που έχουν συσσωρευθεί στο χρονικό διάστημα $((n-1)x, nx]$ που είναι συνολικά $A(nx) - A((n-1)x)$. Επιπλέον στο διάστημα $((n-1)x, nx]$ ο αριθμός των αντικειμένων στην αποθήκη τη χρονική στιγμή $(n-1)x + u$ είναι $A((n-1)x + u) - A((n-1)x)$, για $u \in (0, x]$. Είναι, επίσης, φανερό λόγω της ιδιότητας των ανεξάρτητων και ομογενών προσαυξήσεων της διαδικασίας Poisson ότι οι (X_n, C_n), $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Επομένως, το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη είναι εφαρμόσιμο και έχουμε ότι ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους λειτουργίας της αποθήκης είναι

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Εδώ έχουμε

$$\begin{aligned}
E[X_n] &= x, \quad n \geq 1, \\
E[C_n] &= K + kE[A(nx) - A((n-1)x)] \\
&\quad + h \int_0^x E[A((n-1)x + u) - A((n-1)x]du \\
&= K + k\lambda x + h \int_0^x \lambda u du \\
&= K + k\lambda x + \frac{h\lambda x^2}{2}, \quad n \geq 1,
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{K}{x} + k\lambda + \frac{h\lambda x}{2}.$$

Ας συμβολίσουμε με $c(x)$ το μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους ως συνάρτηση του x. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
c'(x) &= -\frac{K}{x^2} + \frac{h\lambda}{2}, \\
c''(x) &= \frac{2K}{x^3},
\end{aligned}$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι η $c(x)$ είναι κυρτή και ελαχιστοποιείται στο σημείο

$$x^* = \sqrt{\frac{2K}{h\lambda}}$$

που μηδενίζει την παράγωγό της. Επομένως, είναι βέλτιστο να εκκαθαρίζουμε την αποθήκη κάθε x^* χρονικές μονάδες. Σε αυτό το χρόνο θα έχουν συσσωρευτεί κατά μέση τιμή λx^* αντικείμενα, δηλαδή $\sqrt{2K\lambda/h}$. Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με το Παράδειγμα 2.3, όπου η βέλτιστη πολιτική λειτουργίας της αποθήκης ήταν να εκκαθαρίζεται όποτε μαζευτούν περίπου $\sqrt{2K/(h\mu)}$ αντικείμενα, αφού $\mu = \frac{1}{\lambda}$ στην περίπτωση της διαδικασίας Poisson.

2.5 Παρελθών, υπολειπόμενος και t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης

Θεωρούμε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, με ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων $X_1, X_2, \ldots$ με κατανομή $F_X(x)$, και χρόνους γεγονότων $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} A(t) &= t - S_{N(t)}, \quad t \geq 0, \\ R(t) &= S_{N(t)+1} - t, \quad t \geq 0, \\ T(t) &= S_{N(t)+1} - S_{N(t)}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

την ηλικία (παρελθόντα ή αναδρομικό χρόνο ανανέωσης - το $A(t)$ παραπέμπει στον όρο age process), τον υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης (προδρομικό χρόνο ανανέωσης - το $R(t)$ παραπέμπει στον όρο remaining renewal time process ή residual renewal time process) και τον t-εξαρτώμενο (το $T(t)$ παραπέμπει στο total renewal time process), αντίστοιχα.

Η τυχαία μεταβλητή $A(t)$ μετράει το χρόνο από το τελευταίο γεγονός της ανανεωτικής διαδικασίας πριν τη στιγμή t μέχρι τη στιγμή t. Η τυχαία μεταβλητή $R(t)$ μετράει το χρόνο από τη στιγμή t μέχρι το επόμενο γεγονός της ανανεωτικής διαδικασίας. Τέλος, η τυχαία μεταβλητή $T(t)$ μετράει το μήκος του ενδιάμεσου χρόνου ανανέωσης που περιλαμβάνει τη χρονική στιγμή t.

Οι τρεις αυτές διαδικασίες παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη στοχαστικών συστημάτων που περιλαμβάνουν ανανεωτικές διαδικασίες. Π.χ., σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης, όπου οι αφίξεις συμβαίνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία, η $R(t)$ μετράει το χρόνο από τη στιγμή t μέχρι την επόμενη άφιξη πελάτη. Σε ένα σύστημα αποθεμάτων, όπου οι παραγγελίες γίνονται σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία, η $R(t)$ μετράει το χρόνο από τη στιγμή t μέχρι την επόμενη πραγματοποίηση παραγγελίας.

Σκοπός μας είναι η μελέτη της μακροπρόθεσμης συμπεριφοράς αυτών των διαδικασιών. Ιδιαίτερα, θα επικεντρωθούμε στη μελέτη της $\{R(t)\}$, που είναι και η πιο σημαντική στις εφαρμογές. Αρχικά, θα προσδιορίσουμε τον μακροπρόθεσμο αναμενόμενο δειγματικό μέσο του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης, δηλαδή την ποσότητα

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t}.$$

Η ποσότητα αυτή είναι κατά κάποιο τρόπο η απάντηση στο ερώτημα: "Αν επιλεγεί τυχαία μια χρονική στιγμή, πόσος χρόνος απομένει μέχρι το επόμενο ανανεωτικό γεγονός; ". Ένας άλλος τρόπος για να μοντελοποιηθεί το ίδιο ερώτημα είναι να προσδιορίσουμε την ποσότητα $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$. Ο τρόπος που γίνεται αυτό αναπτύχθηκε στα Παραδείγματα 7 και 11 της παραγράφου 1.1.

Για να μελετήσουμε το πρόβλημα ορίζουμε μια διαδικασία κόστους $C(t) = \int_0^t R(u)du$. Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} C_n &= \int_{S_{n-1}}^{S_n} R(u)du = \int_{S_{n-1}}^{S_n} (X_n - (u - S_{n-1}))du \\ &= \int_0^{X_n} (X_n - u)du = \frac{X_n^2}{2}. \end{aligned}$$

Επομένως, αν $E[X_n] = \mu$ και $Var[X_n] = \sigma^2$, τότε εφαρμόζοντας το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t} = \frac{E[C_n]}{E[X_n]} = \frac{E[X_n^2]}{2E[X_n]} = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}. \tag{2.2}$$

Το γεγονός ότι ο μακροπρόθεσμος αναμενόμενος δειγματικός μέσος του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης δίνεται από αυτόν το τύπο και επομένως είναι ίσος με $\frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}$ και όχι με $\frac{\mu}{2}$ αναφέρεται ως ανανεωτικό παράδοξο. Πράγματι αν τα γεγονότα της ανανεωτικής διαδικασίας συμβαίνουν κατά μέσο όρο κάθε μ χρονικές μονάδες και επιλέξουμε μια χρονική στιγμή στην τύχη, φαίνεται λογικό ότι θα περιμένουμε $\frac{\mu}{2}$ χρονικές μονάδες για να δούμε το επόμενο γεγονός. Η αφελής αυτή διαίσθηση είναι σωστή μόνο όταν η ανανεωτική διαδικασία είναι προσδιοριστική (ντετερμινιστική), δηλαδή όταν τα ανανεωτικά γεγονότα συμβαίνουν ακριβώς κάθε μ χρονικές μονάδες (οπότε $\sigma = 0$). Όταν, όμως, υπάρχει τυχαιότητα και οι ενδιάμεσοι χρόνοι των γεγονότων δεν είναι ίσοι με μ, η τυχαία επιλεγμένη χρονική στιγμή παρατήρησης είναι πιθανότερο να πέσει σε μεγάλο ενδιάμεσο χρόνο ανανέωσης και επομένως και ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης θα είναι μεγάλος. Αυτή ακριβώς η παρατήρηση δείχνει ότι ο μακροπρόθεσμος αναμενόμενος δειγματικός μέσος του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης πρέπει να είναι μεγαλύτερος του μ και ο παραπάνω υπολογισμός δίνει την ακριβή του τιμή.

Για να γίνει ακόμα πιο κατανοητή αυτή η σκέψη, σκεφτείτε π.χ. την ακραία περίπτωση οι ενδιάμεσοι χρόνοι να είναι 0 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και 2μ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Τότε μια τυχαία επιλεγμένη χρονική στιγμή είναι αδύνατο να πέφτει σε ενδιάμεσο χρόνο 0, αλλά θα πέφτει πάντα σε ενδιάμεσο χρόνο 2μ, οπότε ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος θα είναι λογικό να είναι $\frac{2\mu}{2} = \mu$. Πράγματι στην περίπτωση αυτή η διασπορά των ενδιάμεσων χρόνων είναι $\sigma^2 = \frac{1}{2}(0-\mu)^2 + \frac{1}{2}(2\mu-\mu)^2 = \mu^2$ και ο τύπος δίνει $\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu} = \mu$.

Στη συνέχεια, προχωράμε στην οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης, $F_R(x)$, που ορίζεται ως

$$F_R(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{R(u)\le x\}}du\right]}{t},\ x \in \mathbb{R}.$$

Με άλλα λόγια, η ποσότητα $F_R(x)$ εκφράζει το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης είναι το πολύ x.

Για να μελετήσουμε το πρόβλημα ορίζουμε μια διαδικασία κόστους

$$C(t) = \int_0^t 1_{\{R(u)\le x\}} du,\ t \ge 0,$$

που για κάθε t καταγράφει το χρόνο που ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης ήταν το πολύ x, στο διάστημα $(0,t]$. Επομένως, το κόστος που συσσωρεύεται σε έναν ανανεωτικό κύκλο ισούται με το διάστημα που ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης είναι το πολύ x. Είναι φανερό ότι αν η διάρκεια του κύκλου, X_n, είναι μικρότερη ή ίση του x, τότε καθόλη τη διάρκεια του κύκλου ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης είναι το πολύ x και έχουμε $C_n = X_n$. Αν όμως $X_n > x$, τότε μόνο στις τελευταίες x χρονικές μονάδες του κύκλου ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης είναι το πολύ x και έχουμε $C_n = x$. Επομένως, είναι

$$C_n = \min(X_n, x).$$

Εφαρμόζοντας το Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη έχουμε

$$\begin{aligned} F_R(x) &= \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{R(u)\le x\}} du\right]}{t} = \frac{E[C_n]}{E[X_n]} \\ &= \frac{E[\min(X_n,x)]}{E[X_n]} = \frac{\int_0^\infty \Pr[\min(X_n,x) > t]dt}{\mu} \\ &= \frac{\int_0^x (1-F_X(t))dt}{\mu}. \end{aligned}$$

Η κατανομή αυτή αναφέρεται ως κατανομή ισορροπίας της συνάρτησης κατανομής $F_X(x)$. Η σύνδεση, λοιπόν, των δυο κατανομών μέσα στο πλαίσιο της ανανεωτικής θεωρίας είναι η εξής: Αν η $F_X(x)$ είναι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μιας ανανεωτικής διαδικασίας, η αντίστοιχη κατανομή ισορροπίας $F_R(x)$ είναι η κατανομή του χρόνου μέχρι το επόμενο γεγονός της ανανεωτικής διαδικασίας, αν την κοιτάξουμε μια τυχαία χρονική στιγμή.

2.6 Ασκήσεις

1. Σε μια στάση λεωφορείων φθάνουν επιβάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Η εταιρεία που εξυπηρετεί τη συγκεκριμένη στάση έχει δυο τύπους λεωφορείων, απλά και φυσούνες, που περνούν εναλλάξ από τη στάση. Ο χρόνος από την αναχώρηση απλού λεωφορείου μέχρι την άφιξη φυσούνας είναι x χρονικές μονάδες, ενώ ο χρόνος από την αναχώρηση φυσούνας μέχρι την άφιξη απλού λεωφορείου είναι y χρονικές μονάδες. Το κόστος ανά επίσκεψη στη στάση απλού λεωφορείου είναι K_1 και το κόστος ανά επίσκεψη φυσούνας είναι K_2. Το κόστος αναμονής ενός πελάτη ανά χρονική μονάδα είναι h. Να βρεθεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους και να βρεθούν οι τιμές των x και y που τον ελαχιστοποιούν.

2. Πελάτες φθάνουν σε ένα κατάστημα, σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ), και ζητάνε ένα συγκεκριμένο προϊόν. Το αρχικό απόθεμα του προϊόντος στο κατάστημα είναι S. Κάθε πελάτης που φθάνει στο κατάστημα ικανοποιείται άμεσα αν υπάρχει απόθεμα προϊόντος, αλλιώς χάνεται. Μόλις το απόθεμα του καταστήματος εξαντληθεί, το κατάστημα παραγγέλνει S μονάδες προϊόντος από τον προμηθευτή του, οι οποίες του παραδίδονται μετά από τυχαίο χρόνο με μέση τιμή L. Υποθέτουμε ότι το κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος και χρονική μονάδα στο κατάστημα είναι h. Το κόστος αγοράς ενός προϊόντος από το κατάστημα είναι c και η τιμή πώλησης είναι p. Το κόστος διεκπεραίωσης μας παραγγελίας είναι d ανεξάρτητα από το μέγεθός της. Να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους του καταστήματος.

3. Μια εταιρεία προσφέρει συμβόλαια μακράς διαρκείας στους πελάτες της για ένα συγκεκριμένο προϊόν που εμπορεύεται. Συγκεκριμένα, σε κάθε πελάτη της με συμβόλαιο μακράς διαρκείας προσφέρει την ακόλουθη πολιτική εγγύησης: Αντικαθιστά το προϊόν δωρεάν οσεσδήποτε φορές χαλάσει μέσα σε χρονικό διάστημα g από την αγορά του. Αν το προϊόν χαλάσει μετά από χρόνο g από την αγορά του, τότε ο πελάτης πρέπει να αγοράσει ένα νέο προϊόν με την ίδια πολιτική εγγύησης. Έστω ότι οι χρόνοι ζωής του προϊόντος είναι Exp($lambda$) και ότι c είναι η τιμή αγοράς ενός προϊόντος (όταν δεν αντικαθίσταται δωρεάν). Έστω επίσης d ($d < c$) το κόστος κατασκευής ενός προϊόντος για την εταιρεία. Να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους για έναν πελάτη της εταιρείας ο οποίος έχει συμβόλαιο μακράς διαρκείας με αυτήν, καθώς και ο μακροπρόθεσμος ρυθμός κέρδους από τον πελάτη αυτό για την εταιρεία.

4. Έστω μια αποθήκη που εξετάζεται στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου ως προς το απόθεμα ενός προϊόντος. Έστω X_n η στάθμη του αποθέματος στην αρχή της χρονικής περιόδου n και $X_1 = S > 0$ (S γνωστός αριθμός). Συμβολίζουμε με Y_n τη ζήτηση του προϊόντος τη χρονική περίοδο n. Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή $F_Y(x)$. Μόλις το απόθεμα πέσει κάτω από s (s γνωστός αριθμός με $s < S$) τότε αναπληρώνεται αμέσως σε ύψος S. Αποδείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \Pr[X_n \geq x] = \frac{1 + m_Y(S-x)}{1 + m_Y(S-s)}, \quad s \leq x \leq S,$$
όπου $m_Y(x)$ η ανανεωτική συνάρτηση ανανεωτικής διαδικασίας με ενδιάμεσους χρόνους τις $Y_1, Y_2, \ldots$.

5. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ) και το οποίο έχει έναν υπάλληλο. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο ελεύθερο αρχίζει να εξυπηρετείται και ο χρόνος εξυπηρέτησής του έχει κατανομή $F_X(x)$. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο απασχολημένο αναχωρεί άμεσα από το σύστημα και χάνεται για πάντα. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό των χαμένων πελατών.

6. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_A(x)$ και το οποίο έχει έναν υπάλληλο. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο ελεύθερο αρχίζει να εξυπηρετείται και ο χρόνος εξυπηρέτησής του είναι $\text{Exp}(\mu)$. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο απασχολημένο αναχωρεί άμεσα από το σύστημα και χάνεται για πάντα. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό των χαμένων πελατών.

7. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με χρόνους γεγονότων S_n και ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων X_n. Έστω, επίσης, $\{C_n\}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με (X_n, C_n), $n \geq 1$, ανεξάρτητες και ισόνομες με συνάρτηση κατανομης $F_{X,C}(x, y)$. Το C_n είναι το ονομαστικό κόστος που συσσωρεύεται στον n-οστό ανανεωτικό κύκλο και πληρώνεται στο τέλος του. Υποθέτουμε ότι τα κόστη αποπληθωρίζονται με έναν συνεχή αποπληθωριστή $\alpha > 0$. Έστω TC το συνολικό αποπληθωρισμένο κόστος στον άπειρο χρονικό ορίζοντα, δηλαδή

$$TC = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n} C_n.$$

Να αποδείξετε ότι

$$E[TC] = \frac{E[Ce^{-\alpha X}]}{1 - E[e^{-\alpha X}]}.$$

3

Μαρκοβιανές αλυσίδες με κόστη: Βασική θεωρία

3.1 Επισκόπηση των Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου

Το πιο απλό μοντέλο για την περιγραφή της κατάστασης ενός στοχαστικού δυναμικού συστήματος με διακριτό χώρο καταστάσεων σε διακριτό χρόνο είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 28 (Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου) *Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n : n \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ αν*

(i) $X_n \in \mathcal{S}$, $n \geq 0$, *και $\mathcal{S}$ αριθμήσιμο,*

(ii) $\Pr[X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i] = \Pr[X_{n+1} = j | X_n = i]$, $n \geq 0$, $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in \mathcal{S}$ *(Μαρκοβιανή ιδιότητα).*

Αν, επιπλέον, οι πιθανότητες $\Pr[X_{n+1} = j | X_n = i]$ δεν εξαρτώνται από το n, η Μαρκοβιανή αλυσίδα λέγεται ομογενής. Συμβολίζουμε τότε τις πιθανότητες αυτές με p_{ij} και ο πίνακας $\mathbf{P} = (p_{ij})$ αναφέρεται ως πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Η συνάρτηση πιθανότητας $\pi^{(0)} = (\pi_i^{(0)})$ με $\pi_i^{(0)} = \Pr[X_0 = i]$ αναφέρεται ως αρχική κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Σε ό,τι ακολουθεί θα περιοριστούμε σε ομογενείς Μαρκοβιανές αλυσίδες. Η συμπεριφορά μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας προσδιορίζεται πλήρως από την αρχική της κατανομή και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασής της. Σε πρώτο επίπεδο, μας ενδιαφέρουν οι υπολογισμοί που αφορούν την εξέλιξη μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας σε πεπερασμένο χρόνο. Ιδιαίτερα, μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός των πιθανοτήτων μετάβασης n-οστής τάξης, $p_{ij}^{(n)} = \Pr[X_n = j | X_0 = i]$, καθώς και ο προσδιορισμός των πιθανοτήτων $\pi_j^{(n)} = \Pr[X_n = j]$. Ο πίνακας $\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$ αναφέρεται ως πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης n-οστής τάξης της Μαρκοβιανής αλυσίδας, ενώ η συνάρτηση πιθανότητας $\pi^{(n)} = (\pi_i^{(n)})$ με $\pi_i^{(n)} = \Pr[X_n = i]$ αναφέρεται ως η μεταβατική κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας τη στιγμή n.

Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 29 (Βασικοί υπολογισμοί για Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου σε πεπερασμένη χρονική στιγμή) *Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n : n \geq 0\}$ με* *χώρο καταστάσεων* $\mathcal{S}$*, αρχική κατανομή* $\pi^{(0)} = (\pi_i^{(0)})$ *και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης* $\mathbf{P} = (p_{ij})$*. Τότε έχουμε*

(i) *Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός συγκεκριμένου μονοπατιού* $i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_n$ *είναι*

$$\Pr[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n] = \pi_{i_0}^{(0)} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

(ii) *Οι πιθανότητες μετάβασης* n*-οστής τάξης υπολογίζονται αναδρομικά από τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(0)} &= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j, \\ 0, & \text{αν } i \neq j, \end{cases} \\ p_{ij}^{(1)} &= p_{ij}, \\ p_{ij}^{(n)} &= \sum_{r \in \mathcal{S}} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(n-k)}, \ n \geq 2, \ 1 \leq k \leq n-1, \end{aligned}$$

που γράφονται σε πινακική μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(0)} &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{P}^{(1)} &= \mathbf{P}, \\ \mathbf{P}^{(n)} &= \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{P}^{(n-k)}, \ n \geq 2, \ 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n, \ n \geq 0.$$

(iii) *Οι μεταβατικές πιθανότητες υπολογίζονται από τη σχέση*

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^{(0)} p_{ij}^{(n)},$$

που γράφεται σε πινακική μορφή ως

$$(\pi^{(n)})^T = (\pi^{(0)})^T \mathbf{P}^{(n)} = (\pi^{(0)})^T \mathbf{P}^n.$$

Το (i) αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό τύπο για τον υπολογισμό της πιθανότητας τομής ενδεχομένων και εφαρμόζοντας τη Μαρκοβιανή ιδιότητα. Οι σχέσεις για τις $p_{ij}^{(0)}$ και $p_{ij}^{(1)}$ είναι προφανείς, ενώ η σχέση για τις $p_{ij}^{(n)}$, $n \geq 2$, προκύπτει με δέσμευση στην X_k από το θεώρημα ολικής πιθανότητας. Ομοίως και το (iii) προκύπτει δεσμεύοντας στην X_0, χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας.

Δοθείσης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου και δυο καταστάσεων i, j λέμε ότι η j είναι προσπελάσιμη από την i (συμβολικά $i \to j$), αν υπάρχει $n \geq 0$ τέτοιο ώστε $p_{ij}^{(n)} > 0$. Αν η i είναι προσπελάσιμη από την j, και, αντίστροφα, η j είναι προσπελάσιμη από την i, λέμε ότι οι i, j επικοινωνούν (συμβολικά $i \leftrightarrow j$). Η επικοινωνία είναι σχέση ισοδυναμίας και επομένως ο χώρος καταστάσεων διαμερίζεται σε κλάσεις επικοινωνίας (αδιαχώριστες κλάσεις), όπου όλες οι καταστάσεις μιας κλάσης επικοινωνούν μεταξύ τους. Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου λέγεται αδιαχώριστη, αν έχει μόνο μια κλάση επικοινωνίας, δηλαδή όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους, διαφορετικά λέγεται διαχωρίσιμη. Μια κλάση επικοινωνίας $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ λέγεται κλειστή αν δεν υπάρχουν $i \in \mathcal{C}$ και $j \notin \mathcal{C}$, με $p_{ij} > 0$, αλλιώς λέγεται ανοικτή. Αν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα εισέλθει κάποια στιγμή σε μια κλειστή κλάση, λέμε ότι απορροφήθηκε σε αυτήν, αφού είναι αδύνατο να ξαναβγεί. Δοθείσης μιας κλειστής κλάσης Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες απορρόφησης σε αυτήν ξεκινώντας από οποιαδήποτε κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας, καθώς και τους αντίστοιχους μέσους χρόνους απορρόφησης. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 30 (Πιθανότητες και μέσοι χρόνοι απορρόφησης) *Έστω $\{X_n : n \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$. Έστω, επίσης, $\mathcal{C}$ κλειστή κλάση επικοινωνίας. Ορίζουμε*

$$T_{\mathcal{C}} = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \mathcal{C}\}$$

τον χρόνο πρώτης εισόδου ή απορρόφησης της Μαρκοβιανής αλυσίδας στο $\mathcal{C}$. Επίσης, έστω

$$h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X_0 = i], \quad i \in \mathcal{S},$$

η πιθανότητα απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i, και

$$m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}} | X_0 = i], \quad i \in \mathcal{S},$$

ο μέσος χρόνος απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i. Τότε:

(i) *Η $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος*

$$x_i = 1, \ i \in \mathcal{C}, \tag{3.1}$$
$$x_i = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} x_j, \ i \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}. \tag{3.2}$$

(ii) *Η $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος*

$$y_i = 0, \ i \in \mathcal{C}, \tag{3.3}$$
$$y_i = 1 + \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} y_j, \ i \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}. \tag{3.4}$$

Είναι άμεσο να δούμε ότι οι πιθανότητες και οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης ικανοποιούν τις παραπάνω εξισώσεις (3.1)-(3.4), δεσμεύοντας στην πρώτη μετάβαση της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Πράγματι, ξεκινώντας από μια κατάσταση i, η απορρόφηση είναι βέβαια και ο μέσος χρόνος απορρόφησης είναι μηδενικός, αν η $i \in \mathcal{C}$. Αν $i \notin \mathcal{C}$, τότε στο πρώτο βήμα η Μαρκοβιανή αλυσίδα θα μεταβεί σε κάποια κατάσταση j και θα πρέπει ξεκινώντας από αυτήν να απορροφηθεί στο $\mathcal{C}$. Το γιατί οι πιθανότητες και οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης είναι η ελάχιστη λύση των παραπάνω εξισώσεων απαιτεί περισσότερη εργασία.

Δοθείσης μιας κατάστασης j μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας, ορίζουμε h_j της πιθανότητα επανόδου σε αυτήν και με m_j τον αντίστοιχο μέσο χρόνο επανόδου. Για να υπολογίσουμε αυτές τις ποσότητες, θεωρούμε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που προκύπτει αν τροποποιήσουμε την αρχική Μαρκοβιανή αλυσίδα, κάνοντας την κατάσταση j απορροφητική. Τότε, μπορούμε να υπολογίσουμε σε αυτήν τη νέα αλυσίδα τις πιθανότητες απορρόφησης $h_i(\{j\})$ και τους μέσους χρόνους απορρόφησης $m_i(\{j\})$ και είναι

$$h_j = \sum_{i \in \mathcal{S}} p_{ji} h_i(\{j\}),$$
$$m_j = 1 + \sum_{i \in \mathcal{S}} p_{ji} m_i(\{j\}).$$

Ορισμός 31 (Επαναληπτικότητα - παροδικότητα καταστάσεων) *Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n : n \geq 0\}$ και κατάστασή της, j, με πιθανότητα επανόδου h_j και μέσο χρόνο επανόδου m_j.*

(i) *Η j λέγεται θετικά επαληπτική, αν $h_j = 1$ και $m_j < \infty$.*
(ii) *Η j λέγεται μηδενικά επαληπτική, αν $h_j = 1$ και $m_j = \infty$.*
(iii) *Η j λέγεται παροδική, αν $h_j < 1$.*

Οι ιδιότητες της θετικής επαναληπτικότητας, της μηδενικής επαναληπτικότητας και της παροδικότητας είναι ιδιότητες των κλάσεων επικοινωνίας, δηλαδή, αν οι καταστάσεις i και j επικοινωνούν τότε είναι ίδιου τύπου ως προς την θετική επαναληπτικότητα, μηδενική επαναληπτικότητα και παροδικότητα.

Ισχύει επίσης ότι οι καταστάσεις μιας ανοικτής κλάσης επικοινωνίας είναι παροδικές, ενώ οι καταστάσεις μιας πεπερασμένης κλειστής κλάσης επικοινωνίας είναι θετικά επαναληπτικές. Επομένως, η μόνη περίπτωση που απαιτεί περαιτέρω διερεύνηση είναι αυτή της άπειρης κλειστής κλάσης. Εκεί, είναι ανοικτά όλα τα ενδεχόμενα: Μπορεί οι καταστάσεις της να είναι όλες παροδικές ή όλες μηδενικά επαναληπτικές ή όλες θετικά επαναληπτικές.

Μια άλλη ιδιότητα μιας κατάστασης είναι η περιοδικότητα/απεριοδικότητα. Έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 32 (Περιοδικότητα καταστάσεων) *Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n : n \geq 0\}$ και κατάστασή της, j, με*

$$d_j = MK\Delta\{n : p_{jj}^{(n)} > 0\}.$$

Η j λέγεται απεριοδική αν $d_j = 1$.
Η j λέγεται περιοδική με περίοδο d_j αν $d_j > 1$.

Αν $p_{jj} > 0$ τότε έχουμε προφανώς ότι η j είναι απεριοδική. Αλλά η συνθήκη αυτή είναι ικανή και όχι αναγκαία. Επίσης, οι ιδιότητες της απεριοδικότητας και της περιοδικότητας είναι ιδιότητες των κλάσεων επικοινωνίας, δηλαδή, αν οι καταστάσεις i και j επικοινωνούν τότε $d_i = d_j$.

Προχωράμε, τώρα, στην παρουσίαση της οριακής συμπεριφοράς των Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου. Δεδομένου ότι οι περισσότερες εφαρμογές αφορούν αδιαχώριστες αλυσίδες, θα περιοριστούμε στην περίπτωση αυτή, που είναι και η πιο σημαντική. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 33 (Οριακή συμπεριφορά αδιαχώριστων Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου) *Έστω $\{X_n : n \geq 0\}$ μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$. Η $\{X_n : n \geq 0\}$ είναι θετικά επαναληπτική, αν και μόνο αν, το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας*

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i p_{ij}, \ j \in \mathcal{S}, \tag{3.5}$$

έχει λύση που ικανοποιεί και την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j = 1.$$

Αν υπάρχει τέτοια λύση $\pi = (\pi_j)$, τότε είναι μοναδική. Επιπλέον, όλες της οι συντεταγμένες είναι θετικές και κάθε άλλη λύση $\mathbf{x} = (x_j)$ του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας είναι πολλαπλάσιό της: $\mathbf{x} = c\pi$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

(i) *Η πιθανότητα π_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j, δηλαδή,*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k = j\}}}{n} = \pi_j, \quad \text{με πιθανότητα } 1, \quad j \in \mathcal{S}.$$

Δηλαδή, η π είναι η οριακή δειγματική ή οριακή εμπειρική κατανομή της $\{X_n\}$.

(ii) *Η πιθανότητα π_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j, δηλαδή,*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E[\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k = j\}}]}{n} = \pi_j, \quad j \in \mathcal{S}.$$

(iii) *Η πιθανότητα π_j ισούται με τον αντίστροφο του μέσου χρόνου επανόδου στην κατάσταση j:*

$$\pi_j = \frac{1}{m_j}, \quad j \in \mathcal{S}.$$

(iv) *Η πιθανότητα π_j είναι η C-οριακή πιθανότητα (Cesaro οριακή πιθανότητα) της κατάστασης j:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \pi_j^{(k)}}{n} = \pi_j, \ j \in \mathcal{S}.$$

Δηλαδή, η π είναι η C-οριακή κατανομή της $\{X_n\}$.

(v) *Αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι και απεριοδική, τότε η πιθανότητα π_j είναι η οριακή πιθανότητα της κατάστασης j:*

$$\lim_{n \to \infty} \pi_j^{(n)} = \pi_j, \ j \in \mathcal{S}.$$

Δηλαδή, η π είναι η οριακή κατανομή της $\{X_n\}$.

(vi) *Αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει αρχική κατανομή την π, τότε κάθε μεταβατική κατανομή της δίνεται πάλι από την π:*

$$\pi^{(0)} = \pi \;\Rightarrow \pi^{(n)} = \pi,\; n \geq 0.$$

Δηλαδή, η π είναι η στάσιμη κατανομή της $\{X_n\}$.

Από το θεώρημα 33 γίνεται φανερό ότι η κατανομή π φέρει τη σημαντικότερη πληροφορία για τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου. Αναφέρεται ως οριακή εμπειρική, C-οριακή, οριακή και στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας, καθώς και ως κατανομή ισορροπίας. Αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει τη στάσιμη κατανομή της ως αρχική, οι μεταβατικές της κατανομές είναι όλες ίσες με τη στάσιμη (βλέπε (vi)) και η Μαρκοβιανή αλυσίδα λέγεται στάσιμη ή λέμε ότι βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας. Διαισθητικά, αυτό σημαίνει ότι έχει περάσει αρκετός χρόνος που το στοχαστικό σύστημα λειτουργεί και η επίδραση της αρχικής του κατάστασης έχει χαθεί και παρουσιάζει ομοιόμορφη συμπεριφορά στο χρόνο. Για τα (ii), (iv) και (v) ισχύουν και οι αντίστοιχοι τύποι που αφορούν τις δεσμευμένες ποσότητες ως προς την αρχική κατάσταση. Δηλαδή, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{E[\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}}|X_0=i]}{n} &= \pi_j, \quad i,j \in \mathcal{S},\\
\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)}}{n} &= \pi_j, \quad i,j \in \mathcal{S},\\
\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} &= \pi_j, \quad i,j \in \mathcal{S}.
\end{aligned}$$

Μια διαισθητική ερμηνεία του (iv) είναι ότι η στάσιμη πιθανότητα π_j εκφράζει την πιθανότητα η Μαρκοβιανή αλυσίδα να βρίσκεται στην κατάσταση j μια χρονική στιγμή k που έχει επιλεγεί ομοιόμορφα από το χρονικό διάστημα $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$, για μεγάλο n. Δηλαδή, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[X_{K_n} = j] = \pi_j,\; j \in \mathcal{S},$$

όπου η K_n είναι ομοιόμορφη στο $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ και ανεξάρτητη της $\{X_n : n \geq 0\}$. Πράγματι

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Pr[X_{K_n} = j] &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Pr[K_n = k] \Pr[X_{K_n} = j | K_n = k]\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \Pr[X_k = j]\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \pi_j^{(k)}}{n} = \pi_j, \quad j \in \mathcal{S}.
\end{aligned}$$

Τα περισσότερα από τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 33 μπορούν να δικαιολογηθούν διαισθητικά, παρότι οι αυστηρές αποδείξεις τους δεν είναι απλές. Π.χ. για μια διαισθητική αιτιολόγηση των (i), (ii), ας συμβολίσουμε με π_j το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j. Τότε η ποσότητα $\pi_j p_{ji}$ εκφράζει το μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων τύπου $j \to i$, δηλαδή,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j, X_{k+1}=i\}}}{n} = \pi_j p_{ji}, \quad j, i \in \mathcal{S}.$$

Αυτό είναι φανερό αφού η p_{ji} εκφράζει το ποσοστό των φορών που η αλυσίδα μετακινείται προς την i, όταν βρίσκεται στην j. Επομένως, η ποσότητα $\sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_j p_{ji}$ εκφράζει το μακροπρόθεσμο ρυθμό αναχωρήσεων από την κατάσταση j, ενώ η ποσότητα $\sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_i p_{ij}$ εκφράζει το μακροπρόθεσμο ρυθμό αφίξεων στην κατάσταση j. Αυτοί οι δυο ρυθμοί θα πρέπει να είναι ίσοι, αφού κάθε άφιξη στην j ακολουθείται από μια αναχώρηση από αυτήν, δηλαδή αφίξεις και αναχωρήσεις στην j βρίσκονται σε μια 1-1 αντιστοιχία. Οπότε πρέπει να ισχύει

$$\pi_j = \sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_j p_{ji} = \sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_i p_{ij},\ j \in \mathcal{S},$$

δηλαδή τα μακροπρόθεσμα ποσοστά του χρόνου π_j που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στις διάφορες καταστάσεις πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας.

Για το (iii), παρατηρούμε ότι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών επισκέψεων σε κάθε συγκεκριμένη κατάσταση j μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι, οπότε οι στιγμές επισκέψεων στην j αντιστοιχούν στα γεγονότα μιας ανανεωτικής διαδικασίας και μάλιστα είναι αναγεννητικές στιγμές για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα. Εφαρμόζοντας το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα για την ανανεωτική διαδικασία των επισκέψεων στην j, έχουμε ότι ο μακροπρόθεσμος ρυθμός επισκέψεων στην j, δηλαδή η π_j, ισούται με τον αντίστροφο του μέσου ενδιάμεσου χρόνου της ανανεωτικής διαδικασίας, που στην περίπτωση μας είναι ο μέσος χρόνος επανόδου στη j, m_j.

Το (iv) είναι μια απλή αναδιατύπωση του (ii), που προκύπτει αφού μπορούμε να εναλλάξουμε τη μέση τιμή με το άθροισμα. Για το (v), είναι γνωστό ότι αν το όριο μιας ακολουθίας υπάρχει, τότε υπάρχει και το C-όριό της και είναι ίσα. Επομένως, αν το όριο της $\pi_j^{(n)}$ υπάρχει, τότε θα είναι αναγκαστικά ίσο με π_j, λόγω του (iv). Η απεριοδικότητα είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει αυτό το όριο.

Τέλος, υπολογίζοντας τις πιθανότητες $\pi_j^{(n+1)} = \Pr[X_{n+1} = j]$, δεσμεύοντας στην X_n, έχουμε

$$\pi_j^{(n+1)} = \sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_i^{(n)} p_{ij}, \quad j \in \mathcal{S}. \tag{3.6}$$

Οπότε, αν το όριο $\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$ υπάρχει θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_i^{(n)} p_{ij} = \sum_{i\in\mathcal{S}} \lim_{n\to\infty} \pi_i^{(n)} p_{ij}, \quad j \in \mathcal{S},$$

που δείχνει ότι οι οριακές πιθανότητες $\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$ ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας (3.5).

Επίσης, οι εξίσωσεις (3.6), σε συνδυασμό με τις εξισώσεις ισορροπίας (3.5), δείχνουν ότι, αν $\pi_i^{(0)} = \pi_i$, $i \in \mathcal{S}$, τότε $\pi_i^{(1)} = \pi_i$, $i \in \mathcal{S}$, και επαγωγικά έχουμε $\pi_i^{(n)} = \pi_i$, $i \in \mathcal{S}$, για $n \geq 0$, οπότε έχουμε το (vi).

Σημειώνουμε, επίσης, ότι, αν ο χώρος καταστάσεων μιας αδιαχώριστης Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου είναι πεπερασμένος, τότε υπάρχει πάντοτε η στάσιμη κατανομή. Αυτό συμβαίνει, διότι, όπως έχουμε αναφέρει, οι κλειστές πεπερασμένες κλάσεις επικοινωνίας είναι πάντα θετικά επαναληπτικές.

Μια άλλη χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι η στάσιμη κατανομή π ικανοποιεί, επίσης, και τις λεγόμενες εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας που απαιτούν ο μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων που εξέρχονται από ένα σύνολο καταστάσεων $\mathcal{A}$ να ισούται με τον μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων που εισέρχονται στο ίδιο σύνολο, δηλαδή

$$\sum_{j \in \mathcal{A}} \sum_{i \in \mathcal{A}^c} \pi_j p_{ji} = \sum_{i \in \mathcal{A}^c} \sum_{j \in \mathcal{A}} \pi_i p_{ij}, \ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}.$$

3.2 Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου με κόστη - Μέσος ρυθμός κόστους

Η εξέλιξη ενός στοχαστικού συστήματος που περιγράφεται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου συνδέεται, συνήθως, με κάποια δομή κόστους/αμοιβής. Π.χ., η παραμονή σε κάθε κατάσταση ή η μετάβαση από κατάσταση σε κατάσταση μπορεί να επάγει κόστος. Πιο συγκεκριμένα, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 34 (Δομή κόστους σε Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου) *Έστω $\{X_n : n \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$.*

(i) *Μια δομή κόστους παραμονής είναι μια συνάρτηση $c : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, που δίνει για κάθε κατάσταση j του $\mathcal{S}$, το κόστος $c(j)$ μιας επίσκεψης (δηλαδή, χρονικής μονάδας παραμονής) της $\{X_n\}$ σε αυτήν.*

(ii) *Μια δομή κόστους μετάβασης είναι μια συνάρτηση $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, που δίνει για κάθε μετάβαση $i \to j$ του $\mathcal{S}$, το κόστος μετάβασης $d(i,j)$ που επάγει η $\{X_n\}$.*

Το παρακάτω αποτέλεσμα παρέχει έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού του μακροπρόθεσμου ρυθμού κόστους.

Θεώρημα 35 (Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους σε Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου) *Έστω $\{X_n : n \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$. Έστω $c : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ μια δομή κόστους παραμονής και $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ μια δομή κόστους μετάβασης. Ορίζουμε*

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (c(X_k) + d(X_k, X_{k+1})), \ n \geq 0,$$

το συνολικό κόστος που συσσωρεύεται μέχρι την n-οστή μετάβαση της Μαρκοβιανής *αλυσίδας. Υποθέτουμε ότι η $\{X_n\}$ είναι αδιαχώριστη και θετικά επαναληπτική με κατανομή ισορροπίας $\pi = (\pi_j : j \in \mathcal{S})$ και*

$$\sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j \left(|c_j| + \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{jk}|d(j,k)| \right) < \infty.$$

Τότε:

(i) *Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C(n)}{n} = \sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j c(j) + \sum_{j\in\mathcal{S}} \sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_j p_{jk} d(j,k), \quad \text{με πιθανότητα } 1.$$

(ii) *Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[C(n)]}{n} = \sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j c(j) + \sum_{j\in\mathcal{S}} \sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_j p_{jk} d(j,k).$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι διαισθητικά εύλογο, αφού η π_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση j, οπότε και το κόστος θα είναι $c(j)$ για μια χρονική μονάδα. Επομένως ο όρος $\sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j c(j)$ εκφράζει το μέσο κόστος παραμονής ανά χρονική μονάδα, δεσμεύοντας στην κατάσταση που μπορεί να βρίσκεται το σύστημα. Από την άλλη μεριά, η $\pi_j p_{jk}$ εκφράζει το μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων από την j στην k. Κάθε τέτοια μετάβαση επάγει κόστος $d(j,k)$. Επομένως, ο όρος $\sum_{j\in\mathcal{S}} \sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_j p_{jk} d(j,k)$ εκφράζει το μέσο κόστος μεταβάσεων ανά χρονική μονάδα, δεσμεύοντας στην κατάσταση j που μπορεί να βρίσκεται το σύστημα και στην κατάσταση k στην οποία μεταβαίνει.

3.3 Επισκόπηση των Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου

Για την περιγραφή της κατάστασης ενός στοχαστικού δυναμικού συστήματος με διακριτό χώρο καταστάσεων σε συνεχή χρόνο, το απλούστερο μοντέλο είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου. Κατ΄ αναλογία με τις Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 36 (Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου) *Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t) : t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ αν*

(i) *$X(t) \in \mathcal{S}$, $t \geq 0$, και $\mathcal{S}$ αριθμήσιμο,*
(ii) $\Pr[X(t+s) = j | X(u), 0 \leq u < s, X(s) = i] = \Pr[X(t+s) = j | X(s) = i]$, *$t, s \geq 0$, $i, j \in \mathcal{S}$ (Μαρκοβιανή ιδιότητα).*

Η πιθανότητα $p_{ij}(s, s+t) = \Pr[X(t+s) = j | X(s) = i]$ αναφέρεται ως πιθανότητα μετάβασης από την i στη j σε χρόνο t τη στιγμή s. Αν δεν εξαρτάται από το s η Μαρκοβιανή αλυσίδα αναφέρεται ως ομογενής. Τότε συμβολίζουμε την $p_{ij}(s, s+t)$ με $p_{ij}^{(t)}$. Ο πίνακας $\mathbf{P}^{(t)} = (p_{ij}^{(t)})$ αναφέρεται ως πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Η συνάρτηση πιθανότητας $\mathbf{p}^{(0)} = (p_i^{(0)})$ *με* $p_i^{(0)} = \Pr[X(0) = i]$, $i \in \mathcal{S}$, *αναφέρεται ως αρχική κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας.*

Σε ό,τι ακολουθεί θα περιοριστούμε και πάλι σε ομογενείς Μαρκοβιανές αλυσίδες. Η $\{X(t)\}$ είναι πλήρως καθορισμένη, αν δίνονται η αρχική κατανομή της $(p_i^{(0)} : i \in \mathcal{S})$ με

$$p_i^{(0)} = \Pr[X(0) = i], \ i \in \mathcal{S},$$

και οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης. Ειδικότερα, θα δούμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες $p_j^{(t)} = \Pr[X(t) = j]$. Η συνάρτηση πιθανότητας $\mathbf{p}^{(t)} = (p_i^{(t)})$ με $p_i^{(t)} = \Pr[X(t) = i]$ αναφέρεται ως η μεταβατική κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας τη στιγμή t.

Το πρόβλημα που υπάρχει είναι ότι, ενώ στο διακριτό χρόνο χρειαστήκαμε μόνο έναν πίνακα μετάβασης, τον $\mathbf{P} = (p_{ij})$, εδώ χρειαζόμαστε άπειρους πίνακες μετάβασης, τους $\mathbf{P}^{(t)} = (p_{ij}^{(t)})$, έναν για κάθε $t \geq 0$. Δηλαδή, δεν υπάρχει πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης 1ης τάξης, δεδομένου ότι ο χρόνος είναι συνεχής, και κατά συνέπεια διαιρετός επ΄ άπειρον. Το υποκατάστατο των πιθανοτήτων μετάβασης 1ης τάξης στο συνεχή χρόνο είναι οι ρυθμοί μετάβασης. Συγκεκριμένα, για μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου αποδεικνύεται ότι υπάρχουν τα όρια

$$q_{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}^{(h)}}{h} = \left[\frac{d}{dt} p_{ij}^{(t)} \right]_{t=0}, i, j \in \mathcal{S} \text{ με } i \neq j,$$

$$q_i = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - p_{ii}^{(h)}}{h} = - \left[\frac{d}{dt} p_{ii}^{(t)} \right]_{t=0}, i \in \mathcal{S}$$

που αναφέρονται αντίστοιχα ως ο ρυθμός μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j και ως ο ρυθμός εξόδου από την κατάσταση i. Προφανώς ισχύει

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}, \quad i \in \mathcal{S}.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτόμαστε ότι

$$p_{ij}^{(h)} = q_{ij} h + o(h), \ j \neq i$$
$$p_{ii}^{(h)} = 1 - q_i h + o(h),$$

όπου $o(h)$ κάποια συνάρτηση του h τέτοια ώστε $o(h)/h \to 0$, καθώς $h \to 0^+$. Επομένως οι ρυθμοί q_{ij} καθορίζουν την ‟τοπική συμπεριφορά" της $\{X(t)\}$, από την οποία μπορούν να συναχθούν οι $p_{ij}^{(t)}$ για οποιοδήποτε t. Επομένως, μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου μπορεί να περιγραφεί από την αρχική κατανομή της και τον πίνακα ρυθμών μετάβασης

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός αναφέρεται και ως απειροστικός γεννήτορας της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Τα εκτός διαγωνίου στοιχεία του είναι μη αρνητικά, ενώ τα διαγώνια είναι μη-θετικά (ένα διαγώνιο στοιχείο q_{ii} είναι 0 μόνο αν η κατάσταση i είναι απορροφητική, δηλαδή μετά από μια είσοδο σε αυτήν η αλυσίδα παραμένει για πάντα εκεί). Επιπλέον, τα αθροίσματα των γραμμών του πίνακα είναι όλα 0.

Ανάλογα με τις Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 37 (Βασικοί υπολογισμοί για Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου σε πεπερασμένη χρονική στιγμή) *Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{X(t) : t \geq 0\}$, με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$, αρχική κατανομή $\mathbf{p}^{(0)} = (p_i^{(0)})$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$. Έστω επίσης $\mathbf{P}^{(t)} = (p_{ij}^{(t)})$. Τότε έχουμε:*

(i) *Η πιθανότητα μιας συγκεκριμένης διαδοχής καταστάσεων σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ είναι:*

$$\begin{aligned}&\Pr[X(0) = i_0, X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \ldots, X(t_n) = i_n]\\ &= p_{i_0}^{(0)} p_{i_0 i_1}^{(t_1)} p_{i_1 i_2}^{(t_2 - t_1)} \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(t_n - t_{n-1})}.\end{aligned}$$

(ii) *Οι πιθανότητες μετάβασης t-οστής τάξης ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\begin{aligned}p_{ij}^{(0)} &= \delta_{ij},\\ p_{ij}^{(t)} &= \sum_{r \in \mathcal{S}} p_{ir}^{(s)} p_{rj}^{(t-s)},\ 0 \leq s \leq t,\end{aligned}$$

που γράφονται σε πινακική μορφή

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(0)} &= \mathbf{I},\\ \mathbf{P}^{(t)} &= \mathbf{P}^{(s)} \mathbf{P}^{(t-s)},\ 0 \leq s \leq t.\end{aligned}$$

(iii) *Οι πιθανότητες μετάβασης t-οστής τάξης είναι η λύση του συστήματος (προδρομικών) εξισώσεων Chapman - Kolmogorov:*

$$\begin{aligned}p_{ij}^{(0)} &= \delta_{ij},\\ \frac{d}{dt} p_{ij}^{(t)} &= -p_{ij}^{(t)} q_j + \sum_{k \neq j} p_{ik}^{(t)} q_{kj},\ t \geq 0,\end{aligned} \tag{3.7}$$

που γράφονται σε πινακική μορφή

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(0)} &= \mathbf{I},\\ \frac{d}{dt} \mathbf{P}^{(t)} &= \mathbf{P}^{(t)} \mathbf{Q},\ t \geq 0.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathbf{P}^{(t)} = e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Q}^n \frac{t^n}{n!},\ t \geq 0.$$

(iv) *Οι μεταβατικές πιθανότητες* $p_j^{(t)} = \Pr[X(t) = j]$, $j \in \mathcal{S}$, *υπολογίζονται από τη σχέση*

$$p_j^{(t)} = \sum_{i \in \mathcal{S}} p_i^{(0)} p_{ij}^{(t)},$$

και επομένως ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων Chapman - Kolmogorov

$$\frac{d}{dt} p_j^{(t)} = -p_j^{(t)} q_j + \sum_{k \neq j} p_k^{(t)} q_{kj}, \ t \geq 0, \tag{3.8}$$

που γράφεται σε πινακική μορφή

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}^{(t)} = \mathbf{p}^{(t)} \mathbf{Q}, \ t \geq 0.$$

Επομένως,

$$(\mathbf{p}^{(t)})^T = (\mathbf{p}^{(0)})^T \mathbf{P}^{(t)} = (\mathbf{p}^{(0)})^T e^{\mathbf{Q}t}.$$

Η απόδειξη των (i), (ii) και (iv) γίνεται εντελώς ανάλογα με τη διακριτή περίπτωση. Όσον αφορά την (iii), χρησιμοποιούμε την (ii) και κοιτάμε την εξέλιξη της Μαρκοβιανής αλυσίδας στο διάστημα $[0, t+h]$, για $h \to 0^+$. Έχουμε

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(t+h)} &= \sum_k p_{ik}^{(t)} p_{kj}^{(h)} \\ &= p_{ij}^{(t)} (1 - q_j h) + \sum_{k \neq j} p_{ik}^{(t)} q_{kj} h + o(h), \ h \to 0^+ \end{aligned}$$

οπότε

$$\frac{p_{ij}^{(t+h)} - p_{ij}^{(t)}}{h} = -p_{ij}^{(t)} q_j + \sum_{k \neq j} p_{ik}^{(t)} q_{kj} + \frac{o(h)}{h}, \ h \to 0^+.$$

Παίρνοντας $h \to 0^+$ συνάγουμε τις διαφορικές εξισώσεις (3.7). Η πινακική μορφή τους είναι άμεση και η λύση τους προκύπτει από τη θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

Μπορούμε, τώρα, να προχωρήσουμε στη μελέτη των χρόνων παραμονής μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου στις διάφορες καταστάσεις. Αυτή θα μας οδηγήσει σε κριτήρια, εναλλακτικά του ορισμού, για το πότε μια στοχαστική διαδικασία είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και επιπλέον θα χρειαστεί για τον υπολογισμό πιθανοτήτων και μέσων χρόνων απορρόφησης σε αντιστοιχία με τις Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου.

Όσον αφορά το χρόνο παραμονής T_i σε μια κατάσταση i πριν από κάποια μετάβαση σε κατάσταση $j \neq i$ έχουμε ότι είναι εκθετικός με παράμετρο q_i. Πράγματι έχουμε

$$\Pr[T_i > t + h | T_i > t] = \Pr[X(t+h) = i | X(t) = i] = p_{ii}^{(h)} = 1 - q_i h + o(h),$$

ανεξάρτητος του t, οπότε η T_i έχει την αμνήμονη ιδιότητα και άρα έχει εκθετική κατανομή. Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι η παράμετρος της εκθετικής είναι η q_i.

Όταν η $\{X(t)\}$ φύγει από κάποια κατάσταση i, η επόμενη κατάσταση θα είναι η j με πιθανότητα $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$. Δηλαδή, η στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου, $\{X_n\}$, που περιγράφει την κατάσταση της $\{X(t)\}$ αμέσως μετά την n-οστή της μετάβαση είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με πιθανότητες μετάβασης $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$ και αναφέρεται ως εμφυτευμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου της $\{X(t)\}$ σε στιγμές μεταβάσεων.

Επομένως, ένας εναλλακτικός τρόπος για να σκεφτόμαστε την εξέλιξη μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου, με βάση ρυθμούς είναι ότι, όντας σε μια κατάσταση i, μένει σε αυτήν για εκθετικό χρονο q_i και κατόπιν πηδάει σε κάποια κατάσταση $j \neq i$ με πιθανότητα $\frac{q_{ij}}{q_i}$.

Γνωρίζουμε ότι αν $T_1, T_2, \dots, T_k$ είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με αντίστοιχες παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, τότε η $\min(T_1, T_2, \dots, T_k)$ είναι επίσης εκθετική με παράμετρο $\sum_{i=1}^k \lambda_i$. Επιπλέον, το ενδεχόμενο $\{T_j = \min(T_1, T_2, \dots, T_k)\}$ είναι ανεξάρτητο της τυχαίας μεταβλητής $\min(T_1, T_2, \dots, T_k)$ και ισχύει ότι $\Pr[T_j = \min(T_1, T_2, \dots, T_k)] = \lambda_j / \sum_{i=1}^k \lambda_i$. Με βάση την ιδιότητα αυτή, μπορούμε να συνάγουμε το ακόλουθο κριτήριο για το πότε μια στοχαστική διαδικασία είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου.

Θεώρημα 38 (Κριτήριο Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου) *Έστω $\{X(t)\}$ μια στοχαστική διαδικασία με διακριτό χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ και δοθέντος ότι $X(t) = i$,*

(i) *υπάρχουν χρόνοι $T_{ik} \sim Exp(q_{ik})$, $k \in \mathcal{S} \setminus \{i\}$,*
(ii) *ο χρόνος που θα γίνει η επόμενη μετάβαση είναι $\min_k T_{ik}$ και η κατάσταση j στην οποία πηγαίνει η $\{X(t)\}$ είναι αυτή για την οποία $T_{ij} = \min_k T_{ik}$.*

Τότε η $\{X(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.

Το κριτήριο αυτό μας επιτρέπει να ελέγχουμε εύκολα κατά πόσο μια στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την εξέλιξη ενός συστήματος σε συνεχή χρόνο είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου. Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα που δείχνουν τη χρήση αυτού του κριτηρίου. Επίσης, στο κεφάλαιο **;;** παρουσιάζονται περισσότερα παραδείγματα, από τη Θεωρία Ουρών Αναμονής.

Όσον αφορά τις έννοιες της προσπελασιμότητας, της επικοινωνίας, της επαναληπτικότητας (θετικής και μηδενικής) και της παροδικότητας, οι ορισμοί και τα βασικά αποτελέσματα είναι εντελώς ανάλογα με την περίπτωση των Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου. Η έννοια της περιοδικότητας - απεριοδικότητας δεν υπάρχει βέβαια εδώ, αφού ο χρόνος είναι άπειρα διαιρετός. Παρακάτω περιγράφουμε τις έννοιες αυτές στο πλαίσιο των Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου.

Δοθείσης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου και δυο καταστάσεων i, j λέμε ότι η j είναι προσπελάσιμη από την i (συμβολικά $i \to j$), αν υπάρχει $t \geq 0$ τέτοιο ώστε $p_{ij}^{(t)} > 0$. Αυτό αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη μονοπατιού

$$i = i_0 \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_n = j,$$

με $q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_{n-1} i_n} > 0$. Αν η i είναι προσπελάσιμη από την j, και, αντίστροφα, η

j είναι προσπελάσιμη από την i, λέμε ότι οι i, j επικοινωνούν (συμβολικά $i \leftrightarrow j$). Η επικοινωνία είναι σχέση ισοδυναμίας και επομένως ο χώρος καταστάσεων διαμερίζεται σε κλάσεις επικοινωνίας (αδιαχώριστες κλάσεις), όπου όλες οι καταστάσεις μιας κλάσης επικοινωνούν μεταξύ τους. Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου λέγεται αδιαχώριστη, αν έχει μόνο μια κλάση επικοινωνίας, δηλαδή όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους, διαφορετικά λέγεται διαχωρίσιμη. Μια κλάση επικοινωνίας $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ λέγεται κλειστή αν δεν υπάρχουν $i \in \mathcal{C}$ και $j \notin \mathcal{C}$, με $p_{ij} > 0$, αλλιώς λέγεται ανοικτή. Αν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα εισέλθει κάποια στιγμή σε μια κλειστή κλάση, λέμε ότι απορροφήθηκε σε αυτήν, αφού είναι αδύνατο να ξαναβγεί. Δοθείσης μιας κλειστής κλάσης Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες απορρόφησης σε αυτήν, ξεκινώντας από οποιαδήποτε κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας, καθώς και τους αντίστοιχους μέσους χρόνους απορρόφησης. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 39 (Πιθανότητες και μέσοι χρόνοι απορρόφησης) *Έστω $\{X(t) : t \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$. Έστω, επίσης, $\mathcal{C}$ κλειστή κλάση επικοινωνίας. Ορίζουμε*

$$T_{\mathcal{C}} = \inf\{t \geq 0 : X(t) \in \mathcal{C}\}$$

τον χρόνο πρώτης εισόδου ή απορρόφησης της Μαρκοβιανής αλυσίδας στο $\mathcal{C}$. Επίσης, έστω

$$h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X(0) = i], \quad i \in \mathcal{S},$$

η πιθανότητα απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i και

$$m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}} | X(0) = i], \quad i \in \mathcal{S},$$

ο μέσος χρόνος απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i. Τότε:

(i) *Η $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος*

$$x_i = 1, \quad i \in \mathcal{C}, \tag{3.9}$$

$$x_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j, \quad i \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}. \tag{3.10}$$

(ii) *Η $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος*

$$y_i = 0, \quad i \in \mathcal{C}, \tag{3.11}$$

$$y_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} y_j, \quad i \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}. \tag{3.12}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι οι πιθανότητες και οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης ικανοποιούν τις εξισώσεις (3.9)-(3.12), δεσμεύοντας στην πρώτη μετάβαση της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Πράγματι, ξεκινώντας από μια κατάσταση i, η απορρόφηση είναι βέβαια και ο μέσος χρόνος απορρόφησης είναι μηδενικός, αν η $i \in \mathcal{C}$. Αν $i \notin \mathcal{C}$, τότε στο πρώτο βήμα η Μαρκοβιανή αλυσίδα θα μεταβεί σε κάποια κατάσταση j και θα πρέπει ξεκινώντας από αυτήν να απορροφηθεί στο $\mathcal{C}$. Η πιθανότητα η επόμενη κατάσταση να είναι η j είναι $\frac{q_{ij}}{q_i}$, ενώ ο μέσος χρόνος μετάβασης είναι ο μέσος χρόνος παραμονής στην i. Όπως έχουμε δει, ο χρόνος παραμονής στην i έχει την $\mathrm{Exp}(q_i)$ κατανομή, με μέση τιμή είναι $\frac{1}{q_i}$.

Δοθείσης μιας κατάστασης j μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας, ορίζουμε h_j της πιθανότητα επανόδου σε αυτήν και με m_j τον αντίστοιχο μέσο χρόνο επανόδου. Για να υπολογίσουμε αυτές τις ποσότητες, θεωρούμε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που προκύπτει, αν τροποποιήσουμε την αρχική Μαρκοβιανή αλυσίδα, κάνοντας την κατάσταση j απορροφητική. Τότε, μπορούμε να υπολογίσουμε σε αυτή τη νέα αλυσίδα τις πιθανότητες απορρόφησης $h_i(\{j\})$ και τους μέσους χρόνους απορρόφησης $m_i(\{j\})$ και είναι

$$\begin{aligned} h_j &= \sum_{j\neq i} \frac{q_{ji}}{q_j} h_i(\{j\}), \\ m_j &= \frac{1}{q_j} + \sum_{j\neq i} \frac{q_{ji}}{q_j} m_i(\{j\}). \end{aligned}$$

Ορισμός 40 (Επαναληπτικότητα - παροδικότητα καταστάσεων) *Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{X(t) : t \geq 0\}$ και κατάστασή της, j, με πιθανότητα επανόδου h_j και μέσο χρόνο επανόδου m_j.*

(i) *Η j λέγεται θετικά επαληπτική αν $h_j = 1$ και $m_j < \infty$.*
(ii) *Η j λέγεται μηδενικά επαληπτική αν $h_j = 1$ και $m_j = \infty$.*
(iii) *Η j λέγεται παροδική αν $h_j < 1$.*

Οι ιδιότητες της θετικής επαναληπτικότητας, της μηδενικής επαναληπτικότητας και της παροδικότητας είναι ιδιότητες των κλάσεων επικοινωνίας, δηλαδή, αν οι καταστάσεις i και j επικοινωνούν, τότε είναι ίδιου τύπου ως προς τη θετική επαναληπτικότητα, τη μηδενική επαναληπτικότητα και την παροδικότητα.

Ισχύει, επίσης, ότι οι καταστάσεις μιας ανοικτής κλάσης επικοινωνίας είναι παροδικές, ενώ οι καταστάσεις μιας πεπερασμένης κλειστής κλάσης επικοινωνίας είναι θετικά επαναληπτικές. Επομένως, η μόνη περίπτωση που απαιτεί περαιτέρω διερεύνηση είναι αυτή της άπειρης κλειστής κλάσης. Εκεί, είναι ανοικτά όλα τα ενδεχόμενα: Μπορεί οι καταστάσεις της να είναι όλες παροδικές ή όλες μηδενικά επαναληπτικές ή όλες θετικά επαναληπτικές.

Μπορούμε, τώρα, να προχωρήσουμε στη μελέτη της οριακής συμπεριφοράς των Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου. Τα αποτελέσματα είναι εντελώς ανάλογα με τα αποτελέσματα στις Μαρκοβιανές αλυσιδες διακριτού χρόνου. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση των αδιαχώριστων αλυσίδων, αφού αυτές είναι που κατά κανόνα εμφανίζονται στις εφαρμογές. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 41 (Οριακή συμπεριφορά αδιαχώριστων Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου) *Έστω $\{X(t) : t \geq 0\}$ μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$. Η $\{X(t) : t \geq 0\}$ είναι θετικά επαναληπτική, αν και μόνο αν, το σύστημα των* *εξισώσεων ισορροπίας*

$$p_j q_j = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}, \ j \in \mathcal{S}, \tag{3.13}$$

έχει λύση που ικανοποιεί και την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} p_j = 1.$$

Αν υπάρχει τέτοια λύση $\mathbf{p} = (p_j)$, *τότε είναι μοναδική. Επιπλέον, όλες της οι συντεταγμένες είναι θετικές και κάθε άλλη λύση* $\mathbf{x} = (x_j)$ *του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας είναι πολλαπλάσιό της:* $\mathbf{x} = c\mathbf{p}$, *για κάποιο* $c \in \mathbb{R}$. *Έχουμε:*

(i) *Η πιθανότητα* p_j *εκφράζει το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση* j, *δηλαδή,*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}} du}{t} = p_j, \quad \text{με πιθανότητα } 1, \quad j \in \mathcal{S}.$$

Δηλαδή, η $\mathbf{p}$ *είναι η οριακή δειγματική ή οριακή εμπειρική κατανομή της* $\{X(t)\}$.

(ii) *Η πιθανότητα* p_j *εκφράζει το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση* j, *δηλαδή,*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}} du]}{t} = p_j, \quad j \in \mathcal{S}.$$

(iii) *Η πιθανότητα* p_j *υπολογίζεται από το ρυθμό εξόδου από την* j, q_j, *και το μέσο χρόνο επανόδου στην* j, m_j, *ως εξής:*

$$p_j = \frac{1}{q_j m_j}, \quad j \in \mathcal{S}.$$

(iv) *Η πιθανότητα* p_j *είναι η* C*-οριακή πιθανότητα (Cesaro οριακή πιθανότητα) της κατάστασης* j*:*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t p_j^{(u)} du}{t} = p_j, \quad j \in \mathcal{S}.$$

Δηλαδή, η $\mathbf{p}$ *είναι η* C*-οριακή κατανομή της* $\{X(t)\}$.

(v) *Η πιθανότητα* π_j *είναι η οριακή πιθανότητα της κατάστασης* j*:*

$$\lim_{t \to \infty} p_j^{(t)} = p_j, \quad j \in \mathcal{S}.$$

Δηλαδή, η $\mathbf{p}$ *είναι η οριακή κατανομή της* $\{X(t)\}$.

(vi) *Αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει αρχική κατανομή την* $\mathbf{p}$, *τότε κάθε μεταβατική κατανομή της δίνεται πάλι από την* $\mathbf{p}$*:*

$$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{p} \ \Rightarrow \mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}, \ n \geq 0.$$

Δηλαδή, η $\mathbf{p}$ *είναι η στάσιμη κατανομή της* $\{X(t)\}$.

Από το θεώρημα 41, βλέπουμε ότι η κατανομή $\mathbf{p}$ φέρει τη σημαντικότερη πληροφορία για τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου. Αναφέρεται ως οριακή εμπειρική, C-οριακή, οριακή και στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας, καθώς και ως κατανομή ισορροπίας. Αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει τη στάσιμη κατανομή της ως αρχική, οι μεταβατικές της κατανομές είναι όλες ίσες με τη στάσιμη (βλέπε (vi)) και η Μαρκοβιανή αλυσίδα λέγεται στάσιμη ή λέμε ότι βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας. Διαισθητικά, αυτό σημαίνει ότι έχει περάσει αρκετός χρόνος από τότε που το στοχαστικό σύστημα άρχισε να λειτουργεί και η επίδραση της αρχικής του κατάστασης έχει χαθεί. Έτσι, παρουσιάζει ομοιόμορφη συμπεριφορά στο χρόνο. Για τα (ii), (iv) και (v) ισχύουν και οι αντίστοιχοι τύποι που αφορούν τις δεσμευμένες ποσότητες ως προς την αρχική κατάσταση. Δηλαδή, έχουμε:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}}du|X(0)=i]}{t} = p_j, \quad i,j\in\mathcal{S},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t p_{ij}^{(u)}du}{t} = p_j, \quad i,j\in\mathcal{S},$$

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)} = p_j, \quad i,j\in\mathcal{S}.$$

Μια διαισθητική ερμηνεία του (iv) είναι ότι η στάσιμη πιθανότητα p_j εκφράζει την πιθανότητα η Μαρκοβιανή αλυσίδα να βρίσκεται στην κατάσταση j μια χρονική στιγμή u που έχει επιλεγεί ομοιόμορφα από το χρονικό διάστημα $[0,t]$, για μεγάλο t. Δηλαδή, ισχύει

$$\lim_{t\to\infty} \Pr[X(U_t)=j] = p_j,\ j\in\mathcal{S},$$

όπου η U_t είναι ομοιόμορφη στο $[0,t]$ και ανεξάρτητη της $\{X(t): t\geq 0\}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \Pr[X(U_t)=j] &= \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty \Pr[X(U_t)=j|U_t=u]dF_{U_t}(u)\\ &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \Pr[X(u)=j]\frac{1}{t}du\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t p_j^{(u)}du}{t} = p_j, \quad j\in\mathcal{S}. \end{aligned}\tag{3.14}$$

Τα περισσότερα από τα συμπεράσματα του θεωρήματος 41 μπορούν να δικαιολογηθούν διαισθητικά, παρότι οι αυστηρές αποδείξεις τους δεν είναι απλές. Π.χ., για μια διαισθητική αιτιολόγηση των (i), (ii) ας συμβολίσουμε με p_j το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j. Τότε η ποσότητα $p_j q_{ji}$ εκφράζει το μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων τύπου $j\to i$. Αυτό είναι φανερό αφού η q_{ji} εκφράζει το ρυθμό των μεταβάσεων προς την i, για κάθε χρονική μονάδα παραμονής στην j, ενώ η p_j είναι το ποσοστό του χρονου που η αλυσίδα περνάει στην j. Επομένως, η ποσότητα $\sum_{i\neq j} p_j q_{ji}$ εκφράζει το μακροπρόθεσμο ρυθμό αναχωρήσεων από την κατάσταση j, ενώ η ποσότητα $\sum_{i\neq j} p_i q_{ij}$ εκφράζει το μακροπρόθεσμο ρυθμό αφίξεων στην κατάσταση j. Αυτοί οι δυο ρυθμοί θα πρέπει να είναι ίσοι, αφού κάθε άφιξη στην j ακολουθείται από μια αναχώρηση από αυτήν, δηλαδή αφίξεις και αναχωρήσεις σε κάθε κατάσταση j βρίσκονται σε μια 1-1 αντιστοιχία. Οπότε, κατ΄ ανάγκη ισχύει

$$p_j q_j = \sum_{i \neq j} p_j q_{ji} = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}, \quad j \in \mathcal{S},$$

δηλαδή, τα μακροπρόθεσμα ποσοστά του χρόνου p_j που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στις διάφορες καταστάσεις πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας (3.13).

Για το (iii), παρατηρούμε ότι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών επισκέψεων σε κάθε συγκεκριμένη κατάσταση j μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι, οπότε οι στιγμές επισκέψεων στην j αντιστοιχούν στα γεγονότα μιας ανανεωτικής διαδικασίας και μάλιστα είναι αναγεννητικές στιγμές για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα. Εφαρμόζουμε το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με αμοιβές για την ανανεωτική διαδικασία των επισκέψεων στην j, με αμοιβή 1 για κάθε χρονική μονάδα παραμονής στην j. Έχουμε ότι η μέση αμοιβή ανά χρονική μονάδα, που είναι το ποσοστό του χρόνου που η αλυσίδα περνάει στην j, δηλαδή η p_j, ισούται με τον λόγο της μέσης αμοιβής σε έναν ανανεωτικό κύκλο, διά τη μέση διάρκεια ενός ανανεωτικού κύκλου. Στη διάρκεια ενός κύκλου, δηλαδή μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην j, η αλυσίδα παραμένει στην j για έναν εκθετικό χρόνο με παράμετρο q_j. Επομένως, η μέση αμοιβή σε έναν κύκλο είναι $\frac{1}{q_j}$. Από την άλλη, η μέση διάρκεια του κύκλου είναι m_j, οπότε προκύπτει άμεσα η (iii).

Το (iv) είναι μια απλή αναδιατύπωση του (ii) που προκύπτει αφού μπορούμε να εναλλάξουμε τη μέση τιμή με το άθροισμα. Για το (v), είναι γνωστό ότι αν το όριο μιας συνάρτησης υπάρχει, τότε υπάρχει και το C-όριό της και είναι ίσα. Για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου αποδεικνύεται ότι το όριο της $p_j^{(t)}$ υπάρχει, οπότε θα είναι αναγκαστικά ίσο με p_j, λόγω του (iv).

Οι εξισώσεις Chapman - Kolmogorov (3.7), σε συνδυασμό με τις εξισώσεις ισορροπίας (3.13), δείχνουν ότι αν $p_j^{(t_0)} = p_j$, $j \in \mathcal{S}$, για κάποιο $t_0 \geq 0$, τότε $\frac{d}{dt} p_j^{(t_0)} = 0$ και μπορούμε να συνάγουμε ότι η $p_j(t)$ θα είναι σταθερή για κάθε j και $t \geq t_0$. Επομένως, αν $p_j^{(0)} = p_j$, $j \in \mathcal{S}$, τότε $p_j^{(t)} = p_j$, $j \in \mathcal{S}$, $t \geq 0$ και έχουμε το (vi).

Σημειώνουμε, επίσης, ότι όποτε ο χώρος καταστάσεων μιας αδιαχώριστης Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου είναι πεπερασμένος, τότε υπάρχει πάντοτε η στάσιμη κατανομή.

Μια χρήσιμη παρατήρηση, που σε πολλές περιπτώσεις διευκολύνει τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής, είναι ότι αυτή ικανοποιεί επίσης και τις λεγόμενες εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας. Οι εξισώσεις αυτές απαιτούν ο μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων που εξέρχονται από ένα σύνολο καταστάσεων $\mathcal{A}$ να ισούται με τον μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων που εισέρχονται στο ίδιο σύνολο, δηλαδή

$$\sum_{j \in \mathcal{A}} \sum_{i \in \mathcal{A}^c} p_j q_{ji} = \sum_{i \in \mathcal{A}^c} \sum_{j \in \mathcal{A}} p_i q_{ij}, \quad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}.$$

Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση αυτή, είναι εύκολο να προσδιορίσουμε τη στάσιμη κατανομή μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου, $\{X(t)\}$, με χώρο καταστάσεων $\mathbb{N}_0$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{αν } i \geq 0,\ j = i+1, \\ \mu_i & \text{αν } i \geq 1,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Μια τέτοια αλυσίδα αναφέρεται ως διαδικασία γέννησης - θανάτου, δεδομένου ότι περιγράφει την εξέλιξη του μεγέθους ενός πληθυσμού που αυξομειώνεται μέσω γεννήσεων (μεταβάσεων τύπου $i \to i+1$) και θανάτων (μεταβάσεων τύπου $i \to i-1$).

Θεωρώντας τα σύνολα $\mathcal{A}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $n \geq 1$, έχουμε τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} = \mu_n p_n,\ n \geq 1,$$

που εξισώνουν τους μακροπρόθεσμους ρυθμούς εξόδου και εισόδου σε κάθε σύνολο. Από αυτές παίρνουμε ότι

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} p_0,\ n \geq 1.$$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, συνάγουμε ότι η διαδικασία γέννησης - θανάτου είναι ευσταθής, δηλαδή υπάρχει στάσιμη κατανομή, αν και μόνο αν

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} < \infty.$$

Τότε, η στάσιμη κατανομή της διαδικασίας γέννησης - θανάτου δίνεται από τον τύπο

$$p_n = \begin{cases} B & \text{αν } n = 0, \\ B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} & \text{αν } n \geq 1. \end{cases}$$

3.4 Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου με κόστη - Μέσος ρυθμός κόστους

Όπως και στην περίπτωση του διακριτού χρόνου, η εξέλιξη ενός στοχαστικού συστήματος που περιγράφεται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου συνδέεται, συνήθως, με κάποια δομή κόστους/αμοιβής. Ποιό συγκεκριμένα, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 42 (Δομή κόστους σε Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου) *Έστω $\{X(t) : t \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.*

(i) *Μια δομή κόστους παραμονής είναι μια συνάρτηση $c : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, που δίνει για κάθε κατάσταση j του $\mathcal{S}$, το κόστος $c(j)$ ανά χρονική μονάδα παραμονής της $\{X(t)\}$ σε αυτήν.*

(ii) *Μια δομή κόστους μετάβασης είναι μια συνάρτηση $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, που δίνει για κάθε μετάβαση $i \to j$ του $\mathcal{S}$, το κόστος μετάβασης $d(i, j)$ της $\{X(t)\}$.*

Το παρακάτω αποτέλεσμα παρέχει έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού του μακροπρόθεσμου ρυθμού κόστους.

Θεώρημα 43 (Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους σε Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου) *Έστω $\{X(t) : t \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$. Έστω $c : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ μια δομή κόστους παραμονής και $d : \mathcal{S}\times\mathcal{S} \to \mathbb{R}$ μια δομή κόστους μετάβασης. Έστω επίσης $A(t)$ το πλήθος των μεταβάσεων που έχουν συμβεί στο $(0, t]$ στην $\{X(t)\}$ και $\{X_n : n \geq 0\}$ η αντίστοιχη εμφυτευμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου σε στιγμές μεταβάσεων της $\{X(t)\}$. Ορίζουμε*

$$C(t) = \int_0^t c(X(u))du + \sum_{n=0}^{A(t)-1} d(X_n, X_{n+1}),\ t \geq 0,$$

το συνολικό κόστος που συσσωρεύεται μέχρι τη στιγμή t από την εξέλιξη της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X(t)\}$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική με κατανομή ισορροπίας $\mathbf{p} = (p_j : j \in \mathcal{S})$ και

$$\sum_{j\in\mathcal{S}} p_j \left(|c_j| + \sum_{k\in\mathcal{S}} q_{jk}|d(j,k)|\right) < \infty.$$

Τότε:

(i) *Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = \sum_{j\in\mathcal{S}} p_j c(j) + \sum_{j\in\mathcal{S}}\sum_{k\neq j} p_j q_{jk} d(j,k), \quad \text{με πιθανότητα } 1.$$

(ii) *Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \sum_{j\in\mathcal{S}} p_j c(j) + \sum_{j\in\mathcal{S}}\sum_{k\neq j} p_j q_{jk} d(j,k).$$

Το αποτέλεσμα είναι διαισθητικά εύλογο, αφού η p_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση j, οπότε και το κόστος θα είναι $c(j)$ για μια χρονική μονάδα. Επομένως ο όρος $\sum_{j\in\mathcal{S}} p_j c(j)$ εκφράζει το μέσο κόστος παραμονής ανά χρονική μονάδα, δεσμεύοντας στην κατάσταση που μπορεί να βρίσκεται το σύστημα. Από την άλλη μεριά, η $p_j q_{jk}$ εκφράζει το μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων από την j στην k. Κάθε τέτοια μετάβαση επάγει κόστος $d(j,k)$. Επομένως, ο όρος $\sum_{j\in\mathcal{S}}\sum_{k\in\mathcal{S}} p_j q_{jk} d(j,k)$ εκφράζει το μέσο κόστος μεταβάσεων ανά χρονική μονάδα, δεσμεύοντας στην κατάσταση j που μπορεί να βρίσκεται το σύστημα και στην κατάσταση k στην οποία μεταβαίνει.

3.5 Ασκήσεις

1. Θεωρούμε δυο δοχεία A και B. Το A περιέχει αρχικά N λευκά σφαιρίδια ενώ το B περιέχει αρχικά N μαύρα σφαιρίδια. Κατόπιν, σε κάθε στάδιο του πειράματος τύχης που συνεχίζεται επ' άπειρον επιλέγεται τυχαία ένα σφαιρίδιο από κάθε

δοχείο και τα δυο σφαιρίδια αλλάζουν δοχεία. Έστω X_n το πλήθος των λευκών σφαιριδίων που περιέχει το δοχείο A μετά το n-οστό στάδιο ($X_0 = N$).

1. Δείξτε ότι η $\{X_n :\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου και βρείτε τις πιθανότητες μετάβασής της.
2. Βρείτε μια αναγωγική σχέση που να συνδέει τις $E[X_{n+1}]$ και $E[X_n]$.
3. Βρείτε έναν κλειστό τύπο για την $E[X_n]$.

2. Θεωρούμε τον απλό τυχαίο περίπατο στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$, με πιθανότητες μετάβασης $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q$ και $p_{i,i} = r$, για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ $(p + q + r = 1)$. Να βρεθούν οι πιθανότητες μετάβασης n-οστής τάξης $p_{i,i}^{(n)}$, για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ και $n \geq 0$.

3. Δίνεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες μετάβασης n-οστής τάξης $p_{1,1}^{(n)}$ για κάθε $n \geq 0$.

4. Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου $\{X_n\}$, με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S} = \{1, 2\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix},$$

όπου $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Έστω $\tilde{T}_j = \min\{n \geq 1 : X_n = j\}$, για κάθε $j \in \mathcal{S}$.

1. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες μετάβασης n-οστής τάξης $p_{ij}^{(n)}$, για κάθε $i, j \in \mathcal{S}$ και $n \geq 0$.
2. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $f_{ij}^{(n)} = \Pr[T_j = n | X_0 = i]$, για κάθε $i, j \in \mathcal{S}$ και $n \geq 1$.
3. Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές $\tilde{m}_{ij} = E[T_j | X_0 = i]$, για κάθε $i, j \in \mathcal{S}$.

5. Θεωρούμε ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος με πιθανότητα κορώνας p και πιθανότητα γραμμάτων $q = 1 - p$ σε κάθε ρίψη. Οι ρίψεις επαναλαμβάνονται μέχρι να εμφανιστούν για πρώτη φορά είτε r συνεχόμενες κορώνες είτε m συνεχόμενα γράμματα. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να εμφανιστούν r συνεχόμενες κορώνες πριν εμφανιστούν m συνεχόμενα γράμματα.

6. Έστω $\{X_n\}$ ο απλός τυχαίος περίπατος στο σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ με απορροφητικά φράγματα στο 0 και στο N. Δηλαδή, οι μη-μηδενικές πιθανότητες μετάβασης είναι οι $p_{0,0} = p_{N,N} = 1$ και $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q$ για $i = 1, 2, \ldots, N - 1$. Έστω T ο χρόνος μέχρι την απορρόφηση, δηλαδή $T = \min\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ ή } N\}$.

1. Αποδείξτε ότι, για $q \neq p$, η πιθανότητα απορρόφησης στο 0 είναι

$$\Pr[X_T = 0] = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1},\ 0 \leq i \leq N.$$

2. Βρείτε την $\Pr[X_T = 0]$, $0 \leq i \leq N$, όταν $q = p$.
3. Αποδείξτε ότι, για $q \neq p$, ο μέσος χρόνος απορρόφησης είναι

$$E[T|X_0 = i] = \frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p} \cdot \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N},\ 0 \leq i \leq N.$$

4. Βρείτε την $E[T|X_0 = i]$, $0 \leq i \leq N$, όταν $q = p$.

7. Να βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας και να κατατάξετε ως προς την περιοδικότητα/απεριοδικότητα και την θετική επαναληπτικότητα/μηδενική επαναληπτικότητα/παροδικότητα τις καταστάσεις των Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Δίνεται η αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων τους μη-αρνητικούς ακεραίους και τις ακόλουθες μη-μηδενικές πιθανότητες μετάβασης:

$$p_{0,i} = p_i,\ i \geq 0,$$
$$p_{i,i-1} = 1,\ i \geq 1.$$

Έστω ότι $p_i > 0$ για κάθε $i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ και $\sum_{i=0}^{\infty} ip_i = \infty$. Τί είναι η αλυσίδα ως προς την περιοδικότητα: απεριοδική ή περιοδική; Τί είναι η αλυσίδα ως προς την επαναληπτικότητα: θετικά επαναληπτική, μηδενικά επαναληπτική ή παροδική;

9. Δυο δοχεία A και B περιέχουν συνολικά N σφαιρίδια. Εκτελούμε το ακόλουθο πείραμα τύχης: Σε κάθε βήμα ένα σφαιρίδιο από τα N επιλέγεται τυχαία και μετά τοποθετείται στο A ή στο B με πιθανότητες p και q αντίστοιχα. Έστω X_n ο αριθμός των σφαιριδίων στο δοχείο A μετά το n-οστό βήμα. Να βρεθούν τα μακροπρόθεσμα ποσοστά του χρόνου (δηλαδή των βημάτων) που το δοχείο A θα περιέχει i σφαιρίδια για $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.

10. Θεωρήστε μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου $\{X_n\}$ με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$ και υποθέστε ότι κάθε επίσκεψη σε μια κατάσταση i επάγει κόστος $c(i)$. Ορίζουμε το μέσο αποπληθωρισμένο συνολικό κόστος που συσσωρεύεται στις περιόδους $0, 1, \ldots, N$, αρχίζοντας από την κατάσταση i ως

$$\phi_i^{(N)} = E\left[\sum_{n=0}^{N} \alpha^n c(X_n) | X_0 = i\right],$$

(όπου $\alpha \in (0,1)$ ο αποπληθωριστής). Επίσης, ορίζουμε το μέσο κόστος ανά περίοδο στις περιόδους $0, 1, \ldots, N$ αρχίζοντας από την κατάσταση i ως

$$g_i^{(N)} = \frac{1}{N+1} E\left[\sum_{n=0}^{N} c(X_n) | X_0 = i\right].$$

1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ένα αναδρομικό σχήμα υπολογισμού των $(\phi_i^{(N)} : i \in \mathcal{S})$, ως προς N (δηλαδή χρειάζεται να διατυπωθούν κάποιες αρχικές συνθήκες που να δίνουν τα $(\phi_i^{(0)} : i \in \mathcal{S})$ και κατόπιν κάποια σχέση που να δίνει για κάθε $i \in \mathcal{S}$ το $\phi_i^{(N)}$ συναρτήσει των $(\phi_j^{(N-1)} : j \in \mathcal{S})$).
2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ένα αναδρομικό σχήμα υπολογισμού των $(g_i^{(N)} : i \in \mathcal{S})$, ως προς N.

11. Θεωρούμε μια συνήθη άδεια 8×8 σκακιέρα, κι έναν Βασιλιά, ο οποίος αρχίζει να κινείται σε αυτήν τυχαία, επιλέγοντας σε κάθε βήμα του ένα από τα επιτρεπόμενα τετράγωνα ισοπίθανα.

1. Να βρεθεί ο μέσος αριθμός κινήσεων που θα χρειαστεί για να επιστρέψει στην κάτω δεξιά γωνία για πρώτη φορά, ξεκινώντας από αυτή.
2. Να λυθεί το ίδιο πρόβλημα για έναν Ίππο και για έναν Αξιωματικό.

4

Μαρκοβιανές αλυσίδες με κόστη: Εφαρμογές

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε κάποιες τυπικές εφαρμογές των Μαρκοβιανών αλυσίδων με κόστη σε προβλήματα Επιχειρησιακής Έρευνας. Περισσότερες εφαρμογές θα δούμε αργότερα στα πλαίσια της Θεωρίας Ουρών Αναμονής.

4.1 Συντήρηση - αντικατάσταση μηχανήματος

Θεωρούμε μια μηχανή που επιθεωρείται στην αρχή κάθε ημέρας και μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε από τις καταστάσεις $0, 1, 2, \ldots$. Η κατάσταση 0 αντιστοιχεί σε άριστη λειτουργία της μηχανής, ενώ όσο πιο μεγάλη τιμή παίρνει η κατάσταση της μηχανής τόσο η μηχανή και χειροτερεύει. Μετά από κάθε επιθεώρηση, ο διαχειριστής αποφασίζει αν θα αντικαταστήσει τη μηχανή με καινούργια ή όχι. Αν η κατάσταση της μηχανής στην αρχή μιας ημέρας είναι i τότε το κόστος για τη λειτουργία της εκείνη την ημέρα θα είναι $b(i)$, όπου $b(i)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση του i. Το κόστος αυτό συσσωρεύεται, όποια κι αν είναι η απόφαση σχετικά με την αντικατάσταση της μηχανής. Αν αποφασιστεί να αντικατασταθεί, τότε ένα επιπλέον κόστος r πρέπει να πληρωθεί και η κατάσταση της μηχανής την επόμενη μέρα είναι η 0. Αν η παρούσα κατάσταση της μηχανής είναι i και αποφασιστεί να μην αντικατασταθεί, τότε η κατάστασή της στην αρχή της επόμενης ημέρας θα είναι $j \geq i$, με πιθανότητα $g_i(j)$. Αν T_i είναι η τυχαία μεταβλητή που δίνει την κατάσταση της μηχανής την επόμενη ημέρα αν η τρέχουσα κατάστασή της είναι i, τότε η συνήθης υπόθεση είναι ότι T_i είναι στοχαστικά αύξουσα ως προς i, δηλαδή για κάθε i και i' με $i \leq i'$ και $f(j)$ αύξουσα συνάρτηση του j ισχύει $E[f(T_i)] \leq E[f(T_{i'}]$.

Ο διαχειριστής του συστήματος ακολουθεί μια πολιτική κατωφλίου για την αντικατάσταση της μηχανής. Αν η κατάστασή της βρεθεί μεγαλύτερη ή ίση της n, τότε επιλέγει να την αντικαταστήσει, αλλιώς συνεχίζει με αυτήν. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους υπό αυτή την πολιτική.

Υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι n, η κατάσταση της μηχανής στην αρχή κάθε ημέρας περιγράφεται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, με πιθανότητες μετάβασης

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} g_i(j), & \text{αν } 0 \leq i \leq n-1, \quad j \geq i, \\ 1, & \text{αν } i \geq n, \quad j = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι, υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι n, η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου που περιγράφει την κατάσταση του συστήματος στις αρχές των διαδοχικών ημερών είναι αδιαχώριστη. Οι εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή της, $\pi(n) = (\pi_j(n) : j \geq 0)$, είναι

$$\begin{aligned} \pi_0(n) &= g_0(0)\pi_0(n) + \sum_{i=n}^{\infty} \pi_i(n), \\ \pi_j(n) &= \sum_{i=0}^{j} g_i(j)\pi_i(n), \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \pi_j(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} g_i(j)\pi_i(n), \quad j \geq n. \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης, παίρνουμε τη στάσιμη κατανομή. Η δομή κόστους παραμονής περιγράφεται από τη συνάρτηση $c(i) = b(i)$, $i \geq 0$, ενώ η δομή κόστους μετάβασης περιγράφεται από τη συνάρτηση $d(i,j)$ με $d(i,0) = r$ για $i \geq n$ και $d(i,j) = 0$, διαφορετικά. Επομένως, για τον υπολογισμό του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους, $g(n)$, υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι n, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 35. Είναι

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(n)c(j) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \pi_j(n)p_{jk}d(j,k) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(n)b(j) + \sum_{j=n}^{\infty} r\pi_j(n). \end{aligned}$$

Σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις, ο τύπος για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά. Π.χ., ας θεωρήσουμε την περίπτωση που το κόστος λειτουργίας ανά ημέρα έχει την εκθετική μορφή $b(i) = 1 - b^i$, όπου $b \in (0,1)$, και, αν η παρούσα κατάσταση της μηχανής είναι i και αποφασιστεί να μην αντικατασταθεί, τότε η κατάστασή της στην αρχή της επόμενης ημέρας θα είναι i, με πιθανότητα $1-\alpha$, ή $i+1$, με πιθανότητα α, όπου $\alpha \in (0,1)$. Με άλλα λόγια, για τη συνάρτηση πιθανότητας $g_i(j))$ της T_i έχουμε $g_i(i) = 1-\alpha$, $g_i(i+1) = \alpha$ και $g_i(j) = 0$, για $j \neq i, i+1$.

Στην περίπτωση αυτή, η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου της κατάστασης του συστήματος απορροφάται στο σύνολο $\{0,1,2,\ldots,n\}$, όπου είναι και αδιαχώριστη. Οι πιθανότητες μετάβασής της έχουν τη μορφή

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} 1-\alpha, & \text{αν } 0 \leq i \leq n-1, \quad j = i, \\ \alpha, & \text{αν } 0 \leq i \leq n-1, \quad j = i+1, \\ 1, & \text{αν } i \geq n, \quad j = 0. \end{cases}$$

Είναι φανερό, ότι υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι n, η Μαρκοβιανή αλυσίδα απορροφάται στο σύνολο $\{0,1,\ldots,n\}$, στο οποίο είναι και αδιαχώριστη. Οι εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή της, $\pi(n) = (\pi_j(n) : 0 \le j \le n)$, είναι

$$\begin{aligned}
\pi_0(n) &= \pi_n(n) + (1-\alpha)\pi_0(n), \\
\pi_j(n) &= \alpha\pi_{j-1}(n) + (1-\alpha)\pi_j(n), \quad 1 \le j \le n-1, \\
\pi_n(n) &= \alpha\pi_{n-1}(n).
\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\pi_j(n) &= \frac{1}{n+\alpha}, \quad 0 \le j \le n-1, \\
\pi_n(n) &= \frac{\alpha}{n+\alpha}.
\end{aligned}$$

Η δομή κόστους παραμονής περιγράφεται από τη συνάρτηση $c(i) = 1-b^i$, $0 \le i \le n$, ενώ η δομή κόστους μετάβασης περιγράφεται από τη συνάρτηση $d(i,j)$ με $d(n,0) = r$ και $d(i,j) = 0$, διαφορετικά. Επομένως, για τον υπολογισμό του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους, $g(n)$, υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι n, έχουμε

$$\begin{aligned}
g(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n+\alpha}(1-b^j) + \frac{\alpha}{n+\alpha}(1-b^n) + \frac{\alpha}{n+\alpha} r \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+n}(r-1) + 1 + \frac{1-b^n}{n+a}\left(\alpha - \frac{1}{1-b}\right).
\end{aligned}$$

4.2 Σύστημα ελέγχου αποθεμάτων

Θεωρούμε μια αποθήκη που επιθεωρείται στο τέλος κάθε περιόδου λειτουργίας της. Σε κάθε περίοδο λειτουργίας της, έστω n, υπάρχει ζήτηση για D_n μονάδες προϊόντος. Οι D_n, $n \ge 1$, που δίνουν τη ζήτηση στις διαδοχικές περιόδους λειτουργίας της αποθήκης είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, μη-αρνητικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές με κάποια γνωστή συνάρτηση πιθανότητας $(p_D(i) : i \ge 0)$. Συμβολίζουμε με X_n το ύψος του αποθέματος της αποθήκης στο τέλος της n-οστής περιόδου, $n \ge 1$. Ο διαχειριστής της αποθήκης αναπληρώνει το απόθεμα μέχρι ύψος S, αν διαπιστώσει ότι το απόθεμα στο τέλος μιας περιόδου είναι μικρότερο ή ίσο από s μονάδες. Η ζήτηση κάθε περιόδου ικανοποιείται από το υπάρχον απόθεμα στο βαθμό που αυτό είναι δυνατό. Η υπερβάλουσα ζήτηση χάνεται, δηλαδή δεν μπορεί να ικανοποιηθεί από μελλοντικές παραγγελίες. Επομένως, βλέπουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_n, $n \ge 1$ συνδέονται με την αναδρομική σχέση

$$X_{n+1} = \begin{cases} \max(S - D_{n+1}, 0), & \text{αν } X_n \le s, \\ \max(X_n - D_{n+1}, 0), & \text{αν } s < X_n \le S, \end{cases}$$

από την οποία προκύπτει ότι η $\{X_n\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου. Υποθέτοντας ότι $p_D(i) > 0$ για $0 \le i \le S$, συμπεραίνουμε ότι είναι και αδιαχώριστη.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κόστος έλλειψης p για κάθε μονάδα ζήτησης που έμεινε ανικανοποίητη, κόστος αποθήκευσης h για κάθε μονάδα προϊόντος ανά χρονική μονάδα, κόστος αγοράς c ανά μονάδα προϊόντος και πάγιο κόστος K ανά παραγγελία. Αν το απόθεμα στο τέλος μιας περιόδου είναι i, τότε το μέσο κόστος για την επόμενη περίοδο θα είναι

$$c(i) = p(i) + h(i) + b(i) + d(i),$$

όπου τα $p(i), h(i), b(i), d(i)$ αντιστοιχούν στα μέσα κόστη έλλειψης, αποθήκευσης, αγοράς και παγίου κόστους παραγγελίας για την επόμενη περίοδο, δεδομένου ότι το απόθεμα στο τέλος της τρέχουσας περιόδου είναι i. Έχουμε

$$p(i) = \begin{cases} E[\max(D_n - S, 0)]p, & \text{αν } i \leq s, \\ E[\max(D_n - i, 0)]p, & \text{αν } s < i \leq S, \end{cases}$$

$$h(i) = \begin{cases} E[\max(S - D_n, 0)]h, & \text{αν } i \leq s, \\ E[\max(i - D_n, 0)]h, & \text{αν } s < i \leq S, \end{cases}$$

$$b(i) = \begin{cases} (S - i)c, & \text{αν } i \leq s, \\ 0, & \text{αν } s < i \leq S, \end{cases}$$

$$d(i) = \begin{cases} K, & \text{αν } i \leq s, \\ 0, & \text{αν } s < i \leq S. \end{cases}$$

Αν $(\pi_j(s, S) : 0 \leq j \leq S)$ είναι η στάσιμη κατανομή της $\{X_n\}$ (που βρίσκεται λύνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας, αλλά δεν έχει κλειστή μορφή), τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα 35 παίρνουμε το μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους ανά χρονική μονάδα, $g(s, S)$, που είναι

$$\begin{aligned} g(s, S) &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(s, S) c(j) \\ &= \sum_{j=0}^{s} \pi_j(s, S)(E[\max(D_n - S, 0)]p + E[\max(S - D_n, 0)]h + (S - j)c + K) \\ &\quad + \sum_{j=s+1}^{S} \pi_j(s, S)(E[\max(D_n - j, 0)]p + E[\max(j - D_n, 0)]h). \end{aligned}$$

Ένα σημαντικό πρόβλημα στη Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων είναι ο προσδιορισμός, ή έστω η προσέγγιση, βέλτιστων s και S που να ελαχιστοποιούν το $g(s, S)$.

4.3 Εκκαθάριση αποθήκης

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση της εφαρμογής που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 2.3, όπου σε μια αποθήκη φθάνουν προϊόντα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ), και μόλις συγκεντρωθούν m από αυτά η αποθήκη εκκαθαρίζεται ακαριαία και η παρτίδα με τα m προϊόντα διανέμεται σε λιανοπωλητές. Υπάρχει εφάπαξ κόστος K ανά εκκαθάριση της αποθήκης, ανεξάρτητο του αριθμού των προϊόντων που θα εκκαθαριστούν. Επίσης υπάρχει κόστος k ανά εκκαθάριση προϊόντος και κόστος h ανά προϊόν και χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη. Μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους λειτουργίας της αποθήκης και η τιμή του m που τον ελαχιστοποιεί.

Έστω $\{X(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία που καταγράφει το πλήθος των προϊόντων που βρίσκονται στην αποθήκη κάθε χρονική στιγμή t. Τότε, ο χώρος καταστάσεων της $\{X(t)\}$ είναι το σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ (διότι, αν κάποια στιγμή υπάρχουν στην αποθήκη $m-1$ αντικείμενα, η αποθήκη θα εκκαθαριστεί μόλις έρθει το επόμενο αντικείμενο). Ο χρόνος παραμονής σε κάθε κατάσταση είναι $\mathrm{Exp}(\lambda)$, αφού ισούται με το χρόνο μέχρι την άφιξη του επόμενου προϊόντος. Επομένως, η $\{X(t)\}$ είναι αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με μη-μηδενικούς ρυθμούς μετάβασης

$$\begin{aligned} q_{i,i+1} &= \lambda, \quad 0 \le i \le m-2, \\ q_{m-1,0} &= \lambda. \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή της, $\mathbf{p} = (p_j : 0 \le j \le m-1)$, είναι

$$\begin{aligned} \lambda p_0 &= \lambda p_{m-1}, \\ \lambda p_j &= \lambda p_{j-1}, \quad 1 \le j \le m-1, \end{aligned}$$

οπότε η στάσιμη κατανομή είναι ομοιόμορφη στο $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, με $p_j = \frac{1}{m}$, $0 \le j \le m-1$. Η δομή του κόστους παραμονής δίνεται από τη συνάρτηση $c(i) = hi$, $0 \le i \le m-1$, ενώ η δομή του κόστους μετάβασης από τη συνάρτηση $d(i,j)$ με $d(m-1, 0) = K + mk$ και $d(i,j) = 0$ διαφορετικά. Επομένως, για τον υπολογισμό του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους, $g(m)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 43. Είναι

$$\begin{aligned} g(m) &= \sum_{j \in \mathcal{S}} p_j c(j) + \sum_{j \in \mathcal{S}} \sum_{k \neq j} p_j q_{jk} d(j,k) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} hi + \frac{1}{m} \lambda (K + km) \\ &= \frac{\lambda K}{m} + \lambda k + \frac{h(m-1)}{2}. \end{aligned}$$

Ο τύπος αυτός ταυτίζεται με αυτόν που έχουμε βρει νωρίτερα για το γενικότερο πρόβλημα, όπου τα προϊόντα φθάνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία (βλέπε την εξίσωση (2.1)), λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

4.4 Ασκήσεις

1. Μια μηχανή παράγει 2 προϊόντα κάθε μέρα. Κάθε ένα από αυτά είναι μη-ελαττωματικό με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από οποιοδήποτε άλλον προϊόν. Τα ελαττωματικά προϊόντα απορρίπτονται άμεσα, ενώ τα μη-ελαττωματικά προϊόντα αποθηκεύονται για την ικανοποίηση της ζήτησης που είναι σταθερή και ίση με 1 προϊόν κάθε μέρα. Η ζήτηση ικανοποιείται αμέσως μετά την παραγωγή των προϊόντων κάθε μέρας και όποτε δεν μπορεί να ικανοποιηθεί χάνεται οριστικά. Έστω X_n ο αριθμός των προϊόντων που βρίσκονται στην αποθήκη στην αρχή της μέρας n (πριν αρχίσει η παραγωγή και η ικανοποίηση της ζήτησης).

   1. Βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης της $\{X_n\}$.

2. Βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η $\{X_n\}$ θετικά επαναληπτική.
3. Έστω ότι κοστίζει c χρηματικές μονάδες η αποθήκευση ενός προϊόντος ανά μέρα και d χρηματικές μονάδες η απώλεια μιας μονάδας ζήτησης. Να υπολογίσετε το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά ημέρα λειτουργίας της μηχανής.

2. Ένας πωλητής κινείται σε ένα δίκτυο $N+1$ πόλεων $0, 1, 2, \ldots, N$. Δοθέντος ότι βρίσκεται στην πόλη i, η πόλη που θα επισκεφθεί την επόμενη μέρα είναι η j με πιθανότητα

$$p_{ij} = \begin{cases} a_{j-i} & \text{αν } j \geq i, \\ a_{N+1+j-i} & \text{αν } j < i, \end{cases}$$

όπου $a_0, a_1, \ldots, a_N > 0$ και $a_0 + a_1 + \cdots + a_N = 1$. Η πόλη 0 είναι η βάση του πωλητή και το κόστος παραμονής του εκεί για μια ημέρα είναι c_0, ενώ σε όλες τις άλλες πόλεις είναι $c > c_0$. Να υπολογιστεί το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος παραμονής ανά ημέρα του πωλητή.

3. Πελάτες φθάνουν σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη και απεριόριστο χώρο αναμονής. Η διαδικασία αφίξεων των πελατών είναι $\text{Poisson}(\lambda)$ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι $\text{Exp}(\mu)$, ανεξάρτητοι από τη διαδικασία αφίξεων. Έστω $X(t)$ ο αριθμός πελατών τη στιγμή t.
   1. Αποδείξτε ότι η $\{X(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και δώστε τους ρυθμούς μετάβασής της.
   2. Δώστε μια συνθήκη για τη θετική επαναληπτικότητα της αλυσίδας και υπολογίστε την οριακή κατανομή της, όταν η συνθήκη αυτή ισχύει.
   3. Βρείτε το μακροπρόθεσμο μέσο κέρδος ανά χρονική μονάδα από τη λειτουργία αυτού του συστήματος εξυπηρέτησης, αν κάθε πελάτης πληρώνει εισιτήριο R κατά την είσοδό του στο σύστημα και επιφέρει κόστος C ανά χρονική μονάδα παραμονής του.

4. Θεωρούμε ότι δυο κλάσεις πελατών φθάνουν σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη και απεριόριστο χώρο αναμονής. Οι πελάτες της κλάσης i φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία $\text{Poisson}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. Οι δυο διαδικασίες Poisson θεωρούνται ανεξάρτητες. Οι πελάτες της κλάσης 1 επιτρέπεται πάντα να εισέρχονται στο σύστημα, ενώ οι πελάτες της κλάσης 2 εισέρχονται μόνο εφόσον ο συνολικός αριθμός πελατών στο σύστημα (μόλις πριν την άφιξη ενός πελάτη τύπου 2) είναι μικρότερος του K, όπου $K > 0$ είναι σταθερός δοσμένος ακέραιος. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι ανεξάρτητοι $\text{Exp}(\mu)$ και για τις δυο κλάσεις. Έστω $X(t)$ ο συνολικός αριθμός πελατών τη στιγμή t.
   1. Αποδείξτε ότι η $\{X(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και δώστε τους ρυθμούς μετάβασής της.
   2. Δώστε μια συνθήκη για τη θετική επαναληπτικότητα της αλυσίδας και υπολογίστε την οριακή κατανομή της, όταν η συνθήκη αυτή ισχύει.

3. Βρείτε το μακροπρόθεσμο μέσο έσοδο ανά χρονική μονάδα από τη λειτουργία αυτού του συστήματος εξυπηρέτησης, αν κάθε πελάτης κλάσης i πληρώνει εισιτήριο R_i κατά την είσοδό του στο σύστημα.

5. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης που λειτουργεί ως εξής: Υπάρχει ένας υπηρέτης ο οποίος εναλλάσεται μεταξύ δυο καταστάσεων, λειτουργίας (1) και αργίας (0). Οι διάρκειες των διαδοχικών περιόδων λειτουργίας και αργίας του υπηρέτη είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν τις κατανομές $\mathrm{Exp}(\xi)$ και $\mathrm{Exp}(\eta)$, αντίστοιχα. Όταν ο υπηρέτης βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας, τότε οι πελάτες φθάνουν συμφωνα με μια διαδικασία $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ και εξυπηρετούνται ένας - ένας με ανεξάρτητους $\mathrm{Exp}(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης. Όταν ο υπηρέτης βρίσκεται σε κατάσταση αργίας, σταματούν τόσο οι αφίξεις όσο και οι εξυπηρετήσεις.
   1. Δικαιολογήστε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{(I(t), N(t)) : t \geq 0\}$, όπου $I(t)$ είναι η κατάσταση του υπηρέτη (1: ενεργός, 0: ανενεργός) και $N(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t, είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και δώστε τους ρυθμούς μετάβασής της.
   2. Βρείτε αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η στοχαστική διαδικασία να είναι θετικά επαναληπτική και βρείτε στην περίπτωση αυτή τη στάσιμη κατανομή της.
   3. Ποιός ειναι ο δεσμευμένος μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη δεδομένου ότι βρήκε n πελάτες στο σύστημα (χωρίς να υπολογίζουμε τον ίδιο);

Μέρος II

Ουρές αναμονής

5

Περιγραφή, ονοματολογία και μέτρα απόδοσης

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε τα βασικά χαρακτηριστικά που καθορίζουν ένα σύστημα εξυπηρέτησης. Επιπλέον, παρουσιάζουμε την ονοματολογία - ταξινόμηση του Kendall για τα συστήματα εξυπηρέτησης. Τέλος, αναφέρουμε τα σημαντικότερα μέτρα απόδοσης που απασχολούν τη μελέτη των συστημάτων εξυπηρέτησης.

5.1 Βασική περιγραφή και ονοματολογία του Kendall

Ένα σύστημα εξυπηρέτησης ή ουρά αναμονής είναι στην ουσία ένα σύστημα εισόδου - εξόδου διακριτών οντοτήτων (μονάδων, πελατών), στο οποίο υπεισέρχεται τυχαιότητα. Αυτός ο ορισμός είναι πολύ γενικός και περιλαμβάνει πολλές πραγματικές καταστάσεις που παρατηρούνται στην καθημερινή ζωή, καθώς και σε περίπλοκα τεχνολογικά συστήματα. Ιστορικά, η συγκεκριμένη επιστημονική περιοχή άρχισε να αναπτύσσεται στις αρχές του 20ου αιώνα, όταν ο A.K. Erlang δημοσίευσε κάποιες εργασίες του για τη μαθηματική μοντελοποίηση του συνωστισμού σε τηλεφωνικά δίκτυα. Η μεγάλη επιτυχία αυτών των μεθόδων στη μελέτη πραγματικών συστημάτων έδωσε τεράστια ώθηση στη περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας των ουρών αναμονής καθώς και των εφαρμογών της και σε άλλα πεδία.

Τα βασικά χαρακτηριστικά ενός συστήματος εξυπηρέτησης είναι

- η (στοχαστική) διαδικασία αφίξεων,
- οι χρόνοι εξυπηρέτησης,
- ο αριθμός των (παράλληλων) παρόχων εξυπηρέτησης - υπηρετών,
- η χωρητικότητα του συστήματος,
- η πειθαρχία ουράς.

Για το λόγο αυτό ο D.G. Kendall εισήγαγε ένα σύστημα ονοματολογίας για τις πιο απλές ουρές που περιγράφει συνοπτικά αυτά τα χαρακτηριστικά. Η ονοματολογία του Kendall έχει τη μορφή A/B/c/k(   ), όπου τα A, B είναι γράμματα, τα c, k αριθμοί και μέσα στην παρένθεση γράφεται μια ακροστοιχίδα γραμμάτων. Καθεμιά από τις 5 παραμέτρους της ονοματολογίας του Kendall αναφέρεται στα 5 χαρακτηριστικά που περιγράψαμε παραπάνω.

Η διαδικασία αφίξεων περιγράφει το πώς έρχονται οι πελάτες στο σύστημα. Είναι συνήθως μια ανανεωτική διαδικασία, δηλαδή οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων πελατών είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κάποια γνωστή γενική κατανομή. Η διαδικασία αφίξεων αντιστοιχεί στο γράμμα A της ονοματολογίας Kendall. Οι πιο συχνές τιμές που παίρνει στη βιβλιογραφία είναι GI ή G (General independent), M (Memoryless, Markovian), D (Deterministic) και E_r (Erlang-r) για τις περιπτώσεις που οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων είναι γενικοί, εκθετικοί, σταθεροί και Erlang-r αντίστοιχα. Υπάρχουν βέβαια και άλλες τιμές για το γράμμα A που αντιστοιχούν σε κατανομές που εμφανίζονται σπανιότερα στη βιβλιογραφία.

Οι χρόνοι εξυπηρέτησης θεωρούνται στα κλασικά μοντέλα επίσης ανεξάρτητοι και ισόνομοι και αντιστοιχούν στο γράμμα B της ονοματολογίας Kendall που παίρνει τις ίδιες τιμές με το γράμμα A. Οι τιμές GI και G για το A και το B σηματοδοτούν ακριβώς το ίδιο, δηλαδή ανεξάρτητους ισόνομους χρόνους με γενική κατανομή. Παρόλα αυτά συνηθίζεται εθιμικά η τιμή GI για το A και η τιμή G για το B στα περισσότερα βιβλία και σημειώσεις που κυκλοφορούν διεθνώς. Στις παρούσες σημειώσεις θα προτιμήσουμε την τιμή GI τόσο για το A και όσο και για το B.

Ο αριθμός των υπηρετών αναφέρεται στο πόσοι είναι οι παράλληλοι υπηρέτες που εξυπηρετούν τη ροή των πελατών που εισέρχεται στο σύστημα. Με την έννοια "παράλληλοι" υπηρέτες εννοούμε ότι υπάρχει μια κοινή ουρά για όλους και οι πελάτες πηγαίνουν στον πρώτο υπηρέτη που θα αδειάσει, αν όλοι οι υπηρέτες είναι απασχολημένοι, ή διαλέγουν στην τύχη κάποιον από τους άδειους υπηρέτες, αν υπάρχουν ελεύθεροι υπηρέτες. Ο αριθμός των υπηρετών αντιστοιχεί στον αριθμό c της ονοματολογίας του Kendall.

Η χωρητικότητα του συστήματος εκφράζει το μέγιστο πλήθος πελατών που μπορούν να χωρέσουν στο σύστημα, συμπεριλαμβανομένων τόσο αυτών που περιμένουν να εξυπηρετηθούν, όσο και αυτών που βρίσκονται σε διαδικασία εξυπηρέτησης. Αν ένα σύστημα έχει φτάσει στο μέγιστο της χωρητικότητάς του και αφιχθεί ένας πελάτης, τότε στα κλασικά μοντέλα των ουρών αναμονής ο πελάτης απορρίπτεται και θεωρείται χαμένος για πάντα. Φυσικά, υπάρχουν και μοντέλα στα οποία οι πελάτες που αποχωρούν λόγω της περιορισμένης χωρητικότητας επανέρχονται αργότερα με την ελπίδα να υπάρχει διαθέσιμη θέση στο σύστημα. Στην περίπτωση αυτή, μιλάμε για μοντέλα με επαναπροσπάθειες ή επαναδοκιμές. Σε τέτοια μοντέλα είναι απαραίτητο να αποσαφηνισθεί η διαδικασία με την οποία οι πελάτες επανέρχονται στο σύστημα και έτσι τα μοντέλα αυτά δεν περιγράφονται στο πλαίσιο της ονοματολογίας του Kendall. Προς το παρόν, επομένως, μένουμε στο πλαίσιο των μοντέλων χωρίς επαναπροσπάθειες, όπου η χωρητικότητα του συστήματος αντιστοιχεί στον αριθμό k της ονοματολογίας του Kendall.

Η πειθαρχία ουράς είναι ο τρόπος με τον οποίο το σύστημα επιλέγει ποιόν πελάτη θα εξυπηρετήσει, μόλις βρεθεί κάποιος διαθέσιμος υπηρέτης. Η πλέον κλασική πειθαρχία ουράς είναι η FCFS (First-Come-First-Served) ή FIFO (First-In-First-Out), κατά την οποία οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με τη σειρά της άφιξής τους. Έτσι, μόλις αδειάσει ένας υπηρέτης, επιλέγεται για εξυπηρέτηση ο πελάτης που έχει αφιχθεί πρώτος από όλους που περιμένουν. Η πειθαρχία αυτή μοιάζει η πιο δίκαιη με πρώτη ματιά και χρησιμοποιείται περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη στην περίπτωση που οι πελάτες είναι άνθρωποι και μάλιστα έχουν οπτική επαφή με το τί συμβαίνει στο σύστημα (και επομένως μπορούν και βλέπουν πότε φθάνουν οι άλλοι πελάτες). Σε διάφορες εφαρμογές, όμως, χρησιμοποιούνται και άλλες πειθαρχίες ουράς, όπως η LCFS (Last-Come-First-Served) κατά την οποία οι πελάτες εξυπηρετούνται αντίστροφα από τη σειρά αφιξής τους, η SIRO (Service-In-Random-Order) όπου οι πελάτες εξυπηρετούνται τυχαία, χωρίς να λαμβάνεται υπόψιν η σειρά αφιξής τους, η SSTF (Shortest-Service-Time-First) όπου επιλέγεται προς εξυπηρέτηση ο πελάτης που έχει το μικρότερο χρόνο εξυπηρέτησης κ.α. Υπάρχουν, επίσης, πειθαρχίες ουράς για την περίπτωση που υπάρχουν διάφορα είδη πελατών και το σύστημα τους αντιμετωπίζει διαφορετικά. Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν κάποια είδη πελατών να έχουν προτεραιότητα έναντι κάποιων άλλων, οπότε μιλάμε για πειθαρχίες ουρών με προτεραιότητες. Γενικά, αν σκεφθούμε πρακτικές εφαρμογές των ουρών αναμονής θα συνειδητοποιήσουμε ότι υπάρχει μεγάλη ποικιλία στις πειθαρχίες ουράς που χρησιμοποιούνται (π.χ., ας σκεφθούμε τα ταμεία για πελάτες με μέχρι 10 προϊόντα στα supermarket, τα ταμεία για επιχειρηματικές συναλλαγές στις τράπεζες, τις κρατήσεις θέσεων σε εστιατόρια, τα τηλεφωνικά κέντρα που εξυπηρετούν πελάτες σε περισσότερες από μια γλώσσες κλπ.).

Η χωρητικότητα του συστήματος k και/ή η πειθαρχία ουράς μπορεί να παραλείπονται στην ονοματολογία Kendall. Η χωρητικότητα παραλείπεται όταν είναι απεριόριστη ($k = \infty$), ενώ η πειθαρχία όταν είναι η FCFS.

Με βάση τα παραπάνω, γίνεται αντιληπτό ότι η ονοματολογία του Kendall προσφέρει έναν πολύ συνοπτικό τρόπο για να περιγραφεί το είδος ενός συστήματος εξυπηρέτησης. Π.χ., η M/M/1 ουρά είναι ένα σύστημα εξυπηρέτησης με Poisson διαδικασία αφίξεων (ανεξάρτητους εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων), εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης και 1 υπηρέτη που έχει άπειρη χωρητικότητα και λειτουργεί υπό την πειθαρχία ουράς FCFS. Ομοίως, Η GI/E_2/1/5 (SIRO) ουρά είναι ένα σύστημα εξυπηρέτησης με ανανεωτική διαδικασία αφίξεων (ανεξάρτητους και ισόνομους ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων), Erlang-2 χρόνους εξυπηρέτησης και 1 υπηρέτη που έχει χωρητικότητα για 5 πελάτες και λειτουργεί υπό την πειθαρχία ουράς SIRO.

Πολλές φορές η διαδικασία αφίξεων και/η κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης δεν είναι ακριβώς γνωστή. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να δίνεται κάποια αδρή πληροφορία για το πώς έρχονται και πώς εξυπηρετούνται οι πελάτες. Π.χ., μπορεί να δίνεται ο μέσος ενδιάμεσος χρόνος a μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων και ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης b. Ισοδύναμα, μπορεί να δίνεται ο ρυθμός αφίξεων $\lambda = 1/a$ και ο ρυθμός εξυπηρέτησης $\mu = 1/b$. Τα a και b έχουν τη φυσική έννοια της (μέσης) περιόδου των διαδικασιών των αφίξεων και των εξυπηρετήσεων αντίστοιχα, ενώ τα λ και μ αντιστοιχούν στη φυσική έννοια της συχνότητας. Με τόσο ελλειπή πληροφορία, βεβαίως, τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από τη μαθηματική ανάλυση μπορεί να είναι πολύ αδύναμα. Για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων χρειάζεται να είναι γνωστή η κατανομή των αντίστοιχων χρόνων ή τουλάχιστον κάποιες ροπές ανώτερης τάξης. Μετά τη μέση τιμή, η διασπορά των χρόνων μεταξύ των αφίξεων και/ή των χρόνων εξυπηρέτησης επηρεάζει σημαντικά την απόδοση ενός συστήματος.

5.2 Μέτρα απόδοσης συστήματος

Αφού περιγραφεί ένα σύστημα, το πρόβλημα που τίθεται είναι να προβλέψουμε πώς θα συμπεριφέρεται. Ορισμένα τυπικά ερωτήματα που απασχολούν τη Θεωρία Ουρών Αναμονής είναι τα ακόλουθα:

1. Πόσοι πελάτες θα βρίσκονται στο σύστημα, κατά μέσο όρο, μια τυχούσα χρονική στιγμή;
2. Πόσο χρόνο θα περάσει στο σύστημα, κατά μέσο όρο, ένας πελάτης;
3. Ποιό ποσοστό του χρόνου του θα βρίσκεται απασχολημένος ένας υπηρέτης που δουλεύει στο συγκεκριμένο σύστημα;

Όπως βλέπουμε, υπάρχουν ερωτήματα που απασχολούν το διαχειριστή του συστήματος, που θεωρεί το σύστημα συνολικά, σαν εξωτερικός παρατηρητής (ερώτημα 1), ερωτήματα που απασχολούν τους πελάτες, που επιδρούν στο σύστημα μόνο παροδικά και κατόπιν φεύγουν (ερώτημα 2) και ερωτήματα που απασχολούν τους υπηρέτες, που έχουν μόνιμη σχέση με το σύστημα (ερώτημα 3). Είναι σημαντικό να γίνει κατανοητό ότι αυτοί οι παράγοντες του συστήματος (διαχειριστής, πελάτες και υπηρέτες) έχουν διαφορετικές οπτικές και για το λόγο αυτό υπάρχουν μέτρα απόδοσης του συστήματος που σχετίζονται με την οπτική του καθενός.

Για το διαχειριστή του συστήματος η πιο σημαντική πληροφορία είναι ο αριθμός των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα μια τυχαία χρονική στιγμή. Έτσι ορίζουμε

- $Q(t)$, τον αριθμό των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t,
- $Q_q(t)$, τον αριθμό των πελατών στο χώρο αναμονής τη στιγμή t (ο δείκτης q μπαίνει για να θυμίζει ότι αναφερόμαστε στο πλήθος των πελατών στην ουρά ($q \to$ queue),
- $Q_s(t)$, τον αριθμό των πελατών στο χώρο εξυπηρέτησης τη στιγμή t (ο δείκτης s μπαίνει για να θυμίζει ότι αναφερόμαστε στο πλήθος των πελατών υπό εξυπηρέτηση ($s \to$ service).

Φυσικά, ισχύει ότι

$$Q(t) = Q_q(t) + Q_s(t).$$

Ενδιαφερόμαστε για το τί συμβαίνει στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή καθώς $t \to \infty$, και για το λόγο αυτό μας ενδιαφέρουν οι οριακές πιθανότητες

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \Pr[Q(t) = j], \quad j \geq 0. \tag{5.1}$$

Η p_j είναι η οριακή πιθανότητα σε συνεχή χρόνο να βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα. Μια πρώτη της ερμηνεία επομένως είναι ότι εκφράζει την πιθανότητα να βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα, αν το κοιτάξουμε σε κάποια χρονική στιγμή που έχει παρέλθει πολύς χρόνος από την έναρξη λειτουργίας του συστήματος και επομένως η επίδραση της αρχικής κατάστασης του συστήματος (αριθμός πελατών σε αυτό κατά την έναρξη της λειτουργίας του) έχει χαθεί. Ισχύει, επίσης, ότι

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \Pr[Q(u) = j]\frac{1}{t}du, \quad j \geq 0 \tag{5.2}$$

(διότι αν υπάρχει το σύνηθες όριο $\lim_{t\to\infty} f(t)$ μιας συνάρτησης τότε υπάρχει και το Cesaro όριο $C - \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(u)du/t$ και είναι και τα δυο ίσα). Η έκφραση αυτή μας οδηγεί σε μια δεύτερη ερμηνεία της p_j, ως της πιθανότητας να βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα, αν το κοιτάξουμε σε μια τυχαία, ομοιόμορφα επιλεγμένη χρονική στιγμή σε ένα διάστημα μεγάλου μήκους (δείτε και τη σχετική συζήτηση αμέσως μετά το θεώρημα 41, ιδιαίτερα την ερμηνεία της σχέσης (3.14)). Αν το σύστημα έχει αναγεννητικό χαρακτήρα, δηλαδή η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την εξέλιξή του ξαναρχίζει από την αρχή, ξεχνώντας την παρελθούσα ιστορία της, σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές (συνήθως τις στιγμές που φθάνει ένας πελάτης που το βρίσκει κενό ή τις στιγμές που το σύστημα αδειάζει), τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχετική θεωρία των αναγεννητικών διαδικασιών για να πάρουμε και άλλες ερμηνείες της p_j. Από το θεώρημα 26 και τη συζήτηση που το ακολουθεί, έχουμε ότι

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{Q(u)=j\}} du}{t}, \quad \text{με πιθανότητα } 1 \tag{5.3}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{Q(u)=j\}} du\right]}{t}, \tag{5.4}$$

όπου $1_{\{Q(u)=j\}}$ είναι η δείκτρια τυχαία μεταβλητή του ενδεχομένου $\{Q(u)=j\}$ που παίρνει την τιμή 1 όταν $Q(u)=j$ και την τιμή 0 διαφορετικά. Έτσι, έχουμε μια τρίτη ερμηνεία της p_j ως το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα για σχεδόν κάθε πραγματοποίηση της διαδικασίας και μια τέταρτη ερμηνεία της p_j ως το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα.

Είναι σημαντικό για την συναγωγή και ερμηνεία των διαφόρων αποτελεσμάτων που θα ακολουθήσουν να συνειδητοποιηθεί ότι οι διάφορες ερμηνείες - εκφράσεις της p_j είναι ισοδύναμες, κάτω από πολύ γενικές συνθήκες, που ισχύουν στη συντριπτική πλειονότητα των περιπτώσεων που εμφανίζονται στις εφαρμογές. Συγκεκριμένα, το μόνο που χρειάζεται είναι η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ να είναι αναγεννητική. Πράγματι, όλα τα συστήματα που θα μελετήσουμε σε αυτές τις εισαγωγικές σημειώσεις είναι αναγεννητικά και κατά συνέπεια οι οριακές πιθανότητες ισούνται με τα μακροπρόθεσμα ποσοστά, όπως είδαμε παραπάνω. Για το λόγο αυτό, σε ό,τι ακολουθεί θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα κάποια από τις ισοδύναμες εκφράσεις, χωρίς περαιτέρω μνεία. Αυτό θα συμβαίνει και για άλλα μεγέθη, καθώς και για άλλες τυχαίες μεταβλητές που έχουν ενδιαφέρον για τη μελέτη των συστημάτων. Π.χ., συμβολίζοντας με Q την οριακή τυχαία μεταβλητή που έχει την κατανομή $(p_j : j \geq 0)$ θα γράφουμε

$$E[Q] = \lim_{t\to\infty} E[Q(t)] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q(u)du, \quad \text{με πιθανότητα } 1. \tag{5.5}$$

Αν έχουμε προσδιορίσει την $(p_j : j \geq 0)$ (πράγμα που δεν είναι πάντα εύκολο) τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την $E[Q]$ από τη σχέση $E[Q] = \sum_{j=0}^{\infty} jp_j$. Σε κάποιες περιπτώσεις η $E[Q]$ μπορεί να υπολογιστεί και απευθείας με πιθανοθεωρητικά επιχειρήματα, χρησιμοποιώντας κάποια βασικά αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν παρακάτω. Ομοίως με την $E[Q]$, ορίζονται οι $E[Q_q]$ και $E[Q_s]$.

Για τους πελάτες το πιο σημαντικό μέτρο απόδοσης είναι ο χρόνος που παραμένουν στο σύστημα. Έτσι ορίζουμε

- S_n, τον χρόνο παραμονής στο σύστημα του n-οστού πελάτη,
- W_n, τον χρόνο αναμονής στην ουρά (μέχρι να αρχίσει η εξυπηρέτηση) του n-οστού πελάτη,

- X_n, τον χρόνο εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη.

Προφανώς έχουμε

$$S_n = W_n + X_n.$$

Ενδιαφερόμαστε και πάλι για το τί συμβαίνει σε κατάσταση ισορροπίας και γι αυτό ενδιαφερόμαστε για την οριακή κατανομή του χρόνου παραμονής. Και πάλι υπάρχουν πολλές ερμηνείες για την κατανομή αυτή, που συμπίπτουν όταν η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος στο χρόνο έχει αναγεννητικό χαρακτήρα. Έτσι για την οριακή κατανομή $F_S(x)$ του χρόνου παραμονής πελάτη έχουμε

$$\begin{aligned}
F_S(x) &= \lim_{n\to\infty} \Pr[S_n \le x] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Pr[S_k \le x] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{\{S_k \le x\}}, \quad \text{με πιθανότητα } 1, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\left[\sum_{k=1}^{n} 1_{\{S_k \le x\}}\right], \quad x \ge 0,
\end{aligned}$$

όπου με $1_{\{S_k \le x\}}$ συμβολίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου $\{S_k \le x\}$ (ο k-οστός πελάτης να παραμείνει στο σύστημα το πολύ για χρόνο x) που παίρνει την τιμή 1 όταν $S_k \le x$ και την τιμή 0 διαφορετικά.

Συμβολίζοντας με S την οριακή τυχαία μεταβλητή που έχει την κατανομή $(F_S(x) : x \ge 0)$ για τον οριακό μέσο χρόνο παραμονής έχουμε

$$E[S] = \lim_{n\to\infty} E[S_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k, \quad \text{με πιθανότητα } 1.$$

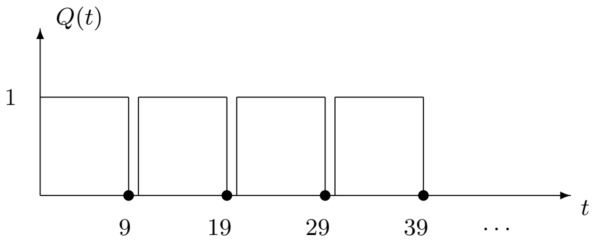
Ο υπολογισμός του $E[S]$ είναι εύκολος αν έχουμε υπολογίσει την κατανομή $(F_S(x) : x \ge 0)$ ή την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $(f_S(x) : x \ge 0)$, όταν υπάρχει. Πράγματι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $E[S] = \int_0^\infty x f_S(x)dx = \int_0^\infty (1 - F_S(x))dx$ και επομένως πρόκειται για έναν υπολογισμό ρουτίνας (ο οποίος μπορεί πάντως να έχει αρκετές πράξεις). Σε κάποιες περιπτώσεις, όμως, ο $E[S]$ μπορεί να υπολογιστεί και απευθείας ταυτόχρονα με την $E[Q]$ με πιθανοθεωρητικά επιχειρήματα. Ομοίως με το $E[S]$, ορίζονται τα $E[W]$ και $E[X]$.

Ένα άλλο σημαντικό μέγεθος που αξίζει να μελετηθεί είναι ο κύκλος απασχόλησης του συστήματος που ορίζεται ως το διάστημα από την άφιξη ενός πελάτη που βρίσκει το σύστημα κενό, μέχρι την επόμενη άφιξη πελάτη που θα βρει το σύστημα κενό. Κάθε τέτοιος κύκλος αρχίζει με ένα χρονικό διάστημα που το σύστημα θα είναι συνεχώς απασχολημένο μέχρι να αδειάσει. Το διάστημα αυτό αναφέρεται ως μια περίοδος συνεχούς λειτουργίας του συστήματος. Στη συνέχεια, το σύστημα παραμένει κενό, μέχρι να εμφανιστεί ξανά πελάτης. Το διάστημα αυτό αναφέρεται ως μια περίοδος αργίας του συστήματος. Από τη στιγμή που θα αφιχθεί ξανά πελάτης, ο κύκλος απασχόλησης ολοκληρώνεται και αρχίζει ένας νέος κ.ο.κ. Οι διάρκειες των περιόδων αργίας I, των περιόδων συνεχούς λειτουργίας Y και των κύκλων απασχόλησης Z ενδιαφέρουν κυρίως από την οπτική σκοπιά των υπηρετών και του διαχειριστή του συστήματος αφού οι ποσότητες αυτές είναι σημαντικές για να ληφθούν αποφάσεις σχετικά με τη συντήρηση του συστήματος ή με διακοπές - διαλείματα των υπηρετών. Για το λόγο αυτό ενδιαφερόμαστε για τη μελέτη των αντίστοιχων οριακών κατανομών $F_I(x)$, $F_Y(x)$ και $F_Z(x)$, ή τουλάχιστον των αντίστοιχων μέσων τιμών τους $E[I]$, $E[Y]$ και $E[Z]$.

5.3 Εμφυτευμένες διαδικασίες σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων

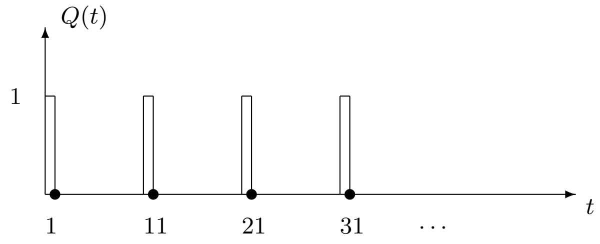
Όπως είπαμε παραπάνω, ο διαχειριστής του συστήματος, που μπορεί να θεωρηθεί ως ένας εξωτερικός παρατηρητής του συστήματος, έχει μια διαφορετική αντίληψη από τους πελάτες του συστήματος όσον αφορά το συνωστισμό. Για το λόγο αυτό ορίσαμε και τα διάφορα μέτρα απόδοσης. Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η διαφορά των δυο οπτικών, διαχειριστή - εξωτερικού παρατηρητή και πελατών ας φανταστούμε ότι έχουμε ένα $D/D/1$ σύστημα και ας εξετάσουμε τί αντιλαμβάνεται ο διαχειριστής και τί οι πελάτες.

Σε ένα πρώτο σενάριο, ας υποθέσουμε ότι έχουμε αφίξεις σε σταθερά χρονικά διαστήματα, κάθε 10 λεπτά και ότι οι χρόνοι εξυπητέτησης είναι επίσης σταθεροί και ίσοι με 9 λεπτά. Τότε ο διαχειριστής βλέπει το σύστημα πολύ απασχολημένο. Για την ακρίβεια βλέπει ότι το 90% του χρόνου στο σύστημα υπάρχει 1 πελάτης ενώ μόνο ένα 10% του χρόνου το σύστημα είναι άδειο. Από την άλλη μεριά, κάθε πελάτης βλέπει το σύστημα άδειο τη στιγμή που φθάνει σε αυτό (αφού ο προηγούμενος πελάτης έχει φύγει πριν 1 λεπτό). Η εξέλιξη του αριθμού των πελατών σε αυτό το σύστημα φαίνεται στο σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1 Εξέλιξη του αριθμού των πελατών σε μια D/D/1 ουρά με $a = 10$ και $b = 9$.

Σε ένα δεύτερο σενάριο, ας υποθέσουμε ότι οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων είναι και πάλι σταθεροί και ίσοι με 10 λεπτά, αλλά τώρα θεωρούμε ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης διαρκούν 1 λεπτό για κάθε πελάτη. Τώρα ο διαχειριστής βλέπει το σύστημα πολύ λίγο απασχολημένο, αφού μόλις το 10% του χρόνου υπάρχει 1 πελάτης ενώ το 90% του χρόνου το σύστημα είναι άδειο. Από την άλλη μεριά η εντύπωση που αποκομίζει κάθε πελάτης φθάνοντας στο σύστημα δεν διαφέρει από την εντύπωση που έχουν οι πελάτες στο πρώτο σενάριο: Και πάλι κάθε πελάτης βλέπει το σύστημα άδειο τη στιγμή που εισέρχεται σε αυτό. Η εξέλιξη του αριθμού των πελατών σε αυτό το σύστημα φαίνεται στο σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2 Εξέλιξη του αριθμού των πελατών σε μια D/D/1 ουρά με $a = 10$ και $b = 1$.

Το συμπέρασμα είναι ότι οι οπτικές ενός εξωτερικού παρατηρητή και ενός αφικνούμενου πελάτη μπορεί να δίνουν πολύ διαφορετικές εικόνες για το ίδιο σύστημα. Επίσης δυο συστήματα μπορεί να μοιάζουν παρόμοια υπό τη μία οπτική (όπως τα δυο σενάρια σε στιγμές αφίξεων πελατών) και να είναι πολύ διαφορετικά υπό μια άλλη οπτική (όπως τα δυο σενάρια σε συνεχή χρόνο). Αν σκεφτούμε ότι συνήθως οι πελάτες δεν είναι παθητικές οντότητες, αλλά αποφασίζουν τι θα κάνουν σε σχέση με το σύστημα (π.χ. να μπουν σε αυτό ή να φύγουν), έχει μεγάλη σημασία να ποσοτικοποιήσουμε με κάποιο τρόπο το πώς αντιλαμβάνονται το συνωστισμό του συστήματος, κατά την άφιξή τους ή την αναχώρησή τους.

Προς τον σκοπό αυτό, έστω $A_1 < A_2 < A_3 < \cdots$ οι διαδοχικές στιγμές αφίξεων και $D_1 < D_2 < D_3 < \cdots$ οι διαδοχικές στιγμές αναχωρήσεων των πελατών σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης. Ξεκινώντας από τη στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ που περιγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα σε συνεχή χρόνο, ορίζουμε τις εμφυτευμένες διαδικασίες $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων πελατών αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, ορίζουμε

- $Q_n^- = Q(A_n^-)$, τον αριθμό των πελατών, αμέσως πριν την n-οστή άφιξη πελάτη (δηλαδή των αριθμό των παρόντων πελατών που βλέπει ο n-οστός πελάτης καθώς εισέρχεται στο σύστημα),
- $Q_n^+ = Q(D_n^+)$, τον αριθμό των πελατών αμέσως μετά την n-οστή αναχώρηση πελάτη (δηλαδή των αριθμό των πελατών που αφήνει πίσω του, κατά την έξοδο του, ο n-οστός πελάτης που φεύγει από το σύστημα).

Ενδιαφερόμαστε για τις αντίστοιχες οριακές κατανομές που περιγράφουν την εντύπωση που διαμορφώνει ένας πελάτης τη στιγμή που εισέρχεται στο σύστημα και τη στιγμή που αναχωρεί από αυτό, εφόσον το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Μιλάμε, αντίστοιχα, για τις οριακές κατανομές του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων. Η οριακή πιθανότητα σε στιγμή άφιξης να βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα (εξαιρουμένης της νέας άφιξης) ορίζεται ως $a_j = \lim_{n\to\infty} \Pr[Q_n^- = j]$, $j \geq 0$. Εφόσον το σύστημα είναι αναγεννητικό (και με απεριοδικούς ενδιάμεσους χρόνους αναγεννήσεων), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a_j &= \lim_{n\to\infty} \Pr[Q_n^- = j] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Pr[Q_k^- = j] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{\{Q_k^- = j\}}, \quad \text{με πιθανότητα } 1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\left[\sum_{k=1}^{n} 1_{\{Q_k^- = j\}}\right],\ j \geq 0. \end{aligned}$$

Ομοίως, η οριακή πιθανότητα σε στιγμή αναχώρησης να βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα (εξαιρουμένης της νέας αναχώρησης) είναι

$$\begin{aligned} d_j &= \lim_{n\to\infty} \Pr[Q_n^+ = j] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Pr[Q_k^+ = j] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{\{Q_k^+ = j\}}, \quad \text{με πιθανότητα } 1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\left[\sum_{k=1}^{n} 1_{\{Q_k^+ = j\}}\right],\ j \geq 0. \end{aligned}$$

Οι a_j και d_j είναι οι οριακές πιθανότητες να βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα, ενώ η p_j είναι η οριακή πιθανότητα σε συνεχή χρόνο. Όπως και η p_j, έτσι και οι a_j και d_j έχουν ερμηνείες ως μακροπρόθεσμα ποσοστά. Συγκεκριμένα, η a_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο ποσοστό των αφίξεων που βρίσκουν j πελάτες στο σύστημα, ενώ η d_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο ποσοστό των αναχωρήσεων που αφήνουν j πελάτες στο σύστημα.

Δεν υπάρχει κάποιος λόγος οι οριακές κατανομές (p_j), (a_j) και (d_j) να συμπίπτουν και γενικά αυτό δεν ισχύει. Πράγματι, παρατηρείστε ότι στα δυο σενάρια για την D/D/1 ουρά που περιγράψαμε παραπάνω είχαμε ότι το ποσοστό των πελατών που βλέπουν κενό σύστημα κατά την άφιξή τους είναι 1, ενώ το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι κενό ειναι 0.1 και 0.9, στο πρώτο και στο δεύτερο σενάριο, αντίστοιχα.

6

Βασικά αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνουμε τέσσερα βασικά αποτελέσματα που αφορούν τα συστήματα εξυπηρέτησης, τα οποία ισχύουν κάτω από πολύ γενικές συνθήκες. Συγκεκριμένα χαρακτηρίζουμε την ευστάθεια μέσω του ρυθμού συνωστισμού ενός συστήματος και διατυπώνουμε την ιδιότητα των μεμονωμένων αφίξεων, την ιδιότητα PASTA (Poisson-Arrivals-See-Time-Averages) και το νόμο του Little.

6.1 Ρυθμός συνωστισμού - Ευστάθεια

Το μέσο ποσό εργασίας που εισέρχεται προς διεκπεραίωση σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης ανά χρονική μονάδα αναφέρεται ως ο ρυθμός συνωστισμού ρ και ισούται με το γινόμενο του ρυθμού αφίξεων λ επί το μέσο χρόνο εξυπηρέτησης b:

$$\rho = \lambda b.$$

Το ποσό της εργασίας που μπορεί να διεκπεραιώσει το σύστημα ανά χρονική μονάδα είναι ίσο με το πλήθος των υπηρετών c, αφού κάθε υπηρέτης μπορεί να διεκπεραιώσει μια μονάδα εργασίας ανά χρονική μονάδα. Επομένως, για να είναι το σύστημα ευσταθές και να να μην απειρίζεται η ουρά αναμένουμε διαισθητικά ότι θα πρέπει το μέσο ποσό εργασίας που εισέρχεται ανά χρονική μονάδα να είναι μικρότερο από τη μέγιστη δυνατότητα διεκπεραίωσης του συστήματος ανά χρονική μονάδα. Αν το σύστημα είναι ντετερμινιστικό, ακόμη κι αν είναι ίσο το μέσο ποσό εργασίας που εισέρχεται ανά χρονική μονάδα με τη μέγιστη δυνατότητα διεκπεραίωσης, αναμένουμε ότι το σύστημα είναι ευσταθές. Αν, όμως, υπάρχει τυχαιότητα, τότε κάθε φορά που το σύστημα μένει κενό, χάνεται κάποια δυνατότητα διεκπεραίωσης εξυπηρέτησης που δεν μπορεί να ανακτηθεί αργότερα, οπότε σταδιακά ο αριθμός των πελατών θα αυξάνεται και το σύστημα θα είναι ασταθές.

Θεώρημα 44 (Χαρακτηρισμός ευστάθειας της GI/GI/c ουράς) *Στο $GI/GI/c$ σύστημα εξυπηρέτησης με απεριοδική κατανομή για τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αφίξεων και/ή τους χρόνους εξυπηρέτησης, ισχύει ένα ακριβώς από τα παρακάτω:*

(i) *$\rho < c$. Τότε, το σύστημα είναι ευσταθές, δηλαδή υπάρχουν οι κατανομές (p_j), (a_j) και (d_j) και είναι $p_j > 0,\ \ j \geq 0,$ και $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ (και όμοια για τις (a_j) και (d_j)).*

(ii) *$\rho \geq c$. Τότε, το σύστημα είναι ασταθές, δηλαδή το πλήθος των πελατών απειρίζεται καθώς $t \to \infty$ και $p_j = a_j = d_j = 0,\ \ j \geq 0$.*

Η απόδειξη του αποτελέσματος αυτού είναι ιδιαίτερα περίπλοκη. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο των Baccelli and Bremaud [4] όπου αποδεικνύονται θεωρήματα ευστάθειας και άλλα θεωρητικά αποτελέσματα κάτω από γενικές συνθήκες.

6.2 Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων και ιδιότητα PASTA

Όπως είπαμε οι οριακές κατανομές (p_j), (a_j) και (d_j) γενικά δεν συμπίπτουν. Υπάρχουν, όμως, δυο περιπτώσεις στις οποίες κάποιες από αυτές συμπίπτουν.

Θεώρημα 45 (Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων) *Έστω ένα ευσταθές σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες έρχονται και αναχωρούν μεμονωμένα, δηλαδή δεν υπάρχουν ομαδικές αφίξεις ούτε ομαδικές αναχωρήσεις. Τότε, οι οριακές κατανομές σε στιγμές αφίξεων και σε στιγμές αναχωρήσεων συμπίπτουν: $(a_j) = (d_j)$.*

Η ιδιότητα των μεμονωμένων μεταβάσεων μπορεί να αιτιολογηθεί ως εξής: Έστω $A_j(t)$ το πλήθος των αφίξεων στο $(0,t]$ που βρίσκουν j πελάτες και $A(t)$ το συνολικό πλήθος αφίξεων στο $(0,t]$. Τότε, έχουμε $a_j = \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)}$. Ομοίως, $d_j = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)}{D(t)}$, όπου $D_j(t)$ το πλήθος των αναχωρήσεων στο $(0,t]$ που αφήνουν πίσω τους j πελάτες και $D(t)$ το συνολικό πλήθος αναχωρήσεων στο $(0,t]$. Οι μακροπρόθεσμοι ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων είναι $\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t}$ και $\lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t}$. Έχουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t},$$

αφού οι μακροπρόθεσμοι ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων θα είναι ίσοι υπό την υπόθεση της ευστάθειας (ο ρυθμός των αφίξεων είναι προφανώς μεγαλύτερος ή ίσος του ρυθμού των αναχωρήσεων, αλλά δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος αν το σύστημα είναι ευσταθές). Επίσης, έχουμε ότι $|A_j(t) - D_j(t)| \leq 1$, αφού οι αφίξεις που βρίσκουν j πελάτες και οι αναχωρήσεις που αφήνουν j πελάτες γίνονται εναλλάξ. Πράγματι, μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων που βρίσκουν j πελάτες πρέπει να υπάρχει μια ακριβώς αναχώρηση που αφήνει j πελάτες στο σύστημα και μεταξύ δυο διαδοχικών αναχωρήσεων που αφήνουν j πελάτες πρέπει να υπάρχει μια ακριβώς άφιξη που βρίσκει j πελάτες. Οπότε, έχουμε και ότι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)}{t}.$$

Επομένως, είναι

$$a_j = \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)/t}{A(t)/t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)/t}{D(t)/t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)/t}{D(t)/t} = d_j,$$

όπου οι ισότητες νοούνται με πιθανότητα 1.

Θεώρημα 46 (Ιδιότητα PASTA (Poisson-Arrivals-See-Time-Averages)) *Έστω ένα ευσταθές σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson $\{N(t)\}$ (δηλαδή οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων είναι* *ανεξάρτητοι και ισόνομοι με εκθετική κατανομή), και για κάθε χρονική στιγμή* t *η* $\{N(u) - N(t) : u \geq t\}$ *είναι ανεξάρτητη από τη διαδικασία του αριθμού των πελατών* $\{Q(u) : 0 \leq u \leq t\}$. *Τότε οι οριακές κατανομές σε στιγμές αφίξεων και σε συνεχή χρόνο συμπίπτουν:* $(a_j) = (p_j)$.

Γενικότερα, μπορούμε να πούμε ότι αν ένα σύστημα εξυπηρέτησης παρατηρείται στις στιγμές μιας διαδικασίας Poisson (χωρίς να είναι ανάγκη οι στιγμές παρατήρησης να είναι αφίξεις), και για κάθε χρονική στιγμή το μέλλον της διαδικασίας των παρατηρήσεων δεν εξαρτάται από την παρελθούσα ιστορία του συστήματος, τότε η οριακή πιθανότητα σε στιγμή παρατήρησης το σύστημα να είναι σε κάποια κατάσταση ισούται με την οριακή πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην ίδια κατάσταση, σε συνεχή χρόνο. Ή, ισοδύναμα, το ποσοστό των παρατηρήσεων που βλέπουν το σύστημα σε κάποια κατάσταση ισούται με το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται σε αυτή την κατάσταση. Αυτή η ερμηνεία δίνει και το όνομα στη συγκεκριμένη ιδιότητα: Οι Poisson αφίξεις βλέπουν ποσοστά χρόνου (Poisson arrivals see time averages).

Η διαισθητική αιτιολόγηση της ιδιότητας PASTA είναι ότι η διαδικασία Poisson μοντελοποιεί την ιδέα των εντελώς τυχαίων αφίξεων στο χρόνο και επομένως η παρατήρηση του αριθμού των πελατών κατά τη στιγμή της άφιξης ενός πελάτη στο σύστημα ισοδυναμεί με την παρατήρηση του αριθμού των πελατών σε μια τυχαία χρονική στιγμή (σε συνεχή χρόνο). Η αιτιολόγηση αυτή μπορεί να γίνει περισσότερο κατανοητή αν σκεφθούμε ως εξής: Έστω $A(t, t+h)$ το πλήθος των αφίξεων σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο διάστημα $(t, t+h]$. Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} a_j &= \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \Pr[Q(t) = j | A(t, t+h) > 0] \\ &= \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t) = j, A(t, t+h) > 0]}{\Pr[A(t, t+h) > 0]} \\ &= \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t) = j] \Pr[A(t, t+h) > 0 | Q(t) = j]}{\Pr[A(t, t+h) > 0]}. \end{aligned}$$

Όμως, το ενδεχόμενο $\{A(t, t+h) > 0\}$ είναι ανεξάρτητο του $\{Q(t) = j\}$, λόγω της υπόθεσης ότι η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson, της οποίας η (μελλοντική) εξέλιξη μετά τη χρονική στιγμή t δεν εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t. Επομένως $\Pr[A(t, t+h) > 0 | Q(t) = j] = \Pr[A(t, t+h) > 0]$ και άρα

$$a_j = \lim_{t\to\infty} \Pr[Q(t) = j] = p_j.$$

Τα δυο παραπάνω αποτελέσματα επεκτείνονται και ισχύουν κάτω από ασθενέστερες υποθέσεις. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στα βιβλία των Baccelli and Bremaud [4] και του Wolff [14], όπου υπάρχουν αποδείξεις για τέτοια αποτελέσματα.

Φυσικά μπορούμε να συνδυάσουμε τα δυο αυτά αποτελέσματα και τότε έχουμε ότι σε συστήματα που οι πελάτες έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson και έχουμε μεμονωμένες μεταβάσεις (αφίξεις, αναχωρήσεις) όλες οι οριακές κατανομές συμπίπτουν: $(p_j) = (a_j) = (d_j)$.

6.3 Ο νόμος του Little

Ο νόμος του Little είναι ένα πολύ γενικό αποτέλεσμα που συνδέει το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα $E[Q]$, τον ρυθμό αφίξεων λ και τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη $E[S]$ σε αυτό. Συγκεκριμένα έχουμε

Θεώρημα 47 (Νόμος του Little) *Έστω ένα σύστημα εξυπηρέτησης με μέσο πλήθος πελατών $E[Q]$, ρυθμό αφίξεων λ και μέσο χρόνο παραμονής πελάτη $E[S]$. Τότε*

$$E[Q] = \lambda E[S].$$

Διαισθητικά, το αποτέλεσμα του Little μπορεί να αιτιολογηθεί με ένα " οικονομικό" επιχείρημα, θεωρώντας ότι κάθε πελάτης πληρώνει 1 χρηματική μονάδα ανά χρονική μονάδα παραμονής του στο σύστημα. Τότε ο διαχειριστής του συστήματος λαμβάνει $E[Q]$ χρηματικές μονάδες στη μονάδα του χρόνου, αν υποθέσουμε ότι η πληρωμή γίνεται κατά τρόπο "συνεχή". Από την άλλη μεριά, η μακροπρόθεσμη μέση είσπραξη του διαχειριστή στη μονάδα του χρόνου θα πρέπει να είναι η ίδια αν οι πελάτες πληρώνουν " άμα τη αφίξει", δηλαδή αν, προκαταβολικά, με την είσοδό τους στο σύστημα δίνουν όλο το ποσό για την παραμονή τους. Αλλά τότε, θα έχουμε κατά μέσο όρο λ πελάτες ανά χρονική μονάδα και ο καθένας θα πληρώνει $E[S]$ χρηματικές μονάδες, οπότε η συνολική είσπραξη του διαχειριστή θα είναι $\lambda E[S]$ χρηματικές μονάδες στη μονάδα του χρόνου. Αφού τα δυο ποσά πρέπει να είναι ίσα (μακροπρόθεσμο μέσο έσοδο με συνεχή είσπραξη = μακροπρόθεσμο μέσο έσοδο με προκαταβολική είσπραξη) έχουμε τη σχέση $E[Q] = \lambda E[S]$.

Ένας άλλος τρόπος να αποτυπώσουμε πιό αυστηρά την παραπάνω ιδέα είναι ο εξής: Έστω $Q(t)$ το πλήθος των πελατών τη στιγμή t, $A(t)$ το πλήθος των αφίξεων ως τη στιγμή t και $S_1, S_2, \ldots$ οι διαδοχικοί χρόνοι παραμονής των πελατών. Τότε τα μέτρα απόδοσης που εμφανίζονται στο Νόμο του Little έχουν τις εξής εκφράσεις:

$$E[Q] = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)du}{t},\ \lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t},\ E[S] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n S_k}{n}.$$

Έστω $T_1, T_2, \ldots$ οι χρόνοι κατά τους οποίους αδειάζει ένα σύστημα εξυπηρέτησης (επομένως είναι οι στιγμές που αρχίζουν οι διαδοχικές περίοδοι αργίας του συστήματος). Τότε, έχουμε ότι

$$\int_0^{T_n} Q(u)du = \sum_{k=1}^{A(T_n)} S_k.$$

Πράγματι, κάθε χρονική μονάδα παραμονής κάθε πελάτη που αφίχθει στο διάστημα $(0, T_n]$ συνεισφέρει μια μονάδα στο αριστερό μέλος, επομένως το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους ισούται με το συνολικό χρόνο παραμονής όλων των πελατών που αφίχθηκαν στο διάστημα $(0, T_n]$, που είναι ακριβώς το δεξιό μέλος. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$\begin{aligned} E[Q] &= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)du}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{T_n} Q(u)du}{T_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{A(T_n)} S_k}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A(T_n)}{T_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{A(T_n)} S_k}{A(T_n)} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} S_k}{n} = \lambda E[S]. \end{aligned}$$

Αυστηρές αποδείξεις του θεωρήματος Little έχουν γίνει κάτω από πολύ γενικές συνθήκες. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Little [9] και Stidham [12], καθώς και στα βιβλία των Baccelli and Bremaud [4] και Wolff [14].

Το αποτέλεσμα του Little μπορεί να εφαρμοστεί και σε υποσυστήματα ενός συστήματος, δίνοντας χρήσιμα αποτελέσματα. Στην περίπτωση αυτή, η $E[Q]$ θα αναφέρεται στο μέσο πλήθος πελατών στο συγκεκριμένο υποσύστημα, το λ στο ρυθμό άφιξης στο συγκεκριμένο υποσύστημα και το $E[S]$ στο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο συγκεκριμένο υποσύστημα.

Θεωρώντας ως υποσύστημα το χώρο αναμονής ενός συστήματος (δηλαδή την ουρά), παίρνουμε τη σχέση

$$E[Q_q] = \lambda E[W],$$

δηλαδή, ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά ισούται με τον ρυθμό αφίξεων επί τον μέσο χρόνο αναμονής ενός πελάτη μέχρι να αρχίσει η εξυπηρέτησή του.

Θεωρώντας ως υποσύστημα το χώρο εξυπηρέτησης ενός συστήματος, παίρνουμε τη σχέση

$$E[Q_s] = \lambda E[X] = \lambda b = \rho, \tag{6.1}$$

δηλαδή, ο μέσος αριθμός πελατών στο χώρο εξυπηρέτησης που προφανώς ταυτίζεται με τον μέσο αριθμό απασχολημένων υπηρετών ισούται με το ρυθμό συνωστισμού του συστήματος. Έτσι έχουμε μια δεύτερη ερμηνεία του ρυθμού συνωστισμού. Όχι μόνο είναι το μέσο ποσό εργασίας που εισέρχεται στο σύστημα ανά χρονική μονάδα αλλά επιπλέον εκφράζει και το μέσο αριθμό απασχολημένων υπηρετών μια τυχούσα χρονική στιγμή. Επειδή ο μέσος αριθμός απασχολημένων υπηρετών ισούται με το πλήθος c των υπηρετών επί την πιθανότητα ένας υπηρέτης να είναι απασχολημένος συμπεραίνουμε ότι η οριακή πιθανότητα απασχολημένου υπηρέτη ή, ισοδύναμα, το ποσοστό του χρόνου απασχόλησης ενός υπηρέτη είναι $\frac{\rho}{c}$.

Ειδικά για την GI/GI/1 ουρά έχουμε

$$\rho = E[Q_s] = 0\Pr[Q_s = 0] + 1\Pr[Q_s = 1] = \Pr[Q_s = 1] = \Pr[Q \geq 1] = 1 - p_0,$$

επομένως στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι η οριακή πιθανότητα κενού συστήματος είναι

$$p_0 = 1 - \rho. \tag{6.2}$$

6.4 Ασκήσεις

1. Θεωρήστε μια $M/M/c$ ουρά με ρυθμό αφίξεων 5 πελάτες την ώρα και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης ανά πελάτη 78 λεπτά.
    1. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός υπηρετών c που χρειάζεται για να είναι το σύστημα ευσταθές (δηλαδή να μην απειρίζεται η ουρά);
    2. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός υπηρετών που χρειάζεται αν η εργατική νομοθεσία επιβάλλει κάθε υπηρέτης να είναι απασχολημένος το πολύ το 80% του χρόνου του;

2. Να βρείτε τις οριακές κατανομές (p_n), (a_n) και (d_n) των αριθμών των πελατών σε συνεχή χρόνο, σε στιγμές αφίξεων και σε στιγμές αναχωρήσεων, αντίστοιχα, σε μια ευσταθή $M/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, χρησιμοποιώντας το νόμο του Little και την ιδιότητα PASTA. Για το σκοπό αυτό θεωρήστε ως 'σύστημα' την i θέση του συστήματος εξυπηρέτησης για $i = 1, 2, \ldots$.

7

Αποτίμηση απόδοσης: Η ανάλυση μέσης τιμής

Ο νόμος του Little, σε συνδυασμό με κάποιες άλλες ιδιότητες (συνήθως με χρήση και της ιδιότητας PASTA), μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε με πιθανοθεωρητικούς συλλογισμούς και ελάχιστους υπολογισμούς τα μέτρα απόδοσης $E[Q]$ και $E[S]$ για αρκετά συστήματα, χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες κατανομές. Η ανάλυση αυτή αναφέρεται συχνά ως ανάλυση μέσης τιμής (Mean Value Analysis – MVA) και είναι ένα ιδιαίτερα ισχυρό εργαλείο. Θα την παρουσιάσουμε αναλύοντας μερικά συγκεκριμένα συστήματα με τη μέθοδο αυτή.

7.1 Ανάλυση μέσης τιμής στις M/M/1/1 και M/GI/1/1 ουρές

Θεωρούμε μια M/M/1/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και Exp(μ) κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε τις $E[Q]$ και $E[S]$.

Από τον νόμο του Little έχουμε

$$E[Q] = \lambda E[S]. \tag{7.1}$$

Για τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη, δεσμεύοντας στον αριθμό των πελατών Q^- που βλέπει ένας πελάτης κατά την άφιξή του, έχουμε

$$\begin{aligned} E[S] &= \Pr[Q^- = 0]E[S|Q^- = 0] + \Pr[Q^- = 1]E[S|Q^- = 1] \\ &= a_0 \cdot \frac{1}{\mu} + a_1 \cdot 0 = \frac{a_0}{\mu} \\ &= \frac{p_0}{\mu}, \end{aligned} \tag{7.2}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της PASTA. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.1)–(7.2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $E[Q] = p_1$ έχουμε

$$p_1 = \lambda \frac{p_0}{\mu} = \rho p_0, \tag{7.3}$$

όπου $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ είναι ο ρυθμός συνωστισμού. Επίσης το σύστημα είναι ευσταθές, αφού έχει πεπερασμένη χωρητικότητα και άρα

$$p_0 + p_1 = 1. \tag{7.4}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (7.3)–(7.4) παίρνουμε

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho},\ p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}, \tag{7.5}$$

οπότε

$$E[Q] = \frac{\rho}{1+\rho},\ E[S] = \frac{1}{\mu(1+\rho)}.$$

Η ανάλυση παραμένει έγκυρη και στην περίπτωση της M/GI/1/1 ουράς, με ρυθμό αφίξεων λ και γενικά κατανεμημένους χρόνους εξυπηρέτησης με μέσο χρόνο εξυπηρέτησης b. Πράγματι, η (7.1) εξακολουθεί να ισχύει, ενώ η (7.2) γίνεται $E[S] = p_0 b$. Επομένως, η (7.3) γίνεται $p_1 = \lambda p_0 b = \rho b$, και η (7.5) ισχύει. Επίσης, έχουμε

$$E[Q] = \frac{\rho}{1+\rho},\ E[S] = \frac{b}{1+\rho}.$$

7.2 Ανάλυση μέσης τιμής στις M/M/1 και M/GI/1 ουρές

Θεωρούμε μια M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και $\mathrm{Exp}(\mu)$ κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε τις $E[Q]$ και $E[S]$.

Από τον νόμο του Little έχουμε

$$E[Q] = \lambda E[S]. \tag{7.6}$$

Για τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη, δεσμεύοντας στον αριθμό των πελατών Q^- που βλέπει ένας πελάτης κατά την άφιξή του, έχουμε

$$E[S] = \frac{E[Q^-]+1}{\mu} = \frac{E[Q]+1}{\mu}. \tag{7.7}$$

Πράγματι, ένας πελάτης που βρίσκει κατά την άφιξή του j πελάτες στο σύστημα θα παραμείνει σε αυτό για $j+1$ εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ. Ο πρώτος χρόνος αντιστοιχεί στον υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης του πελάτη που εξυπηρετείται. Λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής είναι και αυτός εκθετικός με παράμετρο μ. Οι άλλοι χρόνοι είναι οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών που βρίσκονται στο χώρο αναμονής και του αφικνούμενου πελάτη. Οπότε προκύπτει η πρώτη ισότητα. Η δεύτερη ισότητα είναι άμεση από την ιδιότητα PASTA.

Λύνοντας το σύστημα των (7.6) και (7.7) για τις $E[S]$ και $E[Q]$ προκύπτει ότι

$$E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho},\ E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}, \tag{7.8}$$

όπου $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ είναι ο ρυθμός συνωστισμού.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση της M/GI/1 ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης με κάποια κατανομή $F_X(x)$. Η (7.6) εξακολουθεί να ισχύει, αλλά η (7.7), όχι. Ο λόγος είναι ότι ένας πελάτης που βρίσκει κατά την άφιξή του j πελάτες στο σύστημα θα παραμείνει σε αυτό για j ολόκληρους χρόνους εξυπηρέτησης (για τον δικό του και για τους χρόνους εξυπηρέτησης των πελατών που βρίσκονται ήδη στο σύστημα στο χώρο αναμονής) συν τον υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης του πελάτη που ήδη εξυπηρετείται. Οπότε, δεδομένου ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης δεν είναι εκθετικοί, αυτός ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης δεν έχει την ίδια κατανομή με έναν ολόκληρο χρόνο εξυπηρέτησης. Έτσι, η αντίστοιχη της σχέσης (7.7), με δέσμευση στον αριθμό των πελατών που βρίσκει ένας αφικνούμενος πελάτης, είναι η σχέση

$$\begin{aligned} E[S] &= \Pr[Q^- = 0]b + \Pr[Q^- > 0](E[Q^-|Q^- > 0]b + E[R|Q^- > 0]) \\ &= \Pr[Q = 0]b + \Pr[Q > 0](E[Q|Q > 0]b + E[R|Q > 0]), \end{aligned} \tag{7.9}$$

όπου b είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης και R ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη που εξυπηρετείται. Η δεύτερη ισότητα της (7.9) ισχύει και πάλι λόγω της PASTA. Όμως, όταν κοιτάμε το σύστημα σε περιόδους που $Q > 0$, δηλαδή κατά τη διάρκεια μόνο των περιόδων συνεχούς λειτουργίας, οι χρόνοι αναχωρήσεων των πελατών γίνονται οι ενδιάμεσοι χρόνοι μιας ανανεωτικής διαδικασίας (αφού στο σύστημα εξυπηρετείται πάντα κάποιος πελάτης). Επομένως, υπό τη δέσμευση $Q > 0$, ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης R αντιστοιχεί στον οριακό υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης μιας ανανεωτικής διαδικασίας με ενδιάμεσους χρόνους τους χρόνους εξυπηρέτησης του συστήματος (βλέπε τα παραδείγματα 7 και 11, καθώς και την παράγραφο 2.5). Επομένως, χρησιμοποιώντας την (1.3) ή την (2.2), έχουμε

$$E[R|Q > 0] = \frac{b^2 + \sigma^2}{2b} = E[X_e], \tag{7.10}$$

όπου σ^2 είναι η διασπορά των χρόνων εξυπηρέτησης και X_e συμβολίζει μια τυχαία μεταβλητή που έχει την κατανομή ισορροπίας των χρόνων εξυπηρέτησης.

Επίσης, από την (6.2), έχουμε ότι η πιθανότητα κενού συστήματος είναι

$$\Pr[Q = 0] = 1 - \rho. \tag{7.11}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις (7.10)-(7.11) στην (7.9) παίρνουμε

$$\begin{aligned} E[S] &= (1 - \rho)b + E[Q1_{\{Q>0\}}]b + \rho E[X_e] \\ &= (1 - \rho)b + E[Q]b + \rho E[X_e]. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Λύνοντας το σύστημα των (7.6) και (7.12) για τις $E[Q]$ και $E[S]$, παίρνουμε

$$E[Q] = \rho + \frac{\rho}{1-\rho}\lambda E[X_e], \; E[S] = b + \frac{\rho}{1-\rho}E[X_e], \tag{7.13}$$

Ένας εύκολος τρόπος να θυμάται κανείς αυτά τα αποτελέσματα, είναι να θυμάται ότι ο μέσος χρόνος αναμονής στην M/GI/1 ουρά ισούται με το μέσο αριθμό πελατών στην M/M/1 ουρά επί τη μέση τιμή της κατανομής ισορροπίας των χρόνων εξυπηρέτησης:

$$E[W] = \frac{\rho}{1-\rho}E[X_e].$$

7.3 Ανάλυση μέσης τιμής στις M/M/1 και M/GI/1 ουρές με την K-πολιτική ενεργοποίησης

Θεωρούμε μια M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και $\text{Exp}(\mu)$ κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης, όπου μόλις το σύστημα αδειάσει ο υπηρέτης παύει να παρέχει εξυπηρέτηση και αρχίζει και πάλι να εξυπηρετεί, μόλις μαζευτούν K πελάτες με $K \geq 1$ (για $K = 1$ έχουμε την κλασική M/M/1 ουρά). Ενδιαφερόμαστε για τον υπολογισμό των $E[Q]$ και $E[S]$.

Από τον νόμο του Little έχουμε

$$E[Q] = \lambda E[S]. \tag{7.14}$$

Έστω I η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στην κατάσταση του υπηρέτη:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{αν ο υπηρέτης παρέχει εξυπηρέτηση,} \\ 0 & \text{αν ο υπηρέτης δεν παρέχει εξυπηρέτηση.} \end{cases}$$

Τότε δεσμεύοντας στην κατάσταση του υπηρέτη που βρίσκει ένας αφικνούμενος πελάτης, I^-, έχουμε τη σχέση

$$E[S] = \Pr[I^- = 0]E[S|I^- = 0] + \Pr[I^- = 1]E[S|I^- = 1]. \tag{7.15}$$

Θα υπολογίσουμε, τώρα τις ποσότητες $\Pr[I^- = 0]$, $\Pr[I^- = 1]$, $E[S|I^- = 0]$ και $E[S|I^- = 1]$ συναρτήσει των παραμέτρων του συστήματος.

Για τις $\Pr[I^- = 0]$, $\Pr[I^- = 1]$ εφαρμόζουμε τον νόμο του Little στο χώρο εξυπηρέτησης, θεωρώντας ότι ένας πελάτης βρίσκεται στο χώρο εξυπηρέτησης μόνο εφόσον του παρέχεται εξυπηρέτηση. Έτσι, έχουμε τη σχέση (6.1), που στη συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται

$$\Pr[I = 1] = E[I] = E[Q_s] = \lambda E[X] = \lambda \frac{1}{\mu} = \rho,$$

και επομένως $\Pr[I = 0] = 1 - \rho$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα PASTA έχουμε ότι οι πιθανότητες αυτές είναι οι ίδιες με τις αντίστοιχες σε στιγμές αφίξεων πελατών, οπότε

$$\Pr[I^- = 0] = 1 - \rho, \tag{7.16}$$

$$\Pr[I^- = 1] = \rho, \tag{7.17}$$

Για την $E[S|I^- = 0]$, ας θεωρήσουμε έναν αφικνούμενο πελάτη που βρίσκει j πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή του, δεδομένου ότι ο υπηρέτης δεν παρέχει εξυπηρέτηση, τότε αυτός θα πρέπει να περιμένει $K-j-1$ αφίξεις ώστε να μαζευτούν οι K πελάτες που απαιτούνται για την ενεργοποίηση του υπηρέτη. Λόγω του ότι ο μέσος χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων είναι $\frac{1}{\lambda}$, ο μέσος χρόνος για την ενεργοποίηση του υπηρέτη είναι $(K-j-1)\frac{1}{\lambda}$. Κατόπιν θα απαιτηθούν $j+1$ ολόκληροι χρόνοι εξυπηρέτησης μέχρι να εξυπηρετηθεί ο αφικνούμενος πελάτης, οπότε ο μέσος απαιτούμενος χρόνος είναι $(j+1)\frac{1}{\mu}$. Επομένως, έχουμε ότι

$$E[S|I^- = 0] = (K - E[Q^-|I^- = 0] - 1)\frac{1}{\lambda} + (E[Q^-|I^- = 0] + 1)\frac{1}{\mu}. \tag{7.18}$$

Για την $E[S|I^- = 1]$, έχουμε ότι

$$E[S|I^- = 1] = (E[Q^-|I^- = 1] + 1)\frac{1}{\mu}. \tag{7.19}$$

Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, ένας αφικνούμενος πελάτης που βρίσκει j πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή του και τον υπηρέτη να παρέχει εξυπηρέτηση, θα μείνει στο σύστημα για $j+1$ χρόνους εξυπηρέτησης, έναν υπολειπόμενο και j ολόκληρους. Όμως, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη που εξυπηρετείται είναι σαν να ξεκινάει εκείνη τη στιγμή και άρα ο μέσος απαιτούμενος χρόνος παραμονής για την εξυπηρέτηση του αφικνούμενου πελάτη είναι $(j+1)\frac{1}{\mu}$.

Αντικαθιστώντας, τώρα, τις (7.16)-(7.19) στην (7.15) παίρνουμε

$$E[S] = (1-\rho)\frac{K - E[Q^-|I^- = 0] - 1}{\lambda} + \frac{E[Q^-]+1}{\mu}. \tag{7.20}$$

Λόγω της PASTA έχουμε ότι $E[Q^-] = E[Q]$ και $E[Q^-|I^- = 0] = E[Q|I = 0]$. Για τον υπολογισμό της $E[Q|I = 0]$, έχουμε ότι αν παρατηρούμε το σύστημα μόνο στις περιόδους που ο υπηρέτης είναι ανενεργός ($I = 0$) τότε το πλήθος των πελατών περνάει διαδοχικά από τις καταστάσεις $0, 1, 2, \ldots, K-1, 0, 1, 2, \ldots, K-1, 0, \ldots$ και σε κάθε κατάσταση μένει για $\mathrm{Exp}(\lambda)$ χρόνο. Επομένως, η δεσμευμένη κατανομή του πλήθους των πελατών, δεδομένου ότι $I = 0$ είναι διακριτή ομοιόμορφη στο $\{0, 1, 2, \ldots, K-1\}$, οπότε $E[Q|I = 0] = \frac{K-1}{2}$. Οπότε η (7.20) γίνεται

$$E[S] = (1-\rho)\frac{K-1}{2\lambda} + \frac{E[Q]+1}{\mu}. \tag{7.21}$$

Λύνοντας το σύστημα των (7.14) και (7.22) για τις $E[Q]$ και $E[S]$ παίρνουμε

$$E[Q] = \frac{K-1}{2} + \frac{\rho}{1-\rho}, \; E[S] = \frac{K-1}{2\lambda} + \frac{1}{\mu(1-\rho)}. \tag{7.22}$$

Ας θεωρήσουμε, τώρα, την M/GI/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης με κάποια κατανομή $F_X(x)$ με την K-πολιτική ενεργοποίησης. Τί αλλάζει από την ανάλυση της αντίστοιχης M/GI/1 ουράς; Οι εξισώσεις (7.14)-(7.17) εξακολουθούν να ισχύουν με την ίδια λογική που αναπτύξαμε παραπάνω, μόνο που τώρα $\rho = \lambda b$, με b τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης. Για την $E[S|I^- = 0]$, έχουμε με ακριβώς την ίδια συλλογιστική

$$E[S|I^- = 0] = (K - E[Q^-|I^- = 0] - 1)\frac{1}{\lambda} + (E[Q^-|I^- = 0] + 1)b. \tag{7.23}$$

Όμως, για την $E[S|I^- = 1]$, η συλλογιστική πρέπει να διαφοροποιηθεί λίγο, λόγω της έλλειψης της αμνήμονης ιδιότητας. Συγκεκριμένα θα έχουμε

$$E[S|I^- = 1] = E[Q^-|I^- = 1]b + E[R|I^- = 1], \tag{7.24}$$

όπου R ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη που εξυπηρετείται. Χρησιμοποιώντας την PASTA, έχουμε ότι η κατανομή του R σε στιγμές αφίξεων πελατών που βρίσκουν τον υπηρέτη ενεργό ταυτίζεται με την κατανομή του R σε συνεχή χρόνο, όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός. Όμως, όταν κοιτάμε το σύστημα σε περιόδους που ο υπηρέτης είναι ενεργός, οι χρόνοι αναχωρήσεων των πελατών γίνονται οι ενδιάμεσοι χρόνοι μιας ανανεωτικής διαδικασίας (αφού στο σύστημα εξυπηρετείται πάντα κάποιος πελάτης). Επομένως, υπό τη δέσμευση $I = 1$, ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης R αντιστοιχεί στον οριακό υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης μιας ανανεωτικής διαδικασίας με ενδιάμεσους χρόνους τους χρόνους εξυπηρέτησης του συστήματος (βλέπε τα παραδείγματα 7 και 11, καθώς και την παράγραφο 2.5).

Επομένως, χρησιμοποιώντας την (1.3) ή την (2.2), έχουμε

$$E[R|I=1] = \frac{b^2+\sigma^2}{2b} = E[X_e], \tag{7.25}$$

όπου σ^2 είναι η διασπορά των χρόνων εξυπηρέτησης και X_e συμβολίζει μια τυχαία μεταβλητή που έχει την κατανομή ισορροπίας των χρόνων εξυπηρέτησης.

Αντικαθιστώντας, τώρα, τις (7.16)-(7.17) και τις (7.23)-(7.25) στην (7.15) παίρνουμε

$$E[S] = (1-\rho)\frac{K - E[Q^-|I^-=0] - 1}{\lambda} + E[Q^-]b + (1-\rho)b + \rho E[X_e]. \tag{7.26}$$

Με τη συλλογιστική που έχουμε αναπτύξει και συνεχίζει να ισχύει με τους γενικά κατανεμημένους χρόνους εξυπηρέτησης έχουμε $E[Q^-] = E[Q]$ και $E[Q^-|I^-=0] = E[Q|I=0] = \frac{K-1}{2}$. Οπότε η (7.26) γίνεται

$$E[S] = (1-\rho)\frac{K-1}{2\lambda} + E[Q]b + (1-\rho)b + \rho E[X_e]. \tag{7.27}$$

Λύνοντας το σύστημα των (7.14) και (7.27) για τις $E[Q]$ και $E[S]$ παίρνουμε

$$E[Q] = \frac{K-1}{2} + \rho + \frac{\rho}{1-\rho}\lambda E[X_e], \; E[S] = \frac{K-1}{2\lambda} + b + \frac{\rho}{1-\rho}E[X_e]. \tag{7.28}$$

7.4 Ασκήσεις

1. Βρείτε τον οριακό μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, $E[Q]$ στην GI/GI/∞ ουρά με μέσο ενδιάμεσο χρόνο αφίξεων a και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης b.

2. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη, στο οποίο καταφθάνουν πελάτες δύο τύπων 1 και 2, σύμφωνα με δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Κάθε πελάτης, ανεξαρτήτως τύπου έχει $Exp(\mu)$ χρόνο εξυπηρέτησης. Οι πελάτες τύπου 1 έχουν απόλυτη προτεραιότητα έναντι των πελατών τύπου 2, δηλαδή όταν υπάρχουν πελάτες τύπου 1 στο σύστημα ο υπηρέτης εξυπηρετεί αυτούς και αρχίζει να εξυπηρετεί πελάτες τύπου 2 μόνο όταν δεν υπάρχουν πελάτες τύπου 1. Επιπλέον, αν ένας πελάτης τύπου 2 εξυπηρετείται και αφιχθεί πελάτης τύπου 1, ο υπηρέτης διακόπτει την εξυπηρέτηση και πηγαίνει να εξυπηρετήσει τον νεοαφιχθέντα πελάτη τύπου 1. Να βρεθούν οι μέσοι οριακοί αριθμοί πελατών τύπων 1 και 2, $E[Q_1]$ και $E[Q_2]$, αντίστοιχα.

3. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με παράμετρο λ, ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν την κατανομή Exp(μ). Κάθε φορά που το σύστημα αδειάζει ο υπηρέτης απενεργοποιείται. Με την άφιξη ενός πελάτη σε κενό σύστημα, ο υπηρέτης μπαίνει σε διαδικασία ενεργοποίησης. Ο χρόνος που χρειάζεται να ενεργοποιηθεί (οπότε και θα αρχίσει να παρέχει κανονικά εξυπηρέτηση) ακολουθει την κατανομή Exp(θ). Κατά τη διάρκεια του χρόνου αυτού οι αφίξεις συνεχίζονται κανονικά. Το σύστημα αυτό αναφέρεται ως η M/M/1 ουρά με εκθετικούς

χρόνους εκκίνησης. Βρείτε τον οριακό μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, $E[Q]$, και το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη σε αυτό, $E[S]$, χρησιμοποιώντας την ανάλυση μέσης τιμής.

4. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με ρυθμό λ, ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την κατανομή $\mathrm{Exp}(\mu)$. Ο υπηρέτης εναλλάσεται μεταξύ περιόδων λειτουργίας και αργίας. Οι χρόνοι λειτουργίας έχουν την κατανομή $\mathrm{Exp}(\zeta)$, ενώ οι χρόνοι αργίας την κατανομή $\mathrm{Exp}(\theta)$. Οι αφίξεις στο σύστημα γίνονται κανονικά, ανεξάρτητα αν ο υπηρέτης είναι σε περίοδο λειτουργίας ή αργίας. Όμως, εξυπηρέτηση παρέχεται μόνο όταν ο υπηρέτης βρίσκεται σε περίοδο λειτουργίας. Το σύστημα αυτό αναφέρεται ως η M/M/1 ουρά με εναλλασσόμενες εκθετικές περιόδους λειτουργίας και αργίας. Βρείτε τον οριακό μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, $E[Q]$, και το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη σε αυτό, $E[S]$, χρησιμοποιώντας την ανάλυση μέσης τιμής.

5. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και μηδενικό χώρο αναμονής. Οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, ενώς οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι $\mathrm{Exp}(\mu)$. Ένας πελάτης που κατά την άφιξή του βρίσκει τον υπηρέτη ελεύθερο αρχίζει άμεσα να εξυπηρετείται. Αν, όμως, βρει τον υπηρέτη κατειλημένο, τότε αναχωρεί από το σύστημα και προσπαθεί αργότερα μέχρι τελικά να εξυπηρετηθεί. Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών επαναπροσπαθειών ενός πελάτη έχουν την κατανομή $\mathrm{Exp}(\gamma)$.Το σύστημα αυτό αναφέρεται ως η M/M/1/1 ουρά με εκθετικές επαναπροσπάθειες. Βρείτε τον οριακό μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, $E[Q]$, και το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη σε αυτό, $E[S]$, χρησιμοποιώντας την ανάλυση μέσης τιμής.

8

Αποτίμηση απόδοσης: Μαρκοβιανές ουρές

8.1 Απλές Μαρκοβιανές ουρές

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τις πλέον απλές ουρές, στις οποίες ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης θανάτου, δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή το σύστημα όντας σε μια κατάσταση n μπορεί να μεταβεί μόνο στην $n+1$ (λόγω άφιξης πελάτη) ή στην $n-1$ λόγω αναχώρησης. Παρόλο που η μελέτη αυτών των συστημάτων είναι πολύ απλή, η θέση τους στη Θεωρία Ουρών είναι πολύ σημαντική δεδομένης της μεγάλης εφαρμοσιμότητάς τους.

Ένα σύστημα εξυπηρέτησης αναφέρεται ως απλή Μαρκοβιανή ουρά αν η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ που καταγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης θανάτου με ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{αν } i \geq 0,\ j = i+1, \\ \mu_i & \text{αν } i \geq 1,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Σε ένα τέτοιο σύστημα οι αφίξεις και οι αναχωρήσεις γίνονται μεμονωμένα. Οι ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων είναι λ_j και μ_j αντίστοιχα, όταν υπάρχουν j πελάτες στο σύστημα.

Από την συζήτηση στο τέλος της παραγράφου 3.3, έχουμε δει ότι το σύστημα είναι ευσταθές, δηλαδή υπάρχει στάσιμη κατανομή, αν και μόνο αν

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} < \infty.$$

Τότε, οι οριακές πιθανότητες n πελατών στο σύστημα σε συνεχή χρόνο δίνονται από τον τύπο

$$p_n = \begin{cases} B & \text{αν } n = 0, \\ B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} & \text{αν } n \geq 1. \end{cases}$$

8.2 Ο ρυθμός διαπέρασης και οι εμφυτευμένες κατανομές

Ως ρυθμό διαπέρασης (throughput) μ^* ενός συστήματος εξυπηρέτησης εννοούμε τον οριακό μέσο ρυθμό εξυπηρετούμενων πελατών ανά χρονική μονάδα. Ο ρυθμός αυτός, στην περίπτωση που εξυπηρετούνται όλοι οι πελάτες που εισέρχονται (δηλαδή δεν συμβαίνουν υπαναχωρήσεις πελατών), ισούται με τον οριακό ρυθμό εισερχομένων πελατών ανά χρονική μονάδα λ^*. Έστω $A(t, t+h)$ και $D(t, t+h)$ τα πλήθη αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα σε μια απλή Μαρκοβιανή ουρά στο διάστημα $(t, t+h]$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\lambda^* &= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \frac{E[A(t,t+h)]}{h} = \frac{\Pr[A(t,t+h)=1]+o(h)}{h} \\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\Pr[Q(t)=n]\Pr[A(t,t+h)=1|Q(t)=n]}{h} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_n\lambda_n.
\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\mu^* = \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \frac{E[D(t,t+h)]}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n\mu_n.$$

Ισχύει, όπως είπαμε $\lambda^* = \mu^*$, που μπορεί να αποδειχθεί και αλγεβρικά αθροίζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας για όλες τις καταστάσεις. Για τις οριακές κατανομές σε στιγμές αφίξεων κα αναχωρήσεων έχουμε:

$$\begin{aligned}
a_j &= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \Pr[Q(t)=j|A(t,t+h)=1] \\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t)=j, A(t,t+h)=1]}{\Pr[A(t,t+h)=1]} \\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t)=j]\Pr[A(t,t+h)=1|Q(t)=j]}{\Pr[A(t,t+h)=1]} \\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t)=j]\Pr[A(t,t+h)=1|Q(t)=j]/h}{\Pr[A(t,t+h)=1]/h} \\
&= \frac{p_j\lambda_j}{\lambda^*},
\end{aligned}$$

και ομοίως

$$\begin{aligned}
d_j &= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \Pr[Q(t+h)=j|D(t,t+h)=1] \\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t+h)=j, D(t,t+h)=1]}{\Pr[D(t,t+h)=1]} \\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t)=j+1]\Pr[D(t,t+h)=1|Q(t)=j+1]}{\Pr[D(t,t+h)=1]} \\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t)=j+1]\Pr[D(t,t+h)=1|Q(t)=j+1]/h}{\Pr[D(t,t+h)=1]/h} \\
&= \frac{p_{j+1}\mu_{j+1}}{\mu^*}.
\end{aligned}$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι στην περίπτωση των απλών Μαρκοβιανών ουρών η ιδιότητα των μεμονωμένων μεταβάσεων (θεώρημα 45) και η ιδιότητα PASTA (θεώρημα 46) προκύπτουν άμεσα. Πράγματι οι εξισώσεις ισορροπίας δίνουν $\lambda_j p_j = \mu_{j+1} p_{j+1}$ για κάθε $j \geq 0$, οπότε $\lambda^* = \mu^*$ και $a_j = d_j$, για κάθε $j \geq 0$. Επίσης, όταν η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson έχουμε $\lambda_j = \lambda$, για κάθε $j \geq 0$, οπότε έχουμε $\lambda^* = \lambda$ και $a_j = \frac{p_j \lambda_j}{\lambda^*} = \frac{p_j \lambda}{\lambda} = p_j$, για $j \geq 0$.

8.3 Η M/M/1/1 ουρά

Η M/M/1/1 ουρά χρησιμοποιήθηκε ως το μοντέλο μιας τηλεφωνικής γραμμής που μπορεί να είναι ελεύθερη ή κατειλημμένη (θεωρώντας ότι δεν υπάρχει δυνατότητα κράτησης μιας κλήσης σε αναμονή). Η βασική μελέτη της μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την τεχνική της ανάλυσης μέσης τιμής, όπως είδαμε στην παράγραφο 7.1. Εδώ θα την μελετήσουμε, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου.

Αν ο ρυθμός αφίξεων είναι λ, ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ και $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ είναι ο ρυθμός συνωστισμού τότε έχουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης - θανάτου με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } i = 0,\ j = 1, \\ \mu & \text{αν } i = 1,\ j = 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\lambda p_0 = \mu p_1,$$
$$\mu p_1 = \lambda p_0,$$

ενώ η εξίσωση κανονικοποίησης δίνει

$$p_0 + p_1 = 1.$$

Παρατηρήστε ότι η μια εξίσωση ισορροπίας είναι περιττή και μπορεί να παραληφθεί. Αυτό ισχύει πάντα, και μία από τις εξισώσεις ισορροπίας μπορεί να παραληφθεί αφού προκύπτει από τις υπόλοιπες (με άθροισή τους). Λύνοντας το σύστημα, παίρνουμε

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho},$$
$$p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Λόγω της ιδιότητας των μεμονωμένων μεταβάσεων και της ιδιότητας PASTA έχουμε

$$d_0 = a_0 = p_0 = \frac{1}{1+\rho},\ d_1 = a_1 = p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Το ποσοστό των χαμένων πελατών, δηλαδή των πελατών που τελικά δεν εξυπηρετούνται, είναι το ποσοστό των πελατών που βρίσκουν έναν πελάτη κατά την άφιξή τους, δηλαδή δίνεται από την πιθανότητα a_1.

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$E[Q] = 0p_0 + 1p_1 = p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Little έχουμε ότι ο μέσος χρόνος παραμονής ενός αφικνούμενου πελάτη στο σύστημα είναι

$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1+\rho)}.$$

Αυτός ο μέσος χρόνος αναφέρεται σε όλους τους πελάτες που φθάνουν στο σύστημα. Ο υπολογισμός του θα μπορούσε να γίνει και ως εξής:

$$E[S] = a_0\frac{1}{\mu} + a_1 0 = \frac{1}{\mu(1+\rho)},$$

δηλαδή δεσμεύοντας στον αριθμό των πελατών που βρίσκει ένας αφικνούμενος πελάτης. Αν μας ενδιέφερε ο μέσος χρόνος παραμονής ενός εισερχόμενου πελάτη στο σύστημα, που προφανώς είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησής του, ο νόμος του Little δίνει και πάλι το σωστό αποτέλεσμα, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε όχι το συνολικό ρυθμό αφίξεων λ, αλλά το ρυθμό εισερχομένων πελατών $\lambda^* = \lambda a_0$. Πράγματι θα είχαμε

$$E[S_{entered}] = \frac{E[Q]}{\lambda^*} = \frac{1}{\mu}.$$

Όσον αφορά τη μελέτη του κύκλου απασχόλησης του συστήματος, έχουμε ότι η μέση περίοδος αργίας είναι $E[I] = \frac{1}{\lambda}$, αφού η I ακολουθεί την κατανομή $\mathrm{Exp}(\lambda)$, ενώ η μέση περίοδος συνεχούς λειτουργίας είναι $E[Y] = \frac{1}{\mu}$ αφού η Y ακολουθεί την κατανομή $\mathrm{Exp}(\mu)$. Ο μέσος κύκλος απασχόλησης είναι $E[Z] = E[I] + E[Y] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$.

8.4 Η M/M/1 ουρά

Η M/M/1 ουρά είναι το απλούστερο μοντέλο συστήματος εξυπηρέτησης με άπειρο χώρο αναμονής. Η βασική μελέτη της μπορεί να γίνει με την τεχνική της ανάλυσης μέσης τιμής, όπως περιγράψαμε στην παράγραφο 7.2. Θα προχωρήσουμε, τώρα, σε μια πληρέστερη μελέτη της, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα από τις Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου.

Αν ο ρυθμός αφίξεων είναι λ, ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ και $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ είναι ο ρυθμός συνωστισμού, τότε συνάγουμε εύκολα ότι η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα τύπου γέννησης - θανάτου με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } i \geq 0,\ j = i+1, \\ \mu & \text{αν } i \geq 1,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τη γενική θεωρία των διαδικασιών γέννησης - θανάτου, έχουμε

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} & \text{αν } \rho < 1 \text{ (ευστάθεια)} \\ \infty & \text{αν } \rho \geq 1 \text{ (αστάθεια).} \end{cases}$$

Οπότε, για την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών, όταν $\rho < 1$, έχουμε

$$p_n = \begin{cases} B & \text{αν } n = 0 \\ B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} & \text{αν } n \geq 1 \end{cases}$$
$$= (1-\rho)\rho^n, \ n \geq 0.$$

Με άλλα λόγια η οριακή κατανομή (p_n) είναι $\mathrm{Geom}(\rho)$ στο $\mathbb{N}_0$. Λόγω της ιδιότητας των μεμονωμένων μεταβάσεων και της PASTA, έχουμε ότι και οι οριακές κατανομές σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν με την οριακή κατανομή σε συνεχή χρόνο. Για το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα έχουμε

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Από τον νόμο του Little, έχουμε για το μέσο χρόνο παραμονής:

$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}. \tag{8.1}$$

Όσον αφορά τη μελέτη του κύκλου απασχόλησης του συστήματος, έχουμε ότι η περίοδος αργίας I ακολουθεί την κατανομή $\mathrm{Exp}(\lambda)$, οπότε $E[I] = \frac{1}{\lambda}$. Επιπλέον, λόγω του αναγεννητικού χαρακτήρα του συστήματος, έχουμε ότι η οριακή πιθανότητα κενού συστήματος που ισούται με το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι κενό, μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη (θεώρημα 23). Ένας αναγεννητικός κύκλος στην περίπτωση του συστήματος αυτού είναι ένας κύκλος απασχόλησης και στη διάρκειά του το σύστημα είναι κενό μόνο κατά την αντίστοιχη περίοδο αργίας. Επομένως

$$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]},$$

όπου $E[Z]$ η μέση διάρκεια ενός κύκλου απασχόλησης. Οπότε

$$E[Z] = \frac{E[I]}{p_0} = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}.$$

Η μέση περίοδος συνεχούς λειτουργίας θα είναι

$$E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

Όσον αφορά την κατανομή $F_S(x)$ του χρόνου παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, ας υπολογίσουμε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes, δεσμεύοντας στο πλήθος των πελατών που βλέπει ο πελάτης κατά την άφιξή του σε αυτό. Έχουμε ότι αν ο πελάτης βρει n πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή του τότε θα περιμένει συνολικά όσο το άθροισμα $n+1$ χρόνων εξυπηρέτησης, οπότε ο αντίστοιχος δεσμευμένος μετασχηματισμός Laplace-Stietjes είναι αυτός της Erlang$(n+1, \mu)$, δηλαδή $\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1}$. Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_S(s) = E[e^{-sS}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[Q^- = n] E[e^{-sS} | Q^- = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1} \\
&= \frac{(1-\rho)\mu}{\mu+s} \left(1 - \frac{\rho\mu}{\mu+s}\right)^{-1} \\
&= \frac{(1-\rho)\mu}{(1-\rho)\mu+s}.
\end{aligned}$$

Ο τελευταίος είναι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της Exp$((1-\rho)\mu)$, οπότε συνάγουμε ότι ο S ακολουθεί την Exp$((1-\rho)\mu)$.

8.5 Τροποποιήσεις της M/M/1 ουράς

Εδώ θα εξετάσουμε κάποιες ενδιαφέρουσες τροποποιήσεις της M/M/1 ουράς που εμφανίζονται στις εφαρμογές.

8.5.1 Η M/M/1/k ουρά

Θεωρούμε την M/M/1/k ουρά με ρυθμό αφίξεων λ, ρυθμό εξυπηρέτησης μ, ρυθμό συνωστισμού $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ και χωρητικότητα k. Η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι και εδώ Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης - θανάτου με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, k\}$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } 0 \le i \le k-1,\ j = i+1, \\ \mu & \text{αν } 1 \le i \le k,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Επειδή ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος το σύστημα είναι πάντα ευσταθές και έχουμε

$$\begin{aligned}
B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} &= \sum_{n=0}^{k} \rho^n \\
&= \begin{cases} \frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho} & \text{αν } \rho \neq 1 \\ k+1 & \text{αν } \rho = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Οπότε, για την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών έχουμε

$$p_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}} & \text{αν } 0 \leq n \leq k,\ \rho \neq 1 \\ \frac{1}{k+1} & \text{αν } 0 \leq n \leq k,\ \rho = 1. \end{cases}$$

Λόγω της ιδιότητας των μεμονωμένων μεταβάσεων και της PASTA, έχουμε ότι και οι οριακές κατανομές σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν με την οριακή κατανομή σε συνεχή χρόνο. Ο ρυθμός διαπέρασης του συστήματος που αναφέρεται στους τελικά εισερχόμενους πελάτες στο σύστημα είναι

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{k} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{k-1} \lambda p_n = \lambda(1-p_k) = \begin{cases} \frac{\lambda(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}} & \text{αν } \rho \neq 1, \\ \frac{\lambda k}{k+1} & \text{αν } \rho = 1. \end{cases} \tag{8.2}$$

Οπότε, αν ενδιαφερόμαστε για την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών σε στιγμές 'πραγματικών αφίξεων', δηλαδή σε στιγμές εισόδων πελατών έχουμε

$$\begin{aligned} a_n^{enter} &= \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*} \\ &= \begin{cases} \frac{p_n}{1-p_k} & \text{αν } 0 \leq n \leq k-1, \\ 0 & \text{αν } n = k, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^k} & \text{αν } 0 \leq n \leq k-1, \quad \rho \neq 1 \\ \frac{1}{k} & \text{αν } 0 \leq n \leq k-1, \quad \rho = 1 \\ 0 & \text{αν } n = k, \end{cases} \end{aligned}$$

δηλαδή η PASTA δεν είναι εφαρμόσιμη. Ουσιαστικά, έχουμε ότι η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών σε στιγμές πραγματικών αφίξεων στην M/M/1/k ουρά ταυτίζεται με την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο στην M/M/1/$k-1$ ουρά.

Για το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα έχουμε

$$\begin{aligned} E[Q] &= \sum_{n=0}^{k} n p_n \\ &= \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{k\rho^{k+1}-(k+1)\rho^k+1}{1-\rho^{k+1}} & \text{αν } \rho \neq 1, \\ \frac{k}{2} & \text{αν } \rho = 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{8.3}$$

Από τον νόμο του Little έχουμε για το μέσο χρόνο παραμονής που αναφέρεται σε όλους τους αφικνούμενους πελάτες (είτε εισέρχονται στο σύστημα είτε όχι):

$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda}.$$

Όμως, αν μας ενδιαφέρει ο μέσος χρόνος παραμονής μόνο των πελατών που εισέρχονται, έχουμε

$$E[S^{enter}] = \frac{E[Q]}{\lambda^*}.$$

Το ποσοστό των χαμένων πελατών βρίσκεται ως

$$1 - \frac{\lambda^*}{\lambda} = 1 - \frac{\lambda(1-p_k)}{\lambda} = p_k.$$

Εναλλακτικά, το ποσοστό των χαμένων πελατών ισούται με την πιθανότητα ένας πελάτης να βρει το σύστημα πλήρες και να αναγκαστεί να φύγει, είναι δηλαδή ίσο με a_k. Οπότε, λόγω της ιδιότητας PASTA, συνάγουμε ότι είναι ίσο με p_k. Όσον αφορά τη μελέτη του κύκλου απασχόλησης του συστήματος, έχουμε ότι η περίοδος αργίας I ακολουθεί την κατανομή $\mathrm{Exp}(\lambda)$, οπότε $E[I] = \frac{1}{\lambda}$. Επιπλέον, λόγω του αναγεννητικού χαρακτήρα του συστήματος, έχουμε ότι η πιθανότητα κενού συστήματος που ισούται με το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι κενό, μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη (θεώρημα 23). Ένας αναγεννητικός κύκλος στην περίπτωση του συστήματος αυτού είναι ένας κύκλος απασχόλησης και στη διάρκειά του το σύστημα είναι κενό μόνο κατά την αντίστοιχη περίοδο αργίας. Επομένως

$$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]},$$

όπου $E[Z]$ η μέση διάρκεια ενός κύκλου απασχόλησης. Οπότε, ισχύει ακριβώς η ίδια λογική προσδιορισμού που περιγράφηκε για την M/M/1 ουρά. Λύνουμε την παραπάνω σχέση ως προς $E[Z]$, αφού τα $E[I]$ και p_0 έχουν προσδιοριστεί και κατόπιν προσδιορίζουμε και τη μέση περίοδο συνεχούς λειτουργίας από τη σχέση $E[Y] = E[Z] - E[I]$.

8.5.2 Η $M/M/1$ με αποθαρρυνόμενους πελάτες

Θεωρούμε, τώρα, την M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ, ρυθμό εξυπηρέτησης μ, ρυθμό συνωστισμού $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, όπου υποθέτουμε ότι οι πελάτες μπορεί να αποθαρρυνθούν να μπουν στο σύστημα, αφού παρατηρήσουν τον υπάρχοντα συνωστισμό σε αυτό. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ένας αφικνούμενος πελάτης που βρίσκει n πελάτες φεύγει (balks) με πιθανότητα q_n. Ισοδύναμα, το ποσοστό των πελατών που αναχωρούν άμεσα επί αυτών που βρίσκουν το σύστημα με n πελάτες είναι q_n. Και σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης θανάτου με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda(1-q_i) & \text{αν } i \geq 0,\ j = i+1, \\ \mu & \text{αν } i \geq 1,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Στα πραγματικά συστήματα, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η q_i είναι αύξουσα ως προς i και ότι τείνει στο 1, καθώς το i τείνει στο άπειρο. Το προηγούμενο σύστημα της $M/M/1/k$ ουράς μπορεί να θεωρηθεί μια ειδική περίπτωση της M/M/1 ουράς με αποθαρρυνόμενους πελάτες, αφού εμπίπτει σε αυτή την κατηγορία (με $q_i = 0$ για $0 \leq i \leq k-1$ και $q_i = 1$ για $i \geq k$). Εδώ θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση όπου

$q_i = \frac{i}{i+1}$ που δίνει κομψά αποτελέσματα. Έχουμε

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty,$$

δηλαδή το συγκεκριμένο σύστημα είναι πάντα ευσταθές. Οπότε για την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών έχουμε

$$p_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!},\ n \geq 0,$$

δηλαδή η (p_n) είναι Poisson(ρ). Λόγω της ιδιότητας των μεμονωμένων μεταβάσεων και της PASTA, έχουμε ότι και οι οριακές κατανομές σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν με την οριακή κατανομή σε συνεχή χρόνο. Αυτό βέβαια ισχύει όταν αναφερόμαστε σε όλους τους αφικνούμενους πελάτες, είτε μπαίνουν είτε όχι στο σύστημα. Ο ρυθμός διαπέρασης του συστήματος που αναφέρεται στους τελικά εισερχόμενους πελάτες στο σύστημα είναι

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{n+1} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!} = \frac{\lambda e^{-\rho}}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{\lambda e^{-\rho}}{\rho} (e^{\rho} - 1) = \mu(1 - e^{-\rho}). \end{aligned}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσε να προκύψει αν σκεφτόμαστε με εξυπηρετήσεις:

$$\mu^* = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu p_n = \mu(1 - p_0) = \mu(1 - e^{-\rho}).$$

Αν ενδιαφερόμαστε για την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών σε στιγμές 'πραγματικών αφίξεων', δηλαδή σε στιγμές εισόδων πελατών έχουμε

$$a_n^{enter} = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*} = \frac{e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \cdot \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!},\ n \geq 0,$$

δηλαδή η PASTA δεν είναι εφαρμόσιμη. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι $E[Q] = \rho$. Από τον νόμο του Little έχουμε για το μέσο χρόνο παραμονής που αναφέρεται σε όλους τους αφικνούμενους πελάτες (είτε εισέρχονται στο σύστημα είτε όχι) ότι $E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$. Αυτό μοιάζει κάπως παράδοξο, αφού ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι $\frac{1}{\mu}$. Όμως, δεν είναι παράδοξο αφού η μέση τιμή του χρόνου παραμονής αναφέρεται σε όλους τους αφικνούμενους πελάτες, οπότε κάποιοι από αυτούς (αυτοί που φεύγουν αμέσως) έχουν μηδενικό χρόνο παραμονής. Αν μας ενδιαφέρει ο μέσος χρόνος παραμονής μόνο των πελατών που εισέρχονται, έχουμε

$$E[S^{enter}] = \frac{E[Q]}{\lambda^*} = \frac{\rho}{\mu(1 - e^{-\rho})}.$$

Το ποσοστό των χαμένων πελατών βρίσκεται ως

$$1 - \frac{\lambda^*}{\lambda} = 1 - \frac{\mu(1 - e^{-\rho})}{\lambda} = 1 - \frac{1 - e^{-\rho}}{\rho}.$$

Εναλλακτικά, το ποσοστό των χαμένων πελατών μπορεί να υπολογιστεί ως η πιθανότητα ένας πελάτης να αποχωρήσει από το σύστημα μόλις αφιχθεί σε αυτό. Οπότε, δεσμεύοντας στον αριθμό των πελατών που βρίσκει φθάνοντας έχουμε ότι είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{n}{n+1} = \cdots = 1 - \frac{1-e^{-\rho}}{\rho}.$$

Όσον αφορά τη μελέτη του κύκλου απασχόλησης του συστήματος, αυτή μπορεί να γίνει όπως και σε προηγούμενα παραδείγματα, δηλαδή να ξεκινήσουμε με το ότι η περίοδος αργίας I ακολουθεί την κατανομή $\mathrm{Exp}(\lambda)$, οπότε $E[I] = \frac{1}{\lambda}$ και κατόπιν να λύσουμε ως προς το μέσο κύκλο απασχόλησης τη σχέση $p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]}$, αφού το p_0 έχει ήδη υπολογιστεί. Τέλος, η μέση περίοδος συνεχούς λειτουργίας βρίσκεται από τη σχέση $E[Y] = E[Z] - E[I]$.

8.5.3 Η $M/M/1$ ουρά με μεταβλητή ταχύτητα εξυπηρέτησης

Θεωρούμε τώρα την M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ, ρυθμό εξυπηρέτησης μ, ρυθμό συνωστισμού $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, όπου υποθέτουμε ότι ο υπηρέτης δουλεύει με ταχύτητα v_n όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα. Αυτό σημαίνει ότι όταν έναν εκθετικός χρόνος εξυπηρέτησης X διανύεται όταν στο σύστημα υπάρχουν n πελάτες, τότε η αντίστοιχη διάρκεια είναι X/v_n, δηλαδή η κατανομή της πραγματικής διάρκειας εξυπηρέτης είναι στην περίπτωση αυτή $\mathrm{Exp}(\mu v_n)$, οπότε ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μv_n. Σε αυτή την περίπτωση η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης - θανάτου με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } i \geq 0,\ j = i+1, \\ \mu v_i & \text{αν } i \geq 1,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Στα πραγματικά συστήματα είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η v_i είναι αύξουσα ως προς i. Εδώ θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση όπου $v_i = i$, που δίνει κομψά αποτελέσματα. Έχουμε

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty,$$

δηλαδή το συγκεκριμένο σύστημα είναι πάντα ευσταθές. Οπότε, για την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών έχουμε

$$p_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!},\ n \geq 0,$$

δηλαδή, η (p_n) είναι $\mathrm{Poisson}(\rho)$. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών συμπίπτει με την αντίστοιχη κατανομή για το σύστημα με αποθαρρυνόμενους πελάτες που μελετήσαμε πρωτύτερα, καίτοι τα δυο συστήματα είναι πολύ διαφορετικά. Η PASTA είναι εδώ εφαρμόσιμη, όπως και η ιδιότητα των μεμονωμένων μεταβάσεων, οπότε οι οριακές κατανομές των αριθμών των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν με την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο: $p_n = a_n = d_n$, $n \geq 0$. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι $E[Q] = \rho$. Από το νόμο του Little έχουμε ότι ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα $E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$. Τέλος, η μελέτη του κύκλου απασχόλησης του συστήματος μπορεί να γίνει όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα.

8.6 Η M/M/c ουρά

Θεωρούμε την M/M/c ουρά, με ρυθμό αφίξεων λ, ρυθμό εξυπηρέτησης μ, ρυθμό συνωστισμού $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, c υπηρέτες και απεριόριστη χωρητικότητα. Η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι και εδώ Μαρκοβιανή αλυσίδα τύπου γέννησης - θανάτου με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } i \geq 0,\ j = i+1, \\ \min(i,c)\mu & \text{αν } i \geq 1,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Εδώ έχουμε

$$\begin{aligned} B^{-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} \\ &= \begin{cases} \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{\rho - c} & \text{αν } \rho < c \text{ (ευστάθεια)} \\ \infty & \text{αν } \rho \geq c \text{ (αστάθεια).} \end{cases} \end{aligned}$$

Οπότε, για την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών, όταν το σύστημα είναι ευσταθές, έχουμε

$$p_n = \begin{cases} B \frac{\rho^n}{n!} & \text{αν } 0 \leq n \leq c, \\ B \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} & \text{αν } n \geq c+1. \end{cases}$$

Λόγω της ιδιότητας των μεμονωμένων μεταβάσεων και της PASTA, έχουμε ότι και οι οριακές κατανομές σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν με την οριακή κατανομή σε συνεχή χρόνο.

Η κατανομή του αριθμού των πελατών στο χώρο αναμονής, δεδομένου ότι όλοι οι πελάτες είναι απασχολημένοι βρίσκεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \Pr[Q_q = n | Q \geq c] = \Pr[Q = n + c | Q \geq c] &= \frac{B \frac{\rho^{c+n}}{c! c^n}}{\sum_{m=c}^{\infty} B \frac{\rho^m}{c! c^{m-c}}} \\ &= \left(1 - \frac{\rho}{c}\right) \left(\frac{\rho}{c}\right)^n,\ n \geq 0, \end{aligned}$$

δηλαδή, η δεσμευμένη κατανομή της Q_q, δοθέντος ότι $Q \geq c$ (συμβολικά $(Q_q | Q \geq c)$), ακολουθεί την $\mathrm{Geom}(\rho/c)$ στο $\mathbb{N}_0$. Οπότε, έχουμε και ότι $E[Q_q | Q \geq c] = \frac{\rho/c}{1 - \rho/c}$.

Ο μέσος αριθμός πελατών στο χώρο αναμονής μπορεί τώρα να βρεθεί εύκολα ως εξής:

$$\begin{aligned}
E[Q_q] &= \Pr[Q < c]E[Q_q|Q < c] + \Pr[Q \geq c]E[Q_q|Q \geq c] \\
&= \Pr[Q < c] \cdot 0 + \Pr[Q \geq c] \cdot \frac{\rho/c}{1-\rho/c} \\
&= B\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Little στο χώρο αναμονής παίρνουμε τον μέσο χρόνο αναμονής ενός πελάτη που είναι

$$E[W] = \frac{E[Q_q]}{\lambda} = B\frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)^2}\frac{1}{\mu}.$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής είναι

$$E[S] = E[W] + \frac{1}{\mu} = \left(B\frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)^2} + 1\right)\frac{1}{\mu}, \tag{8.4}$$

οπότε εφαρμόζοντας και πάλι το νόμο του Little παίρνουμε το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα

$$E[Q] = \lambda E[S] = B\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} + \rho.$$

Όσον αφορά τον προσδιορισμό του μέσου κύκλου απασχόλησης του συστήματος $E[Z]$, έχουμε καταρχήν ότι η περίοδος αργίας I ακολουθεί την κατανομή $\text{Exp}(\lambda)$, οπότε $E[I] = \frac{1}{\lambda}$. Επίσης, έχουμε $p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]}$, οπότε $E[Z] = \frac{E[I]}{p_0} = \frac{1}{\lambda B}$. Τέλος η μέση περίοδος συνεχούς λειτουργίας είναι $E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{1}{\lambda B} - \frac{1}{\lambda}$.

Ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes $F_W^*(s)$ του χρόνου αναμονής ενός πελάτη στο σύστημα βρίσκεται εύκολα δεσμεύοντας στο πλήθος των πελατών που βρίσκει ο πελάτης κατά την άφιξή του σε αυτό. Αν ο πελάτης βρει λιγότερους από c πελάτες στο σύστημα τότε ο χρόνος αναμονής του είναι μηδενικός. Αν βρεί $n \geq c$ πελάτες, τότε θα περιμένει να γίνουν $n+1-c$ αναχωρήσεις για να αρχίσει να εξυπηρετείται από κάποιον ελεύθερο υπηρέτη. Οι χρόνοι μεταξύ αυτών των εξυπηρετήσεων είναι $Exp(c\mu)$, αφού καθένας τους αντιστοιχεί στον ελάχιστο από τους c ανεξάρτητους

$Exp(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης που τρέχουν παράλληλα. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_W(s) = E[e^{-sW}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[Q^- = n] E[e^{-sW} | Q^- = n] \\
&= \sum_{n=0}^{c-1} \Pr[Q^- = n] \cdot 1 + \sum_{n=c}^{\infty} \Pr[Q^- = n] \cdot \left(\frac{c\mu}{s + c\mu} \right)^{n+1-c} \\
&= \sum_{n=0}^{c-1} B \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} B \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} \left(\frac{c\mu}{s + c\mu} \right)^{n+1-c} \\
&= \sum_{n=0}^{c-1} B \frac{\rho^n}{n!} + B \frac{\rho^c}{c!} \cdot \frac{c\mu}{c\mu - \lambda} \cdot \frac{c\mu - \lambda}{s + c\mu - \lambda} \\
&= \Pr[Q < c] \cdot 1 + \Pr[Q \geq c] \frac{c\mu - \lambda}{s + c\mu - \lambda}.
\end{aligned}$$

Αυτός ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes δείχνει ότι η τυχαία μεταβλητή W είναι 0 με πιθανότητα $\Pr[Q < c]$ και ακολουθεί την κατανομή $\text{Exp}(c\mu - \lambda)$ με πιθανότητα $\Pr[Q \geq c]$.

8.7 Σύγκριση M/M/c και αντίστοιχων M/M/1 συστημάτων

Στην παράγραφο αυτή θα συγκρίνουμε το M/M/c σύστημα εξυπηρέτησης με "ισοδύναμα", υπό κάποια έννοια, συστήματα εξυπηρέτησης τύπου M/M/1. Οι συγκρίσεις αυτές θα δώσουν μερικές πρώτες διαισθήσεις για το πως συμφέρει να σχεδιάσουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης που ανταποκρίνεται σε ένα συγκεκριμένο πρακτικό πρόβλημα, ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες του προβλήματος.

8.7.1 Κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες ή μία ουρά για κάθε υπηρέτη;

Έστω ότι πρόκειται να σχεδιάσουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης και έχουμε διαθέσιμους c όμοιους υπηρέτες. Τί είναι προτιμότερο: Να έχουμε ξεχωριστή ουρά για κάθε υπηρέτη ή μια κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες;

Θα εξετάσουμε το πρόβλημα αυτό σε ένα συγκεκριμένο, αλλά αρκετά ειδικό πλαίσιο, υποθέτοντας ότι έχουμε Poisson διαδικασία αφίξεων δυνητικών πελατών με ρυθμό λ, $\text{Exp}(\mu)$ κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης και $c = 2$ διαθέσιμους υπηρέτες. Υποθέτουμε ότι $\lambda < 2\mu$ που είναι μια αναγκαία συνθήκη ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές. Ορίζουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ το ρυθμό συνωστισμού του συστήματος, οπότε $\rho < 2$.

Αν χρησιμοποιήσουμε ξεχωριστή ουρά για κάθε υπηρέτη και υποθέσουμε ότι κάθε αφικνούμενος πελάτης επιλέγει να πάει στο υποσύστημα ουρά - χώρο εξυπηρέτησης του υπηρέτη i με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, για $i = 1, 2$, τότε θα έχουμε δυο πανομοιότυπα υποσυστήματα τύπου M/M/1 με ρυθμό αφίξεων $\frac{\lambda}{2}$ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, το καθένα. Επομένως, ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη θα δίνεται από τον τύπο (8.1), οπότε θα έχουμε ότι για την περίπτωση ξεχωριστών ουρών ο μέσος χρόνος παραμονής είναι

$$E[S_1] = \frac{1}{\mu - \frac{\lambda}{2}} = \frac{2}{\mu(2-\rho)}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε μια κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες, τότε θα έχουμε ένα σύστημα τύπου M/M/2 με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, οπότε ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη θα δίνεται από τον τύπο (8.4) που στην περίπτωση αυτή δίνει

$$E[S_2] = \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}. \tag{8.5}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} E[S_1] - E[S_2] &= \frac{2}{\mu(2-\rho)} - \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} \\ &= \frac{2\rho}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} > 0. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Επομένως, είναι προτιμότερο να υπάρχει μια κοινή ουρά και για τους όλους τους υπηρέτες, αν ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα (το ίδιο ισχύει και για τον χρόνο αναμονής στην ουρά, αφού έχουμε $E[W_i] = E[S_i] - \frac{1}{\mu}$, $i = 1, 2$, οπότε $E[W_1] - E[W_2] = E[S_1] - E[S_2]$). Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσει κανείς ότι $\lim_{\rho \to 2^-}(E[S_1] - E[S_2]) = \infty$, και επομένως η κοινή ουρά μειώνει σημαντικά τον μέσο χρόνο παραμονής σε συστήματα με ρυθμό συνωστισμού κοντά στην κρίσιμη τιμή για αστάθεια. Επίσης

$$\frac{E[S_2]}{E[S_1]} = \frac{2}{2+\rho} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \rho \in (0, 2),$$

που δείχνει ότι η χρήση κοινής ουράς βελτιώνει σημαντικά την λειτουργία του συστήματος όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής συνωστισμού και συγκεκριμένα οδηγεί σε μείωση του μέσου χρόνου παραμονής των πελατών με ένα συντελεστή που μπορεί να φθάσει κοντά στο $\frac{1}{2}$ για μεγάλες τιμές του ρυθμού συνωστισμού.

Το γενονός ότι η χρήση κοινής ουράς (pooling) βελτιώνει την απόδοση του συστήματος ισχύει σε πολύ γενικότερες καταστάσεις, και για το λόγο αυτό η χρήση κοινής ουράς έχει υιοθετηθεί σε πολλές πρακτικές εφαρμογές των ουρών σε πραγματικά συστήματα τα τελευταία χρόνια. Βέβαια, αν οι πελάτες είναι ετερογενείς μπορεί να είναι προτιμότερο σε κάποιες περιπτώσεις να έχουμε διαφορετικές ουρές για διαφορετικές κατηγορίες πελατών. Επίσης, αν οι υπηρέτες δεν είναι όμοιοι, το ερώτημα θα πρέπει να εξεταστεί εξαρχής με προσοχή.

8.7.2 Πολλοί αργοί υπηρέτες ή λίγοι γρήγοροι υπηρέτες;

Έστω ότι πρόκειται να σχεδιάσουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με συγκεκριμένη δυναμικότητα (δηλαδή συνολικό ρυθμό) εξυπηρέτησης. Τί είναι προτιμότερο: Να έχουμε έναν υπηρέτη με όλη τη δυναμικότητα ή να την μοιράσουμε σε περισσότερους υπηρέτες;

Θα εξετάσουμε το πρόβλημα αυτό σε ένα ειδικό πλαίσιο, ώστε να έχουμε συγκεκριμένα συμπεράσματα. Υποθέτουμε ότι έχουμε Poisson διαδικασία αφίξεων πελατών με ρυθμό λ και συνολική δυναμικότητα (δηλαδή συνολικό ρυθμό) εξυπηρέτησης 2μ την οποία μπορούμε να αναθέσουμε σε έναν υπηρέτη ή σε 2 υπηρέτες. Υποθέτουμε ότι $\lambda < 2\mu$ ώστε να εξασφαλίζεται η ευστάθεια του συστήματος και συμβολίζουμε με $\rho < 2$ το ρυθμό συνωστισμού.

Αν χρησιμοποιήσουμε έναν υπηρέτη, τότε θα έχουμε μια M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης 2μ. Τότε, ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη θα δίνεται από τον τύπο (8.1), που στην προκειμένη περίπτωση δίνει

$$E[S_1] = \frac{1}{2\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu(2-\rho)}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε δυο υπηρέτες, τότε θα έχουμε μια M/M/2 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ ανά υπηρέτη. Τότε, ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη θα δίνεται από τον τύπο (8.5). Επομένως, θα έχουμε

$$\begin{aligned} E[S_1] - E[S_2] &= \frac{1}{\mu(2-\rho)} - \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} \\ &= \frac{\rho - 2}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} = -\frac{1}{\mu(2+\rho)} < 0. \end{aligned}$$

Επομένως, είναι προτιμότερο να ανατεθεί όλη η δυναμικότητα εξυπηρέτησης σε έναν υπηρέτη, αν ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα. Εδώ έχουμε ότι

$$\frac{E[S_1]}{E[S_2]} = \frac{\rho+2}{4} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \rho \in (0,2). \tag{8.7}$$

Επομένως, η ανάθεση όλης της δυναμικότητας εξυπηρέτησης σε έναν υπηρέτη βελτιώνει σημαντικά την λειτουργία του συστηματος όσο μικρότερος είναι ο συντελεστής συνωστισμού και συγκεκριμένα οδηγεί σε μείωση του μέσου χρόνου παραμονής των πελατών με ένα συντελεστή που φθάνει κοντά στο $\frac{1}{2}$ για μικρές τιμές του ρυθμού συνωστισμού. Αυτό είναι λογικό, διότι αν το σύστημα είναι σχεδόν άδειο πάντα, τότε μόνο ένας υπηρέτης χρησιμοποιείται ακόμη κι αν υπάρχουν δυο διαθέσιμοι υπηρέτες. Επομένως, είναι καλύτερο όλη η δυναμικότητα να ανατίθεται σε έναν υπηρέτη.

Όσον αφορά τους αντίστοιχους χρόνους αναμονής στην ουρά, για την M/M/1 ουρά θα έχουμε

$$E[W_1] = E[S_1] - \frac{1}{2\mu} = \frac{\rho}{2\mu(2-\rho)},$$

ενώ για την M/M/2 ουρά θα έχουμε

$$E[W_2] = E[S_2] - \frac{1}{\mu} = \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho^2}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}.$$

Επομένως, θα έχουμε

$$\begin{aligned} E[W_1] - E[W_2] &= \frac{\rho}{2\mu(2-\rho)} - \frac{\rho^2}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} \\ &= \frac{\rho}{2\mu(2+\rho)} > 0. \end{aligned}$$

Επομένως, είναι προτιμότερο να μοιραστεί η δυναμικότητα εξυπηρέτησης σε δυο υπηρέτες, αν ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο αναμονής ενός πελάτη στην ουρά, δηλαδή ισχύει το αντίθετο από αυτό που είδμα για τον χρόνο παραμονής. Αυτό είναι βέβαια λογικό, αφού η παρουσία πολλών υπηρετών διευκολύνει να αρχίσουν οι πελάτες την εξυπηρέτησή τους,ανεξάρτητα από το ότι αυτό μπορεί να συνεπάγεται πιο αργή εξυπηρέτηση.

8.8 Η M/M/∞ ουρά

Η M/M/∞ ουρά είναι το μοντέλο που αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου κάθε πελάτης αρχίζει να εξυπηρετείται με την άφιξή του στο σύστημα. Είναι κατάλληλο μοντέλο για συστήματα στα οποία κάθε πελάτης αυτο-εξυπηρετείται και απλά χρειάζεται κάποιον πόρο του συστήματος εξυπηρέτησης που υπάρχει σε αφθονία (και επομένως ο αριθμός των παρόντων πελατών δεν επηρεάζει το συγκεκριμένο πελάτη). Έστω, ένα τέτοιο σύστημα με ρυθμό αφίξεων λ, ρυθμό εξυπηρέτησης μ και έστω $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ο ρυθμός συνωστισμού του. Η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι και εδώ Μαρκοβιανή αλυσίδα τύπου γέννησης - θανάτου με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } i \geq 0,\ j = i+1, \\ i\mu & \text{αν } i \geq 1,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Εδώ έχουμε

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty.$$

Οπότε, για την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών, όταν το σύστημα είναι ευσταθές, έχουμε

$$p_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Λόγω της ιδιότητας των μεμονωμένων μεταβάσεων και της PASTA, έχουμε ότι και οι οριακές κατανομές σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν με την οριακή κατανομή σε συνεχή χρόνο.

8.9 Ασκήσεις

1. Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και $Exp(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης, όπου ο χρόνος υπομονής κάθε πελάτη που περιμένει στο

χώρο αναμονής έχει την κατανομή $\mathrm{Exp}(\nu)$ και μόλις αυτός συμπληρωθεί ο πελάτης αναχωρεί. Αιτιολογήστε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης - θανάτου και δώστε το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασής της. Για την ειδική περίπτωση $\nu = \mu$, βρείτε τη στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο.

2. Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και $\mathrm{Exp}(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης, με αποθαρρυνόμενους πελάτες, όπου κάθε πελάτης που βρίσκει n πελάτες κατά την άφιξή του αναχωρεί με πιθανότητα q_n, με $q_0 = \frac{1}{4}$ και $q_n = \frac{3}{4}$ για $n \geq 1$. Να βρεθούν
   1. η συνθήκη ευστάθειας (στασιμότητας) για το σύστημα
   2. οι κατανομές (p_n), (a_n) και (d_n) του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο, σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα
   3. το ποσοστό των χαμένων πελατών.

3. Θεωρούμε μια απλή Μαρκοβιανή ουρά με ρυθμούς αφίξεων και εξυπηρετήσεων $\lambda_n = \alpha^n \lambda$ $(n \geq 0)$ και $\mu_n = n\alpha^n \mu$ $(n \geq 1)$ αντίστοιχα, όπου $\alpha \in (0,1)$, $\lambda, \mu > 0$ γνωστές παράμετροι.
   1. Πότε η ουρά είναι ευσταθής; Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα. Τί είδους κατανομή είναι;
   2. Να βρεθούν οι οριακές κατανομές (a_n) και (d_n) του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα. Τί κατανομές είναι;
   3. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα, καθώς και οι μέσοι χρόνοι συνεχούς λειτουργίας, αργίας και κύκλου απασχόλησης $E[Y]$, $E[I]$ και $E[Z]$ αντίστοιχα.

4. Θεωρούμε την τροποποίηση της M/M/c/c ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και $\mathrm{Exp}(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης, όπου ορισμένοι πελάτες αναχωρούν από το σύστημα αμέσως μόλις αφιχθούν, χωρίς να εξυπηρετηθούν (αποθαρρυνόμενοι πελάτες). Συγκεκριμένα, κάθε πελάτης που βρίσκει n άλλα άτομα στο σύστημα κατά την άφιξή του αναχωρεί με πιθανότητα $\frac{n}{c}$, $0 \leq n \leq c$.
   1. Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα $\{Q(t)\}$. Τί είδους κατανομή είναι;
   2. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των άμεσα αποχωρούντων πελατών (χαμένων πελατών).
   3. Να βρεθούν οι οριακές κατανομές (a_n) και (d_n) του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα, που αναφέρονται στους πραγματικά εισερχόμενους πελάτες του συστήματος.
   4. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, $E[S]$, λαμβάνοντας υπόψη όλους τους αφιχθέντες πελάτες. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτης στο σύστημα, $E[S']$, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους τελικά εισερχόμενους πελάτες.

5. Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος, $E[Z]$.

9

Βέλτιστος σχεδιασμός και στρατηγική συμπεριφορά

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε κάποιες μεθόδους για την αποτίμηση της απόδοσης συγκεκριμένων συστημάτων εξυπηρέτησης, βασιζόμενοι στην παραδοχή ότι οι οντότητες που εμπλέκονται (πελάτες, υπηρέτες, διαχειριστής) είναι παθητικές, δηλαδή δεν λαμβάνουν αποφάσεις. Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε προβλήματα βέλτιστης λήψης αποφάσεων σε συστήματα εξυπηρέτησης, και πιο συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε ότι κάποιες από τις οντότητες είναι στρατηγικές, δηλαδή παίρνουν αποφάσεις για μεγιστοποίηση της ωφέλειάς τους, λαμβάνοντας υπόψη ότι και οι άλλες οντότητες έχουν παρόμοιους σκοπούς. Η περιοχή αυτή συνθέτει ιδέες από τη Θεωρία Ουρών Αναμονής, από το Μαθηματικό Προγραμματισμό και από τη Θεωρία Παιγνίων.

Χωρίς να υπεισέλθουμε σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια αυτή τη στιγμή, τα κυριότερα προβλήματα που τίθενται είναι τα εξής:

- Εύρεση στρατηγικών ισορροπίας, δηλαδή στρατηγικών που κανείς από τους αποφασίζοντες - παίκτες δεν έχει κίνητρο να αλλάξει μονομερώς.
- Εύρεση κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών, δηλαδή στρατηγικών που μεγιστοποιούν κάποιο μέτρο συνολικής κοινωνικής ωφέλειας.
- Ποσοτικοποίηση της απόκλισης των στρατηγικών ισορροπίας και των κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών. Ένα κλασικό μέτρο εδώ είναι η λεγόμενη "Τιμή της Αναρχίας " (Price of Anarchy).
- Επιβολή μηχανισμών ρύθμισης, ώστε κοινωνικά βέλτιστες ή έστω κοινωνικά ικανοποιητικές στρατηγικές να προκύψουν ως στρατηγικές ισορροπίας. Κλασικά εργαλεία για το σκοπό αυτό είναι η κατάλληλη τιμολόγηση των υπηρεσιών, η ύπαρξη προτεραιοτήτων στην εξυπηρέτηση των πελατών, η κατάλληλη επιλογή πειθαρχίας ουράς και ο έλεγχος της πληροφορίας που παρέχεται στους πελάτες σχετικά με την κατάσταση του συστήματος.

9.1 Βασικές έννοιες από τη Θεωρία Παιγνίων

Ένα παιχνίδι προσδιορίζεται από ένα σύνολο παικτών $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$, σύνολα πλάνων δράσης $\mathcal{A}_i$, ένα για κάθε παίκτη $i = 1, 2, \ldots, n$, και συναρτήσεις πληρωμής F_i, μία για κάθε παίκτη $i = 1, 2, \ldots, n$. Το σύνολο $\mathcal{A}_i$ περιέχει όλα τα δυνατά πλάνα δράσης του παίκτη i, που του υπαγορεύουν πώς να παίξει κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, ανάλογα με την κατάσταση στην οποία θα βρεθεί. Κάθε στοιχείο του $\mathcal{A}_i$ αναφέρεται και ως καθαρή στρατηγική του i. Μια κατανομή πιθανότητας πάνω στο $\mathcal{A}_i$

αναφέρεται ως μεικτή στρατηγική του i και έχει την έννοια, ότι ο παίκτης i επιλέγει μία από τις καθαρές στρατηγικές του για να παίξει το παιχνίδι με τις πιθανότητες που υπαγορεύει η μεικτή στρατηγική του. Το σύνολο των μεικτών στρατηγικών του $\mathcal{A}_i$, συμβολίζεται με $\mathcal{S}_i$. Ένα προφίλ στρατηγικών $\mathbf{s}$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στρατηγικών, μία για κάθε παίκτη, δηλαδή

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n), \quad s_i \in \mathcal{S}_i, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Δεδομένου του προφίλ $\mathbf{s}$, γράφουμε $\mathbf{s} = (s_i, \mathbf{s}_{-i})$, εννοώντας ότι το $(n-1)$-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{s}_{-i}$ περιέχει τις στρατηγικές του $\mathbf{s}$ πλην αυτής που αντιστοιχεί στο παίκτη i. Η συνάρτηση πληρωμής F_i παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$ και έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των προφίλ στρατηγικών όλων των παικτών. Η ποσότητα $F_i(\mathbf{s}) = F_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$ δίνει την πληρωμή που θα λάβει ο παίκτης i, αν υιοθετηθεί το προφίλ στρατηγικών $\mathbf{s}$, δηλαδή αν ο i ακολουθήσει τη στρατηγική s_i και οι υπόλοιποι παίκτες ακολουθήσουν τις στρατηγικές του $\mathbf{s}_{-i}$.

Η συνάρτηση $F_i(\mathbf{s}) = F_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$ είναι γραμμική ως προς s_i, υπό την έννοια ότι αν η s_i είναι μίξη των στρατηγικών s_i^k, $k = 1, 2, \ldots, r$ με αντίστοιχες πιθανότητες α_k, $k = 1, 2, \ldots, r$ με $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k = 1$ τότε

$$F_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k F_i(s_i^k, \mathbf{s}_{-i}).$$

Αν s_i^1 και s_i^2 είναι δυο στρατηγικές του παίκτη i, λέμε ότι η s_i^1 κυριαρχεί ασθενώς της s_i^2 αν για κάθε προφίλ στρατηγικών των υπολοίπων παικτών, $\mathbf{s}_{-i}$, ισχύει

$$F_i(s_i^1, \mathbf{s}_{-i}) \geq F_i(s_i^2, \mathbf{s}_{-i}),$$

με την ανισότητα να ισχύει γνήσια για ένα τουλάχιστον προφίλ $\mathbf{s}_{-i}$. Λέμε ότι η s_i^1 κυριαρχεί ισχυρά της s_i^2 αν η ανισότητα ισχύει γνήσια για όλα τα προφίλ $\mathbf{s}_{-i}$.

Έστω ένας παίκτης i. Δοθέντος ενός προφίλ στρατηγικών $\mathbf{s}_{-i}$ των υπολοίπων παικτών, η στρατηγική s_i^* του παίκτη i λέγεται βέλτιστη απάντηση στο $\mathbf{s}_{-i}$, αν για κάθε στρατηγική s_i του i ισχύει

$$F_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}) \geq F_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}),$$

δηλαδή η s_i^* βελτιστοποιεί την $f(s_i) = F_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$. Το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων στο $\mathbf{s}_{-i}$, συμβολίζεται με $BR(\mathbf{s}_{-i})$.

Μια στρατηγική s_i του i λέγεται ασθενώς (αντίστοιχα ισχυρά) κυριαρχούσα, αν κυριαρχεί ασθενώς (αντίστοιχα ισχυρά) κάθε άλλης στρατηγικής του i. Μια στρατηγική ενός παίκτη είναι ασθενώς (αντίστοιχα ισχυρά) κυριαρχούσα αν ο παίκτης αποκομίζει ακολουθώντας την μεγαλύτερη ή ίση ωφέλεια (αντίστοιχα μεγαλύτερη ωφέλεια) από όση θα αποκόμιζε ακολουθώντας κάποια άλλη στρατηγική, ό,τι και να κάνουν οι υπόλοιποι παίκτες.

Ένα προφίλ στρατηγικών $\mathbf{s}^e = (s_1^e, s_2^e, \ldots, s_n^e)$ λέγεται σημείο στρατηγικής ισορροπίας, αν για κάθε παίκτη i, η στρατηγική s_i^e είναι βέλτιστη απάντηση έναντι της $\mathbf{s}_{-i}^e$. Με άλλα λόγια ένα προφίλ στρατηγικών είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας, αν κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική μονομερώς, υπό την έννοια ότι αν μετακινηθεί μόνος του προς κάποια άλλη στρατηγική η ωφέλεια του αποκλείεται να αυξηθεί (αλλά ενδέχεται να μειωθεί).

9.2 Στρατηγική αλληλεπίδραση μεταξύ των πελατών σε συστήματα ουρών αναμονής

Για την ανάλυση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε συστήματα ουρών αναμονής, οι έννοιες της Θεωρίας Παιγνίων που εκτέθηκαν παραπάνω είναι πολύ χρήσιμες. Δεν μπορούν, όμως, να μεταφερθούν άμεσα διότι υπάρχουν δυο θεμελιώδη προβλήματα. Το πρώτο πρόβλημα είναι ότι οι παίκτες, δηλαδή οι δυνητικοί πελάτες ενός συστήματος είναι άπειροι το πλήθος. Το δεύτερο πρόβλημα είναι ότι οι παίκτες δεν παίρνουν ταυτόχρονα τις αποφάσεις τους, αφού φθάνουν στο σύστημα διαδοχικά σε άπειρο ορίζοντα. Τα προβλήματα αυτά ξεπερνιούνται δημιουργώντας ανάλογες έννοιες, εκμεταλευόμενοι την ομοιογένεια των πελατών. Δηλαδή σε πρώτο επίπεδο θεωρούμε ότι όλοι οι πελάτες είναι όμοιοι και κατόπιν μπορούμε να επεκτείνουμε το πλαίσιο και στην περίπτωση ετερογενών πελατών, υποθέτοντας ότι υπάρχουν διάφορες κλάσεις πελατών και οι πελάτες κάθε κλάσης είναι όμοιοι (ομογενείς).

Στην περίπτωση, λοιπόν, ομογενών πελατών, ένα παιχνίδι μεταξύ των πελατών προσδιορίζεται από το κοινό σύνολο των στρατηγικών τους, $\mathcal{S}$, και μια συνάρτηση πληρωμής $F(s, s')$ που δίνει την πληρωμή ενός πελάτη που χρησιμοποιεί τη στρατηγική s, όταν όλοι οι άλλοι χρησιμοποιούν τη στρατηγική s'.

Η συνάρτηση $F(s, s')$ είναι γραμμική ως προς s, υπό την έννοια ότι αν η s είναι η μίξη των στρατηγικών s^k, $k = 1, 2, \ldots, r$ με αντίστοιχες πιθανότητες α_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, με $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k = 1$, τότε

$$F(s, s') = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k F(s^k, s').$$

Αν s^1 και s^2 είναι δυο στρατηγικές ενός πελάτη, τότε λέμε ότι η s^1 κυριαρχεί ασθενώς της s^2, αν για κάθε στρατηγική s' των άλλων πελατών ισχύει

$$F(s^1, s') \geq F(s^2, s'),$$

με την ανισότητα να ισχύει γνήσια για μια τουλάχιστον στρατηγική s'. Λέμε ότι η s^1 κυριαρχεί ισχυρά της s^2, αν η ανισότητα ισχύει γνήσια για όλες τις στρατηγικές s'.

Έστω ένας επιλεγμένος πελάτης. Δοθείσης μιας στρατηγικής s' που ακολουθούν όλοι οι άλλοι πελάτες, η στρατηγική s^* του επιλεγμένου πελάτη λέγεται βέλτιστη απάντηση στην s', αν για κάθε στρατηγική s του επιλεγμένου πελάτη ισχύει

$$F(s^*, s') \geq F(s, s'),$$

δηλαδή η s^* βελτιστοποιεί της $f(s) = F(s, s')$. Το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων στο s', συμβολίζεται με $BR(s')$.

Μια στρατηγική s ενός επιλεγμένου πελάτη λέγεται ασθενώς (αντίστοιχα ισχυρά) κυριαρχούσα, αν κυριαρχεί ασθενώς (αντίστοιχα ισχυρά) κάθε άλλης στρατηγικής του επιλεγμένου πελάτη. Μια στρατηγική ενός επιλεγμένου πελάτη είναι ασθενώς (αντίστοιχα ισχυρά) κυριαρχούσα, αν ο επιλεγμένος πελάτης αποκομίζει ακολουθώντας την μεγαλύτερη ή ίση ωφέλεια (αντίστοιχα μεγαλύτερη ωφέλεια) από όση θα αποκόμιζε ακολουθώντας κάποια άλλη στρατηγική, ανεξάρτητα από το τι θα έκαναν οι υπόλοιποι πελάτες.

Μια στρατηγική s^e λέγεται (συμμετρική) στρατηγική ισορροπίας, αν είναι βέλτιστη απάντηση έναντι του εαυτού της. Δηλαδή, η s^e είναι στρατηγική ισορροπίας αν

$$F(s^e, s^e) \geq F(s, s^e),\ s \in \mathcal{S},$$

ή, ισοδύναμα, όταν $s^e \in BR(s^e)$. Με άλλα λόγια μια στρατηγική είναι στρατηγική ισορροπίας, αν κανένας πελάτης δεν έχει κίνητρο να την αλλάξει μονομερώς, όταν όλοι οι άλλοι την ακολουθούν.

Ένα βασικό ερώτημα αφορά τον υπολογισμό της συνάρτησης πληρωμής $F(s, s')$ σε ένα στρατηγικό πρόβλημα απόφασης πελατών στο πλαίσιο ενός συγκεκριμένου συστήματος εξυπηρέτησης. Η βασική ιδέα είναι ότι αν έχουμε έναν επιλεγμένο πελάτη που ακολουθεί την στρατηγική s, όταν οι υπόλοιποι ακολουθούν τη στρατηγική s', τότε αυτός δεν επηρεάζει την γενική συμπεριφορά του συστήματος. Η γενική συμπεριφορά του συστήματος προσδιορίζεται από τη στρατηγική s' που ακολουθούν οι υπόλοιποι πελάτες, μια και η επίδραση του επιλεγμένου πελάτη είναι αμελητέα. Στον υπολογισμό της συμπεριφοράς του συστήματος υποτίθεται, επίσης, ότι το σύστημα εξετάζεται για μεγάλο χρονικό διάστημα και επομένως τα διάφορα μέτρα υπολογίζονται υποθέτοντας ότι το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας (στασιμότητας).

Επομένως, η διαδικασία εύρεσης των στρατηγικών ισορροπίας σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα με στρατηγικούς πελάτες γίνεται σε βήματα ως εξής:

Βήμα 1ο: Μελέτη της στάσιμης συμπεριφοράς ενός συστήματος κάτω από κάθε στρατηγική s' των πελατών.

Βήμα 2ο: Υπολογισμός της συνάρτησης πληρωμής $F(s, s')$ ενός επιλεγμένου πελάτη που ακολουθεί την στρατηγική s, όταν οι άλλοι ακολουθούν τη στρατηγική s'.

Βήμα 3ο: Εύρεση βέλτιστης απάντησης του επιλεγμένου πελάτη έναντι μιας στρατηγικής των άλλων:

$$BR(s') = \{s \in \mathcal{S} : F(s, s') \geq F(\hat{s}, s'), \hat{s} \in \mathcal{S}\}.$$

Βήμα 4ο: Εύρεση στρατηγικών με την ιδιότητα $s^e \in BR(s^e)$.

9.3 Συμπεριφορές απόφυγε-το-πλήθος και ακολούθησε-το-πλήθος

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα πρόβλημα στρατηγικής συμπεριφοράς πελατών ο χώρος των στρατηγικών είναι ολικά διατεταγμένος, δηλαδή υπάρχει σχέση διάταξης, ώστε για κάθε δυο στρατηγικές s και s' να ισχύει $s \leq s'$ ή $s \geq s'$. Υποθέτουμε, επίσης ότι κάθε στρατηγική έχει μοναδική βέλτιστη απάντηση, την οποία συμβολίζουμε με $BR(s)$ (κανονικά το $BR(s)$ είναι το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων, αλλά αφού εδώ πρόκειται για μονοσύνολο το ταυτίζουμε με την μοναδική στρατηγική που περιέχει).

Αν η συνάρτηση $BR(s)$ είναι αύξουσα ως προς s, λέμε ότι η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών στο εν λόγω σύστημα είναι του τύπου ακολούθησε-το-πλήθος

(Follow-The-Crowd (FTC)). Διαισθητικά, αυτό σημαίνει ότι αν οι πελάτες υιοθετήσουν μια καινούργια στρατηγική που είναι "μεγαλύτερη" τότε και η βέλτιστη αντίδραση ενός επιλεγμένου πελάτη είναι να μετακινηθεί σε μια καινούργια στρατηγική που είναι "μεγαλύτερη" της αρχικής του. Οπότε, ο επιλεγμένος πελάτης αλλάζει στρατηγική προς την ίδια κατεύθυνση με τους άλλους πελάτες. Στην περίπτωση αυτή συνήθως υπάρχουν πολλές στρατηγικές ισορροπίας. Πράγματι οι στρατηγικές ισορροπίας αντιστοιχούν στα σημεία που το γράφημα της συνάρτησης $y = B(s)$ τέμνει την ευθεία $y = s$. Δεδομένου ότι η $B(s)$ είναι αύξουσα, τα αντίστοιχα σημεία τομής μπορεί να είναι περισσότερα από ένα.

Αν η συνάρτηση $BR(s)$ είναι φθίνουσα ως προς s, τότε η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών αναφέρεται ως τύπου απόφυγε-το-πλήθος (Avoid-The-Crowd (ATC). Στην περίπτωση αυτή, αν οι πελάτες υιοθετήσουν μια καινούργια στρατηγική που είναι "μεγαλύτερη" από την προηγούμενη επιλογή τους, τότε η βέλτιστη αντίδραση ενός επιλεγμένου πελάτη είναι να κινηθεί σε αντίθετη κατεύθυνση. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας που βρίσκεται στο σημείο τομής του γραφήματος της φθίνουσας συνάρτησης $y = B(s)$ με την ευθεία $y = s$.

9.4 Στρατηγικές κατωφλίου

Ας υποθέσουμε ότι οι πελάτες ενός συστήματος εξυπηρέτησης παρατηρούν το πλήθος των πελατών στο σύστημα πριν επιλέξουν μία από δυο αποφάσεις A_1 και A_2 (π.χ., μπορεί να παρατηρούν το πλήθος των πελατών στο σύστημα κατά τη στιγμή της άφιξής τους και να αποφασίζουν αν θα μπουν ή όχι). Στην περίπτωση αυτή, και εφόσον δεν υπάρχει επιπλέον πληροφορία που να δίνεται στους πελάτες για την κατάσταση του συστήματος, μια γενική στρατηγική έχει τη μορφή $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2 \ldots)$, όπου q_i είναι η πιθανότητα ένας πελάτης να πάρει την απόφαση A_1, όταν το πλήθος των πελατών είναι i.

Η στρατηγική $\mathbf{q} = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ με 1 στις πρώτες n θέσεις και 0 στις υπόλοιπες λέγεται (καθαρή) στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι n και υπαγορεύει τη λήψη της απόφασης A_1 εφόσον ο πελάτης παρατηρήσει $0, 1, 2, \ldots, n-1$ πελάτες πριν πάρει την απόφαση και τη λήψη της απόφασης A_2, διαφορετικά. Με άλλα λόγια, υπό τη στρατηγική κατωφλίου n, ο πελάτης παίρνει την απόφαση A_1 αν το πλήθος των πελατών συμπεριλαμβανομένου του εαυτού του είναι το πολύ n.

Η στρατηγική $\mathbf{q} = (1, 1, \ldots, 1, p, 0, 0, \ldots)$ με 1 στις πρώτες n θέσεις, $p \in [0, 1]$ στην $n+1$ θέση και 0 στις υπόλοιπες λέγεται μεικτή (ή τυχαιοποιημένη) στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι $x = n + p$. Υπό αυτή τη στρατηγική, ένας πελάτης λαμβάνει την απόφαση A_1 εφόσον παρατηρήσει $0, 1, \ldots, n-1$ πελάτες πριν πάρει την απόφαση του και την απόφαση A_2 εφόσον παρατηρήσει $n+1, n+2, \ldots$ πελάτες. Αν παρατηρήσει ακριβώς n πελάτες, τότε παίρνει την απόφαση A_1 με πιθανότητα p και την απόφαση A_2 με τη συμπληρωματική πιθανότητα $1 - p$. Για $p = 0$ ή 1, δηλαδή x ακέραιο, η μεικτή στρατηγική κατωφλίου $x = n + p$ ανάγεται στην αντίστοιχη καθαρή στρατηγική κατωφλίου.

Σε αρκετές εφαρμογές, αποδεικνύεται ότι οι στρατηγικές ισορροπίας ή οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές είναι τύπου κατωφλίου. Ακόμη και αν αυτό δεν ισχύει, συχνά η αναζήτηση στρατηγικών ισορροπίας και/ή κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών περιορίζεται στην κλάση των στρατηγικών κατωφλίου ή στην κλάση των μεικτών στρατηγικών κατωφλίου.

Στην περίπτωση που έχουμε συμπεριφορά FTC και οι βέλτιστες απαντήσεις είναι τύπου κατωφλίου, τότε εμφανίζονται τυπικά πολλές καθαρές στρατηγικές ισορροπίας τύπου κατωφλίου και ανάμεσα σε κάθε δυο διαδοχικές από αυτές παρεμβάλλεται μια μεικτή στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου. Αν έχουμε συμπεριφορά ATC και οι βέλτιστες απαντήσεις είναι τύπου κατωφλίου τότε υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας που μπορεί να είναι είτε καθαρή στρατηγική κατωφλίου, είτε μεικτή στρατηγική κατωφλίου.

9.5 Πλαίσιο κοινωνικής βελτιστοποίησης και βελτιστοποίησης μονοπωλίου

Σε ένα περιβάλλον όπου συνυπάρχουν ως οντότητες οι πελάτες και ο διαχειριστής ενός συστήματος, οι πελάτες επιθυμούν να βελτιστοποιήσουν το καθαρό πλεόνασμά τους, δηλαδή την αναμενόμενη αμοιβή/ωφέλεια από την εξυπηρέτηση μείον την πλήρη τιμή που περιλαμβάνει τόσο την τιμή της υπηρεσίας που μπορεί να επιβάλει ο διαχειριστής όσο και τα αναμενόμενα κόστη αναμονής. Συνήθως, οι πελάτες θεωρούνται ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο, δηλαδή επιθυμούν να μεγιστοποιήσουν το αναμενόμενο πλεόνασμά τους, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τη διασπορά του. Από την άλλη μεριά, ο διαχειριστής του συστήματος μπορεί να δρα ως κοινωνικός σχεδιαστής (social planner) ή ως μονοπώλειο.

Όταν ο διαχειριστής ενός συστήματος δρα ως κοινωνικός σχεδιαστής, υποθέτουμε ότι επιθυμεί να μεγιστοποιήσει το συνολικό κοινωνικό πλούτο ανά χρονική μονάδα, που ορίζεται ως η αναμενόμενη συνολική ωφέλεια ανά χρονική μονάδα όλων των εμπλεκομένων οντοτήτων (και των πελατών και του ιδίου). Στην περίπτωση αυτή οι πληρωμές μεταξύ των οντοτήτων δεν εμφανίζονται στη συνάρτηση της κοινωνικής ωφέλειας, αφού αφαιρούνται από κάποιες οντότητες και προστίθενται σε άλλες. Έτσι, π.χ., η επιβολή ενός τέλους εισόδου σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης δεν θα εμφανιστεί στη συνάρτηση της κοινωνικής ωφέλειας, αφού θα αφαιρεθεί από την ωφέλεια των πελατών και θα προστεθεί στην ωφέλεια του διαχειριστή συνεισφέροντας τελικά 0 στη συνολική κοινωνική ωφέλεια. Όμως, η επιβολή του τέλους επηρεάζει τη συμπεριφορά των πελατών που δρουν ιδιοτελώς προσπαθώντας να μεγιστοποιήσουν την ωφέλειά τους και επομένως εμμέσως επηρεάζει τη συνολική κοινωνική ωφέλεια. Σε γενικές γραμμές η συνολική κοινωνική ωφέλεια ανά χρονική μονάδα ισούται με την συνολική ωφέλεια των πελατών από την εξυπηρέτηση μείον τα κόστη λειτουργίας του συστήματος και τα κόστη αναμονής των πελατών.

Όταν ο διαχειριστής ενός συστήματος δρα ως μονοπώλειο, υποθέτουμε ότι επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τη δική του ωφέλεια (κέρδος) ανά χρονική μονάδα. Στην περίπτωση αυτή η αντικειμενική συνάρτηση που βελτιστοποιεί ο διαχειριστής ισούται με τα έσοδα από τους πελάτες μέσω των τελών/τιμών που επιβάλλει μείον τα κόστη λειτουργίας του συστήματος.

9.6 Στρατηγικές εισόδου στη μη-παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης τύπου M/M/1, όπου οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού λ, οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν κατανομή Exp(μ), υπάρχει 1 υπηρέτης, άπειρη χωρητικότητα και η πειθαρχία ουράς είναι η FCFS. Κάθε πελάτης λαμβάνει μέση αμοιβή R για την εξυπηρέτησή του, ενώ υφίσταται κόστος αναμονής με ρυθμό C, όσο βρίσκεται στο σύστημα (το οποίο συσσωρεύεται είτε βρίσκεται στο χώρο αναμονής είτε εξυπηρετείται). Ο διαχειριστής του συστήματος επιβάλει ένα τέλος εισόδου (τιμή της παρεχόμενης εξυπηρέτησης) για κάθε πελάτη. Υποθέτουμε ότι $p \in [0, R)$.

Το δίλημμα που αντιμετωπίζουν οι πελάτες αφορά το αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή όχι. Θεωρούμε ότι δεν μπορούν να παρατηρήσουν τον αριθμό των πελατών στο σύστημα πριν λάβουν την απόφασή τους, αλλά οι παράμετροι του συστήματος λ, μ, R, C, p είναι κοινή γνώση για όλους.

Οι καθαρές στρατηγικές ενός πελάτη είναι στην περίπτωση αυτή δυο: Είσοδος (απόφαση 1) ή αποχώρηση (απόφαση 0). Μια μεικτή στρατηγική προσδιορίζεται στην περίπτωση αυτή από έναν αριθμό $q \in [0, 1]$ που αντιστοιχεί στην πιθανότητα εισόδου.

Σκοπός μας είναι σε πρώτη φάση ο προσδιορισμός των στρατηγικών ισορροπίας των πελατών. Για το σκοπό αυτό θα ακολουθήσουμε τη γενική διαδικασία που περιγράφηκε νωρίτερα.

Αρχικά, προσδιορίζουμε τη στάσιμη συμπεριφορά του συστήματος κάτω από μια στρατηγική των πελατών. Έστω ότι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική q. Τότε, το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λq και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Τότε, ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη που θα αποφασίσει να εισέλθει σε αυτό το σύστημα είναι $\frac{1}{\mu - \lambda q}$ (λόγω της (8.1)).

Έστω, τώρα, ένας επιλεγμένος πελάτης που ακολουθεί τη στρατηγική q' όταν οι υπόλοιποι ακολουθούν τη στρατηγική q. Τότε η ωφέλειά του είναι

$$\mathcal{U}(q', q) = (1 - q') \cdot 0 + q' \left(R - p - \frac{C}{\mu - \lambda q} \right).$$

Επομένως, ο επιλεγμένος πελάτης για να βρει βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική q των άλλων έχει να λύσει το πρόβλημα

$$\max_{q' \in [0,1]} \mathcal{U}(q', q).$$

Η συνάρτηση $\mathcal{U}(q', q)$ είναι γραμμική ως προς q', οπότε για το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων έναντι της q, $BR(q)$, έχουμε

$$BR(q) = \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } R - p - \frac{C}{\mu - \lambda q} < 0 \\ [0, 1], & \text{αν } R - p - \frac{C}{\mu - \lambda q} = 0 \\ \{1\}, & \text{αν } R - p - \frac{C}{\mu - \lambda q} > 0, \end{cases}$$

ή λύνοντας ως προς q (υπό την προϋπόθεση ότι $q \in [0, 1]$ και $\lambda q < \mu$)

$$BR(q) = \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } q > \bar{q}_e \\ [0, 1], & \text{αν } q = \bar{q}_e \\ \{1\}, & \text{αν } q < \bar{q}_e, \end{cases}$$

με

$$\bar{q}_e = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R-p}\right).$$

Μπορούμε να προχωρήσουμε, τώρα, στην εύρεση των στρατηγικών ισορροπίας για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Ας θυμηθούμε ότι μια στρατηγική q είναι στρατηγική ισορροπίας, αν και μόνο αν $q \in BR(q)$. Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} & q_e = 0 \text{ είναι στρατηγική ισορροπίας} \\ \Leftrightarrow\ & 0 \in BR(0) \\ \Leftrightarrow\ & 0 \geq \bar{q}_e \\ \Leftrightarrow\ & R - p \leq \frac{C}{\mu}. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} & q_e \in (0,1) \text{ είναι στρατηγική ισορροπίας} \\ \Leftrightarrow\ & q_e \in BR(q_e) \\ \Leftrightarrow\ & q_e = \bar{q}_e \\ \Leftrightarrow\ & q_e = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R-p}\right), \end{aligned}$$

υπό την προϋπόθεση ότι $\bar{q}_e \in (0,1)$ που ισχύει αν και μόνο αν

$$\frac{C}{\mu} < R - p < \frac{C}{\mu - \lambda}.$$

Τέλος, έχουμε

$$\begin{aligned} & q_e = 1 \text{ είναι στρατηγική ισορροπίας} \\ \Leftrightarrow\ & 1 \in BR(1) \\ \Leftrightarrow\ & 1 \leq \bar{q}_e \\ \Leftrightarrow\ & R - p \geq \frac{C}{\mu - \lambda}. \end{aligned}$$

Επομένως, αποδείξαμε το εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 48 *Στο πρόβλημα της εισόδου/αποχώρησης των πελατών στη μη-παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά, υπάρχει πάντα στρατηγική ισορροπίας, $q_e = q_e(p)$, που είναι μοναδική και δίνεται από τον τύπο*

$$q_e = q_e(p) = \begin{cases} 0, & R - p \leq \frac{C}{\mu}, \\ \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R-p}\right), & \frac{C}{\mu} < R - p < \frac{C}{\mu-\lambda}, \\ 1, & R - p \geq \frac{C}{\mu-\lambda}. \end{cases}$$

Προχωράμε, τώρα, στη λύση του προβλήματος της κοινωνικής βελτιστοποίησης. Ο διαχειριστής του συστήματος, όταν δρα ως κοινωνικός σχεδιαστής, θέλει να επιλέξει μια κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική, q_{soc}, που να μεγιστοποιεί τον κοινωνικό πλούτο ανά χρονική μονάδα. Αν ο διαχειριστής αφήνει να εισέλθει στο σύστημα κάθε πελάτης με πιθανότητα q, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους πελάτες, τότε η διαδικασία αφίξεων στο σύστημα είναι Poisson με ρυθμό λq και το σύστημα είναι μια M/M/1 ουρά με αυτόν τον ρυθμό των αφίξεων και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Αν επιβληθεί τιμή p για την είσοδο των πελατών, τότε η ωφέλεια του διαχειριστή ανά χρονική μονάδα θα είναι $\lambda q p$, ενώ η συνολική ωφέλεια των πελατών θα είναι $\lambda q \left(R - p - \frac{C}{\mu - \lambda q}\right)$. Επομένως η συνολική κοινωνική ωφέλεια ανά χρονική μονάδα θα είναι

$$S_{soc}^{(un)}(q) = \lambda q \left(R - p - \frac{C}{\mu - \lambda q}\right) + \lambda q p = \lambda q \left(R - \frac{C}{\mu - \lambda q}\right),$$

που είναι ανεξάρτητη του p, όπως έχουμε πει παραπάνω (αφού στον κοινωνικό πλούτο δεν εμφανίζονται οι εσωτερικές πληρωμές). Ο “ εκθέτης ” (un) στη συνάρτηση $S_{soc}^{(un)}(q)$ δείχνει ότι αναφερόμαστε στο μη-παρατηρήσιμο (unobservable) μοντέλο. Είναι

$$\begin{aligned}\frac{d}{dq} S_{soc}^{(un)}(q) &= \lambda \left(R - \frac{C\mu}{(\mu - \lambda q)^2}\right), \\ \frac{d^2}{dq^2} S_{soc}^{(un)}(q) &= -\frac{2C\mu\lambda^2}{(\mu - \lambda q)^3} < 0.\end{aligned}$$

Επομένως, η $S_{soc}^{(un)}(q)$ είναι κοίλη για $q \in [0, \frac{\mu}{\lambda})$ και μεγιστοποιείται στο $\bar{q}_{soc}$ που μηδενίζει την $\frac{d}{dq} S_{soc}^{(un)}(q)$ και δίνεται από τον τύπο

$$\bar{q}_{soc} = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R}}\right). \tag{9.1}$$

Εφόσον $\bar{q}_{soc} \in [0, 1]$, συνάγουμε ότι η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική (δηλ. πιθανότητα εισόδου) δίνεται από τον τύπο (9.1), διαφορετικά το μέγιστο της κοινωνικής ωφέλειας επιτυγχάνεται στο 0 ή στο 1. Συγκεκριμένα, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 49 *Στο πρόβλημα της εισόδου/αποχώρησης των πελατών στην μη-παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά, η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι μοναδική και δίνεται από τον τύπο*

$$q_{soc} = \begin{cases} 0, & R \le \frac{C}{\mu}, \\ \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R}}\right), & \frac{C}{\mu} < R < \frac{C\mu}{(\mu-\lambda)^2}, \\ 1, & R \ge \frac{C\mu}{(\mu-\lambda)^2}. \end{cases}$$

Αν η τιμή εισόδου που επιβάλει ο διαχειριστής είναι μηδενική ($p = 0$) τότε ισχύει ότι $q_e(0) \ge q_{soc}$ για όλες τις τιμές των παραμέτρων λ, μ, R και C. Επομένως, βλέπουμε ότι, χωρίς την επιβολή κάποιας τιμής εισόδου, οι πελάτες χρησιμοποιούν το σύστημα περισσότερο από όσο είναι κοινωνικά βέλτιστο.

Προχωράμε, τώρα, στο πρόβλημα της τιμολόγησης του μονοπωλίου. Στην περίπτωση αυτή, ο διαχειριστής δρα με σκοπό την βελτιστοποίηση της συνολικής του ωφέλειας ανά χρονική μονάδα. Θέτοντας μια τιμή εισόδου, p, οι πελάτες υιοθετούν την αντίστοιχη στρατηγική ισορροπίας $q_e(p)$ που περιγράψαμε παραπάνω. Για να επάγει μια πιθανότητα εισόδου $q \in (0,1)$ ο διαχειριστής πρέπει να επιβάλει τιμή $p(q) = R - \frac{C}{\mu - \lambda q}$. Για $q = 1$ θα πρέπει να επιβάλει τη μέγιστη δυνατή τιμή που είναι η $p(1) = R - \frac{C}{\mu-\lambda}$. Όταν επάγει πιθανότητα εισόδου $q = 0$, επιβάλλοντας μια μεγάλη τιμή το κέρδος του είναι 0. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση του κέρδους ανά χρονική μονάδα είναι

$$S_{prof}^{(un)}(q) = \lambda q p(q) = \lambda q \left(R - \frac{C}{\mu - \lambda q} \right),$$

ταυτίζεται δηλαδή με τη συνάρτηση της συνολικής κοινωνικής ωφέλειας ανά χρονική μονάδα. Επομένως, η βέλτιστη πιθανότητα εισόδου για το διαχειριστή του συστήματος όταν δρα ως μονοπώλειο είναι η κοινωνικά βέλτιστη πιθανότητα εισόδου. Λόγω της ομοιογένειας των πελατών, οι αντικειμενικές συναρτήσεις της κοινωνικής ωφέλειας και της του μονοπωλίου συμπίπτουν και ο διαχειριστής του συστήματος, επιβάλλοντας την τιμή

$$p_{prof} = R - \frac{C}{\mu - \lambda q_{soc}}$$

μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια, αλλά ταυτόχρονα την καρπούται ολόκληρη, αφήνοντας μηδενικό περιθώριο καθαρής ωφέλειας στους πελάτες.

Αντικαθιστώντας την κοινωνικά βέλτιστη πιθανότητα εισόδου στον τύπο της p_{prof}, έχουμε ότι

$$p_{prof} = \begin{cases} R - \frac{C}{\mu-\lambda}, & \text{αν } \lambda < \mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R}} \\ R - \sqrt{\frac{RC}{\mu}}, & \text{αν } \lambda \geq \mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R}}, \end{cases}$$

που είναι φθίνουσα και τελικά σταθερή συνάρτηση του λ. Αυτό μοιάζει παράδοξο, αφού το λ μπορεί να ερμηνευθεί ως η ζήτηση της εξυπηρέτησης και επομένως αύξηση στη ζήτηση επάγει μείωση στην τιμή της. Όμως, αυτό μπορεί να αιτιολογηθεί διότι στη συγκεκριμένη περίπτωση η αύξηση στη ζήτηση επάγει μείωση στην ποιότητα του αγαθού της εξυπηρέτησης που οφείλεται στην αύξηση του μέσου χρόνου αναμονής και επομένως οι πελάτες γίνονται λιγότερο πρόθυμοι να το αγοράσουν.

9.7 Στρατηγικές εισόδου στην παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης M/M/1 με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, όπου κάθε πελάτης αντιμετωπίζει το δίλημμα εισόδου/αποχώρησης, αφού παρατηρήσει το πλήθος των πελατών που υπάρχει στο σύστημα, και γνωρίζοντας ότι η μέση αμοιβή από την εξυπηρέτησή του είναι R, ενώ συσσωρεύει κόστη αναμονής με ρυθμό C ανά χρονική μονάδα.

Ο διαχειριστής του συστήματος επιβάλει ένα τέλος εισόδου p το οποίο είναι επίσης γνωστό σε κάθε πελάτη.

Μια μεικτή στρατηγική ενός πελάτη στην περίπτωση αυτή δίνεται από μια ακολουθία $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$, όπου $q_n \in [0,1]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, είναι η πιθανότητα εισόδου στο σύστημα όταν ένας αφικνούμενος πελάτης βρίσκει n άτομα στο σύστημα (χωρίς να μετρά τον εαυτό του).

Αρχικά, θέλουμε να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών. Όταν οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική $\mathbf{q}$ το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια M/M/1 ουρά με μεταβλητό ρυθμό αφίξεων $\lambda_n = \lambda q_n$ και οποιοδήποτε μέτρο απόδοσης μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με βάση τη σχετική μεθοδολογία (βλέπε κεφάλαιο 8). Το σημαντικό, όμως, είναι ότι ο μέσος χρόνος παραμονής ενός επιλεγμένου πελάτη στο σύστημα, δεδομένου ότι βρίσκει n πελάτες μπροστά του, δεν εξαρτάται από την στρατηγική $\mathbf{q}$ του πληθυσμού των πελατών. Αυτό συμβαίνει διότι οι στρατηγικές των μελλοντικών αφίξεων δεν επηρεάζουν τον επιλεγμένο πελάτη λόγω της FCFS πειθαρχίας ουράς, αλλά ούτε και οι στρατηγικές των προηγούμενων πελατών επηρεάζουν τον επιλεγμένο πελάτη. Πράγματι, οι στρατηγικές των προηγούμενων πελατών δεν βασίστηκαν σε γνώση του χρόνου εξυπηρέτησής τους, οπότε το γεγονός ότι βρίσκονται n πελάτες στην ουρά δεν προσφέρει κάποια πληροφορία για τους χρόνους εξυπηρέτησης που δεν έχουν ακόμη ξεκινήσει. Όσον αφορά τον υπολειπόμενο χρόνο του χρόνου εξυπηρέτησης που βρίσκεται σε εξέλιξη, αυτός είναι σαν να ξεκινάει εκείνη τη στιγμή, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής. Επομένως, παρότι ο αριθμός των πελατών δεν είναι ανεξάρτητος με τον παρελθόντα χρόνο της τρέχουσας εξυπηρέτησης, είναι ανεξάρτητος με τον υπολειπόμενο. Έτσι, ο χρόνος παραμονής ενός επιλεγμένου πελάτη που βρίσκει n άτομα κατά την άφιξή του και αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα ισούται με το άθροισμα $n+1$ ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή $\mathrm{Exp}(\mu)$. Επομένως ο μέσος χρόνος παραμονής είναι $\frac{n+1}{\mu}$.

Ας θεωρήσουμε ότι ένας επιλεγμένος πελάτης ακολουθεί τη στρατηγική $\mathbf{q}' = (q_0', q_1', q_2', \ldots)$, όταν οι υπόλοιποι ακολουθούν τη στρατηγική $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$, και βλέπει n πελάτες, καθώς φθάνει στο σύστημα. Τότε, η ωφέλειά του είναι

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}', \mathbf{q}|n) = (1 - q_n') \cdot 0 + q_n' \left(R - p - \frac{C(n+1)}{\mu} \right).$$

Επομένως, το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων $BR(\mathbf{q}|n)$ ενός επιλεγμένου πελάτη έναντι της στρατηγικής $\mathbf{q}$ των άλλων, όταν βρίσκει n πελάτες στο σύστημα είναι

$$BR(\mathbf{q}|n) = \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } R - p - \frac{C(n+1)}{\mu} < 0 \\ [0,1], & \text{αν } R - p - \frac{C(n+1)}{\mu} = 0 \\ \{1\}, & \text{αν } R - p - \frac{C(n+1)}{\mu} > 0, \end{cases}$$

ή λύνοντας ως προς n

$$BR(\mathbf{q}|n) = \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } \frac{\mu(R-p)}{C} - 1 < n \\ [0,1], & \text{αν } \frac{\mu(R-p)}{C} - 1 = n \\ \{1\}, & \text{αν } \frac{\mu(R-p)}{C} - 1 > n. \end{cases}$$

Επομένως, έχουμε αποδείξει το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 50 *Στο πρόβλημα εισόδου/αποχώρησης των πελατών στην παρατηρή-*

σιμη $M/M/1$ ουρά, η στραγητική κατωφλίου n_e με

$$n_e = n_e(p) = \left\lfloor \frac{\mu(R-p)}{C} \right\rfloor,$$

συμφωνα με την οποία ένας πελάτης εισέρχεται στο σύστημα εφόσον το πλήθος των πελατών στο σύστημα συμπεριλαμβανομένου του ιδίου είναι το πολύ n_e είναι κυριαρχούσα στρατηγική (και επομένως και στρατηγική ισορροπίας).

Ο διαχειριστής του συστήματος, όταν δρα ως κοινωνικός σχεδιαστής, επιδιώκει να επιβάλλει μια κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική $\mathbf{q}_{soc}$, που να μεγιστοποιεί τη συνολική κοινωνική ωφέλεια ανά χρονική μονάδα, δηλαδή την ποσότητα

$$S_{soc}^{(obs)}(\mathbf{q}) = S_{soc}^{(obs)}(q_0, q_1, \ldots) = \lambda^*(\mathbf{q})R - CE_{\mathbf{q}}[Q], \tag{9.2}$$

όπου $\lambda^*(\mathbf{q})$ ο ρυθμός διαπέρασης του συστήματος, υπό τη στρατηγική $\mathbf{q}$, και $E_{\mathbf{q}}[Q]$ ο αντίστοιχος στάσιμος μέσος αριθμός πελατών.

Κάτω από μια στρατηγική εισόδου $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$, το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια M/M/1 ουρά με μεταβλητό ρυθμό αφίξεων $\lambda_n = \lambda q_n$ και σταθερό ρυθμό εξυπηρέτησης $\mu_n = \mu$. Η στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών θα είναι τότε (p_n), όπου

$$p_n = \begin{cases} B, & \text{αν } n = 0 \\ B\rho^n q_0 q_1 \cdots q_{n-1}, & \text{αν } n \geq 1, \end{cases}$$

όπου $\rho = \lambda/\mu$ και

$$B = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n q_0 q_1 \cdots q_{n-1}\right)^{-1}.$$

Η κλασική λύση του προβλήματος αυτού γίνεται με στοχαστικό δυναμικό προγραμματισμό, οπότε και αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη στρατηγική είναι τύπου κατωφλίου. Εμείς θα επικεντρωθούμε στο ειδικότερο πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης που μπορεί να επιτύχει ο κοινωνικός σχεδιαστής, επιβάλλοντας ένα τέλος (τιμή) εισόδου που είναι κοινό για όλους τους πελάτες.

Ας υποθέσουμε ότι ο διαχειριστής επιβάλλει τέλος εισόδου p. Τότε οι πελάτες υιοθετούν τη στρατηγικη κατωφλίου $n_e(p) = \left\lfloor \frac{\mu(R-p)}{C} \right\rfloor$. Το σύστημα συμπεριφέρεται τότε ως μια M/M/1/$n_e(p)$ ουρά. Ας υποθέσουμε, για συντομία, ότι $\rho \neq 1$. Τότε, ισχύουν τα αποτελέσματα που έχουμε συναγάγει στην παράγραφο 8.5.1, με $k = n_e(p)$. Χρησιμοποιώντας τους τύπους (8.2) και (8.3) για το ρυθμό διαπέρασης και το μέσο μήκος ουράς, αντίστοιχα, και αντικαθιστώντας στην (9.2) έχουμε ότι η κοινωνική ωφέλεια, όταν επιβληθεί η στρατηγική εισόδου κατωφλίου με κατώφλι n, μέσω κατάλληλης τιμής είναι

$$S_{soc}^{(obs)}(n) = \lambda R \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} - C\left[\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(n+1)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}\right].$$

Με απλές πράξεις, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$S_{soc}^{(obs)}(n) - S_{soc}^{(obs)}(n-1) = \frac{\lambda R(1-\rho)^2\rho^{n-1}}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)} + \frac{C((n+1)\rho - \rho^{n+1} - n)\rho^n}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)}.$$

Για $\rho < 1$ έχουμε

$$S_{soc}^{(obs)}(n) - S_{soc}^{(obs)}(n-1) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda R(1-\rho)^2 \geq C\rho(n+\rho^{n+1}-(n+1)\rho)$$
$$\Leftrightarrow \frac{R\mu}{C} \geq \frac{n+\rho^{n+1}-(n+1)\rho}{(1-\rho)^2}.$$

Έστω $g(n)$ η ποσότητα στο δεξιό μέλος της τελευταίας ανισότητας. Τότε

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{n+\rho^{n+1}-(n+1)\rho}{(1-\rho)^2} \qquad (9.3) \\ &= \frac{1}{(1-\rho)^2}\left(n(1-\rho)-\rho(1-\rho^n)\right) \\ &= \frac{1}{1-\rho}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\rho^k\right) \\ &= \frac{1}{1-\rho}\sum_{k=1}^{n}(1-\rho^k), \end{aligned}$$

η οποία είναι προφανώς γνησίως αύξουσα ως προς n. Επομένως, υπάρχει μοναδικό n_{soc} τέτοιο ώστε $g(n) \leq \frac{R\mu}{C}$, για $n \leq n_{soc}$, ενώ $g(n) > \frac{R\mu}{C}$, για $n > n_{soc}$. Οπότε, $S_{soc}^{(obs)}(n) - S_{soc}^{(obs)}(n-1) \geq 0$ για $n \leq n_{soc}$, ενώ $S_{soc}^{(obs)}(n) - S_{soc}^{(obs)}(n-1) < 0$ για $n > n_{soc}$. Επομένως, η $S_{soc}^{(obs)}(n)$ είναι μονοκόρυφη με μέγιστο στην n_{soc}. Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 51 *Στο πρόβλημα της εισόδου/αποχώρησης των πελατών στην παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά, η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική κατωφλίου έχει κατώφλι n_{soc} που δίνεται από τον τύπο*

$$n_{soc} = \max\left\{n : g(n) \leq \frac{R\mu}{C}\right\},$$

όπου η $g(n)$ δίνεται από την (9.3). Το κατώφλι αυτό επάγεται από το διαχειριστή του συστήματος, θέτοντας τέλος εισόδου p_{soc} ώστε $n_{soc} = \left\lfloor \frac{\mu(R-p_{soc})}{C} \right\rfloor$, δηλαδή οποιοδήποτε $p_{soc} \in \left(R - \frac{C(n_{soc}-1)}{\mu}, R - \frac{Cn_{soc}}{\mu}\right]$.

Επιπλέον ισχύει ότι $n_{soc} \leq n_e(0)$, δηλαδή, αν δεν επιβληθεί τέλος εισόδου, τότε το ατομικά βέλτιστο κατώφλι εισόδου για τους πελάτες είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το κοινωνικά βέλτιστο. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} g(n) - n &= \frac{1}{1-\rho}\sum_{k=1}^{n}(1-\rho^k) - \frac{1}{1-\rho}n(1-\rho) \\ &= \frac{\rho}{1-\rho}\sum_{k=1}^{n}(1-\rho^{k-1}) \geq 0, \end{aligned}$$

οπότε $g(n_{soc}) \geq n_{soc}$. Όμως, $g(n_{soc}) \leq \frac{R\mu}{C}$, από τον ορισμό του n_{soc}, οπότε $n_{soc} \leq \frac{R\mu}{C}$ που τελικά δίνει $n_{soc} \leq \left\lfloor \frac{R\mu}{C} \right\rfloor = n_e(0)$.

Βλέπουμε, επομένως, ότι χωρίς την επιβολή κάποιου τέλους εισόδου, οι πελάτες είναι πρόθυμοι να μπαίνουν πιο εύκολα απ΄ ό,τι είναι κοινωνικά βέλτιστο. Αυτό γίνεται διότι αγνοούν τις αρνητικές επιδράσεις (εξωτερικότητες) που επάγουν με την εισοδό τους στους μελλοντικούς πελάτες. Το ίδιο φαινόμενο παρατηρήθηκε και στο αντίστοιχο πρόβλημα της μη-παρατηρήσιμης M/M/1 ουράς.

Περνάμε τώρα στο πρόβλημα του μονοπωλίου. Στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε ότι ο διαχειριστής επιβάλλει κάποιο τέλος εισόδου με σκοπό τη βελτιστοποίηση της δικής του ωφέλειας. Αν επιβληθεί τέλος p, τότε οι πελάτες υιοθετούν την αντίστοιχη στρατηγική κατωφλίου $n_e(p)$ και το κέρδος γίνεται $\lambda^* p$. Για να βρούμε ποιό είναι το κατώφλι n_{prof} που βελτιστοποιεί το κέρδος, εκφράζουμε το κέρδος συναρτήσει του επιβληθέντος κατωφλίου n. Για να υιοθετήσουν κατώφλι n οι πελάτες θα πρέπει να τεθεί τέλος εισόδου p τέτοιο ώστε $\left\lfloor \frac{(R-p)\mu}{C} \right\rfloor = n$. Στο πρόβλημα του μονοπωλίου θα πρέπει να τεθεί η μέγιστη τιμή που επάγει το συγκεκριμένο κατώφλι, επομένως η $p = R - \frac{Cn}{\mu}$. Τότε το κέρδος του μονοπωλίου είναι:

$$\begin{aligned} S_{prof}^{(obs)}(n) &= \lambda \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \left(R - \frac{Cn}{\mu} \right) \\ &= \lambda R \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \left(1 - \frac{n}{\nu_e} \right), \end{aligned}$$

όπου $\nu_e = \frac{R\mu}{C}$. Η σχέση αυτή δείχνει ότι για $n > n_e(0) = \lfloor \frac{R\mu}{C} \rfloor$ ισχύει $S_{prof}(n) < 0$, αφού ο διαχειριστής πρέπει να θέσει αρνητικό τέλος εισόδου (δηλαδή πρέπει να επιδοτήσει την είσοδο) για να επάγει κατώφλι μεγαλύτερο από το $n_e(0)$. Επομένως, είναι βέβαιο ότι για το κατώφλι n_{prof} της βελτιστοποίησης του κέρδους του μονοπωλίου ισχύει $n_{prof} \leq n_e(0)$.

Για να δούμε που βελτιστοποιείται η συνάρτηση $S_{prof}^{(obs)}(n)$, θεωρούμε το λόγο $S_{prof}^{(obs)}(n)/S_{prof}^{(obs)}(n-1)$. Έχουμε

$$\frac{S_{prof}^{(obs)}(n)}{S_{prof}^{(obs)}(n-1)} = \frac{(1-\rho^n)^2(\nu_e - n)}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^{n-1})(\nu_e - n + 1)}.$$

Για $\rho < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{S_{prof}^{(obs)}(n)}{S_{prof}^{(obs)}(n-1)} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}(\nu_e - n) \geq \frac{1-\rho^{n-1}}{1-\rho^n}(\nu_e - n + 1) \\ &\Leftrightarrow \frac{(1-\rho^n)^2 - (1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)}(\nu_e - n) \geq \frac{1-\rho^{n-1}}{1-\rho^n} \\ &\Leftrightarrow \nu_e - n \geq \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{R\mu}{C} \geq n + \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2}. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $h(n)$ με

$$h(n) = n + \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2} \tag{9.4}$$

αποδεικνύεται ότι είναι αύξουσα ως προς n, οπότε υπάρχει μοναδικό n_{prof} τέτοιο ώστε $h(n) \leq \frac{R\mu}{C}$, για $n \leq n_{prof}$, ενώ $h(n) > \frac{R\mu}{C}$, για $n > n_{prof}$. Οπότε, η $S_{prof}^{(obs)}(n)$ είναι μονοκόρυφη με μέγιστο στην n_{prof}. Έτσι, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 52 *Στο πρόβλημα της εισόδου/αποχώρησης των πελατών στην παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά, η βέλτιστη στρατηγική κατωφλίου για το μονοπώλιο έχει κατώφλι n_{prof} που δίνεται από τον τύπο*

$$n_{prof} = \max\left\{n : h(n) \leq \frac{R\mu}{C}\right\},$$

όπου η $h(n)$ δίνεται από την (9.4). Το κατώφλι αυτό επάγεται από το διαχειριστή του συστήματος, θέτοντας τέλος εισόδου $p_{prof} = R - \frac{Cn_{prof}}{\mu}$.

Αποδεικνύεται ότι $n_{prof} \leq n_{soc} \leq n_e(0)$.

9.8 Ασκήσεις

1. Θεωρούμε μια M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και $\mathrm{Exp}(\mu)$ κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης, όπου μόλις το σύστημα αδειάσει ο υπηρέτης παύει να παρέχει εξυπηρέτηση και αρχίζει και πάλι να εξυπηρετεί, μόλις μαζευτούν K πελάτες με $K \geq 1$ (για $K = 1$ έχουμε την κλασική M/M/1 ουρά). Ας υποθέσουμε ότι κάθε πελάτης προσδοκά ωφέλεια R αν εξυπηρετηθεί από το σύστημα και υφίσταται κόστος με ρυθμό C για κάθε χρονική μονάδα παραμονής του στο σύστημα. Το δίλημμά του είναι κατά πόσο θα πρέπει να εισέλθει στο σύστημα ή όχι. Υποθέτουμε ότι όποιος πελάτης μπει στο σύστημα δεν έχει τη δυνατότητα να αναχωρήσει πριν την εξυπηρέτησή του. Να βρείτε τις στρατηγικές ισορροπίας για την περίπτωση μη-παρατηρήσιμου και παρατηρήσιμου συστήματος. Στην περίπτωση παρατηρήσιμου συστήματος, θεωρούμε ότι ο πελάτης λαμβάνει γνώση κατά την άφιξή του τόσο για τον αριθμό των παρόντων πελατών, όσο και για την κατάσταση του υπηρέτη (ανενεργός/ενεργοποιημένος).

2. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπητέτησης τύπου M/M/1, όπου οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν την $\mathrm{Exp}(\mu)$ κατανομή, υπάρχει 1 υπηρέτης και απεριόριστος χώρος αναμονής. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες, κατά την άφιξή τους και χωρίς να παρατηρήσουν τον αριθμό των πελατών που υπάρχει στο σύστημα μπορούν να αγοράσουν ένα κουπόνι προτεραιότητας σε τιμή θ ή να μην το αγοράσουν. Επιπλέον γνωρίζουν ότι επιβαρύνονται με κόστος με ρυθμό C όσο βρίσκονται στο σύστημα. Ο υπηρέτης εξυπηρετεί με FCFS τους πελάτες που έχουν αγοράσει το κουπόνι προτεραιότητας και αν δεν υπάρχουν τέτοιοι πελάτες τότε εξυπηρετεί αυτούς που δεν έχουν αγοράσει το κουπόνι, και πάλι με FCFS. Στην περίπτωση που εξυπηρετείται ένας πελάτης που δεν έχει αγοράσει το κουπόνι και αφιχθεί πελάτης που αγοράζει το κουπόνι, η εξυπηρέτηση του πελάτη θα διακοπεί ώστε ο υπηρέτης να εξυπηρετήσει τον πελάτη με κουπόνι προτεραιότητας. Όλοι οι πελάτες που φθάνουν στο σύστημα εισέρχονται σε αυτό και δεν (υπ)αναχωρούν μέχρι να εξυπηρετηθούν.

Η στρατηγική ενός πελάτη είναι η πιθανότητα αγοράς κουπονιού προτεραιότητας. Να εξεταστεί αν έχουμε κατάσταση FTC ή ATC. Να βρεθούν οι στρατηγικές ισορροπίας και οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές.

3. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με παράμετρο λ, ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν την κατανομή $\mathrm{Exp}(\mu)$. Κάθε φορά που το σύστημα αδειάζει ο υπηρέτης απενεργοποιείται. Με την άφιξη ενός πελάτη σε κενό σύστημα, ο υπηρέτης μπαίνει σε διαδικασία ενεργοποίησης. Ο χρόνος που χρειάζεται να ενεργοποιηθεί (οπότε και θα αρχίσει να παρέχει κανονικά εξυπηρέτηση) ακολουθει την κατανομή $\mathrm{Exp}(\theta)$. Κατά τη διάρκεια του χρόνου αυτού οι αφίξεις συνεχίζονται κανονικά. Το σύστημα αυτό αναφέρεται ως η M/M/1 ουρά με εκθετικούς χρόνους εκκίνησης. Ας υποθέσουμε ότι κάθε πελάτης προσδοκά ωφέλεια R αν εξυπηρετηθεί από το σύστημα και υφίσταται κόστος με ρυθμό C για κάθε χρονική μονάδα παραμονής του στο σύστημα. Το δίλημμά του είναι κατά πόσο θα πρέπει να εισέλθει στο σύστημα ή όχι. Υποθέτουμε ότι όποιος πελάτης μπει στο σύστημα δεν έχει τη δυνατότητα να αναχωρήσει πριν την εξυπηρέτησή του. Να βρείτε τις στρατηγικές ισορροπίας για την περίπτωση μη-παρατηρήσιμου και παρατηρήσιμου συστήματος. Στην περίπτωση παρατηρήσιμου συστήματος, θεωρούμε ότι ο πελάτης λαμβάνει γνώση κατά την άφιξή του τόσο για τον αριθμό των παρόντων πελατών, όσο και για την κατάσταση του υπηρέτη (ανενεργός/ενεργοποιημένος).

4. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με ρυθμό λ, ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την κατανομή $\mathrm{Exp}(\mu)$. Ο υπηρέτης εναλλάσεται μεταξύ περιόδων λειτουργίας και αργίας. Οι χρόνοι λειτουργίας έχουν την κατανομή $\mathrm{Exp}(\zeta)$, ενώ οι χρόνοι αργίας την κατανομή $\mathrm{Exp}(\theta)$. Οι αφίξεις στο σύστημα γίνονται κανονικά, ανεξάρτητα αν ο υπηρέτης είναι σε περίοδο λειτουργίας ή αργίας. Όμως, εξυπηρέτηση παρέχεται μόνο όταν ο υπηρέτης βρίσκεται σε περίοδο λειτουργίας. Το σύστημα αυτό αναφέρεται ως η M/M/1 ουρά με εναλλασσόμενες εκθετικές περιόδους λειτουργίας και αργίας. Ας υποθέσουμε ότι κάθε πελάτης προσδοκά ωφέλεια R αν εξυπηρετηθεί από το σύστημα και υφίσταται κόστος με ρυθμό C για κάθε χρονική μονάδα παραμονής του στο σύστημα. Το δίλημμά του είναι κατά πόσο θα πρέπει να εισέλθει στο σύστημα ή όχι. Υποθέτουμε ότι όποιος πελάτης μπει στο σύστημα δεν έχει τη δυνατότητα να αναχωρήσει πριν την εξυπηρέτησή του. Να βρείτε τις στρατηγικές ισορροπίας για την περίπτωση μη-παρατηρήσιμου και παρατηρήσιμου συστήματος. Στην περίπτωση παρατηρήσιμου συστήματος, θεωρούμε ότι ο πελάτης λαμβάνει γνώση κατά την άφιξή του τόσο για τον αριθμό των παρόντων πελατών, όσο και για την κατάσταση του υπηρέτη (ανενεργός/ενεργοποιημένος).

Μέρος III

Έλεγχος αποθεμάτων

10

Βασικά στοχαστικά μοντέλα αποθεμάτων

10.1 Ένα μοντέλο συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος

Στα μοντέλα συνεχούς επιθεώρησης του αποθέματος μιας αποθήκης, η στάθμη του αποθέματος καταγράφεται συνεχώς και οι νέες παραγγελίες στέλνονται κάθε φορά που η στάθμη του αποθέματος πέφτει κάτω από ένα ορισμένο σημείο αναπαραγγελίας. Λόγω της εκτεταμένης μηχανογράφησης των αποθηκών, τα μοντέλα συνεχούς επιθεώρησης χρησιμοποιούνται ολοένα και περισσότερο στις εφαρμογές.

Θεωρούμε ένα μοντέλο ελέγχου αποθέματος συνεχούς επιθεώρησης για ένα συγκεκριμένο προϊόν, του οποίου η στάθμη αποθέματος θεωρείται γνωστή ανά πάσα στιγμή. Η πολιτική ελέγχου του αποθέματος βασίζεται σε δυο κρίσιμους αριθμούς R και Q, που αντιστοιχούν στο σημείο αναπαραγγελίας και στην ποσότητα αναπαραγγελίας αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, μια πολιτική διαχείρισης αποθέματος (R, Q) υπαγορεύει την παραγγελία Q μονάδων προϊόντος, κάθε φορά που το υπάρχον απόθεμα πέφτει κάτω από R μονάδες. Από τη στιγμή που στέλνεται μια παραγγελία υπάρχει ένας χρονος παράδοσης που μπορεί να είναι σταθερός ή τυχαία μεταβλητή. Η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου παράδοσης της παραγγελίας είναι άγνωστη. Τη συμβολίζουμε με D και την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής $F_D(x)$ τη θεωρούμε γνωστή. Αν το απόθεμα εξαντληθεί πριν να παραληφθεί μια παραγγελία, η υπερβάλλουσα ζήτηση καταγράφεται ώστε να ικανοποιηθεί αργότερα (backlogging). Η ικανοποίηση της υπερβάλλουσας ζήτησης γίνεται άμεσα, μόλις παραληφθεί η νέα παραγγελία.

Σχετικά με τα κόστη που υπεισέρχονται στη λειτουργία της αποθήκης, θεωρούμε ότι υπάρχει ένα πάγιο κόστος K κάθε φορά που στέλνεται μια νέα παραγγελία, καθώς και κόστος c ανά κομμάτι που παραγγέλνεται. Επίσης, υπάρχει κόστος αποθήκευσης h ανά κομμάτι και χρονική μονάδα. Τέλος, υπάρχει κόστος έλλειψης p ανά μονάδα προϊόντος και χρονική μονάδα που συσσωρεύεται μέχρι την παράδοση της νέας παραγγελίας.

Ας παραβλέψουμε προς στιγμή τη στοχαστικότητα της ζήτησης και ας υποθέσουμε ότι ο ρυθμός ζήτησης ανά χρονική μονάδα είναι σταθερός και ίσος με a. Το μοντέλο που προκύπτει αναφέρεται ως μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας με προβλεπόμενες ελλείψεις (Economic Order Quantity (EOQ) model with planned shortages).

Προχωράμε στην ανάλυση αυτού του ντετερμινιστικού μοντέλου. Αμέσως μετά την παραλαβή παραγγελίας Q, η στάθμη του αποθέματος θα είναι S. Αμέσως πριν την παραλαβή της παραγγελίας, η στάθμη του αποθέματος ήταν $S - Q < 0$, οπότε η ποσότητα $Q - S = |S - Q|$ αντιστοιχεί στην μέγιστη έλλειψη που παρατηρείται στο απόθεμα. Ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών παραδόσεων παραγγελιών αναφέρεται ως κύκλος του συστήματος και έχει διάρκεια Q/a. Κατά τη διάρκεια ενός κύκλου η στάθμη του αποθέματος ξεκινά από το σημείο S και μειώνεται γραμμικά μέχρι να φθάσει στη χαμηλότερη στάθμη που είναι η $S - Q$. Με άλλα λόγια, το ύψος του αποθέματος t χρονικές μονάδες μετά την παραλαβή της τελευταίας παραγγελίας είναι $S - at$, $t \in [0, Q/a)$.

Τα κόστη που συσσωρεύονται σε έναν κύκλο είναι το πάγιο κόστος παραγγελίας K, το κόστος παραγγελίας για ποσότητα Q προϊόντων που ισούται με cQ, καθώς και κόστη αποθήκευσης και έλλειψης. Στη διάρκεια ενός κύκλου, το απόθεμα είναι θετικό για χρόνο S/a. Το κόστος αποθήκευσης σε έναν κύκλο είναι, επομένως:

$$h \int_0^{S/a} (S - at)dt = h\left(S\frac{S}{a} - a\frac{(S/a)^2}{2}\right) = \frac{hS^2}{2a}.$$

Ομοίως, το απόθεμα είναι αρνητικό (καταγράφεται έλλειψη) για χρόνο $(Q - S)/a$. Το κόστος έλλειψης σε έναν κύκλο είναι

$$p \int_0^{(Q-S)/a} atdt = pa\frac{(Q - S)^2}{2a^2} = \frac{p(Q - S)^2}{2a}.$$

Επομένως το συνολικό κόστος ανά χρονική μονάδα είναι

$$\begin{aligned} c(S, Q) &= \frac{K + cQ + hS^2/(2a) + p(Q - S)^2/(2a)}{Q/a} \\ &= \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q - S)^2}{2Q}. \end{aligned}$$

Βρίσκουμε το ελάχιστο της $c(S, Q)$, λύνοντας το σύστημα $\nabla c(S, Q) = \mathbf{0}$, που στην περίπτωση αυτή γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial S} &= \frac{hS}{Q} - \frac{p(Q - S)}{Q} = 0, \\ \frac{\partial c}{\partial Q} &= -\frac{aK}{Q^2} - \frac{hS^2}{2Q^2} + \frac{p(Q - S)}{Q} - \frac{p(Q - S)^2}{2Q^2} = 0. \end{aligned}$$

Οι βέλτιστες τιμές για το μέγιστο απόθεμα (αμέσως μετά την αναπαραγγελία), την ποσότητα της αναπαραγγελίας, τη μέγιστη έλλειψη και τη διάρκεια του κύκλου του συστήματος αποθεμάτων είναι, αντίστοιχα:

$$S^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}},$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}},$$

$$Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2aK}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}},$$

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{2K}{ah}\sqrt{\frac{p+h}{p}}.$$

Το ποσοστό του χρόνου που δεν υπάρχουν ελλείψεις είναι

$$\frac{S^*/a}{Q^*/a} = \frac{p}{p+h},$$

Επιστρέφουμε τώρα στο αρχικό μας πρόβλημα με τη στοχαστικότητα στη ζήτηση και στους χρόνους παράδοσης. Για την ποσότητα παραγγελίας Q χρησιμοποιείται ο τύπος για το ντετερμινιστικό μοντέλο που εκθέσαμε παραπάνω, όπου τη θέση του a παίρνει η μέση ζήτηση ανά χρονική μονάδα. Αυτή η θεώρηση είναι μόνο μια καλή προσέγγιση για τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας, καθώς δεν υπάρχει τύπος για την ακριβή της τιμή. Η προσέγγιση αυτή είναι πάντως ιδιαίτερα ικανοποιητική (βλέπε Axsäter [2] και Zheng [15]).

Η επιλογή του σημείου αναπαραγγελίας R, γίνεται με βάση κάποιο κριτήριο που λαμβάνει υπόψη το επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης. Π.χ. ως μέτρο του επιπέδου εξυπηρέτησης, ας θέσουμε την πιθανότητα l ότι δεν θα παρατηρηθούν ελλείψεις από τη στιγμή που στέλνεται μια παραγγελία μέχρι την παραλαβή της. Τότε το R υπολογίζεται από τη σχέση $\Pr[D \leq R] = l$. Ως απόθεμα ασφαλείας αναφέρεται η ποσότητα $R - E[D]$ που αντιστοιχεί στο αναμενόμενο απόθεμα μόλις πριν την παραλαβή μιας παραγγελίας.

10.2 Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη

Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη αναφέρεται στην επιλογή βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας ενός προϊόντος για μια περίοδο, το οποίο απαξιώνεται στο τέλος της περιόδου, όταν η ζήτηση του προϊόντος κατά τη διάρκεια της περιόδου είναι αβέβαια. Τέτοια προϊόντα με μικρή διάρκεια ζωής είναι οι εφημερίδες και τα περιοδικά, τα λουλούδια, φρέσκα προϊόντα διατροφής κλπ.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι υπάρχει ένα είδος προϊόντος το οποίο θα πρέπει να προμηθευτούμε για μια χρονική περίοδο, το οποίο απαξιώνεται γρήγορα και επομένως δεν μπορεί να πωληθεί σε επόμενη περίοδο. Πιθανά, όμως, τα προϊόντα που μένουν απούλητα να μπορούν να επιστραφούν ή να εκποιηθούν σε κάποια τιμή ευκαιρίας.

Συμβολίζουμε με x το αρχικό απόθεμα του προϊόντος. Η απόφαση αφορά των αριθμό των προϊόντων που πρέπει να παραγγελθούν (ή να παραχθούν) ώστε να είναι έτοιμα για κατανάλωση. Επομένως αν a είναι η απόφαση που αναφέρεται στην ποσότητα των προϊόντων που θα παραγγελθεί, έχουμε ότι το ύψος του αποθέματος μετά την παραγγελία θα είναι $y = x + a$. Μπορούμε να σκεφτόμαστε την a ή την y ως τη μεταβλητή της απόφασης. Η ζήτηση στη διάρκεια της περιόδου είναι άγνωστη και μοντελοποιείται από μια τυχαία μεταβλητή D, με γνωστή κατανομή $F_D(x)$. Για απλότητα στην παρουσίαση θα υποθέσουμε ότι η κατανομή της D είναι (απόλυτα) συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_D(x)$.

Όσον αφορά τα κόστη, θεωρούμε ότι υπάρχει πάγιο κόστος K για την τοποθέτηση μιας παραγγελίας, καθώς και κόστος c ανά μονάδα προϊόντος. Επίσης, υπάρχει κόστος h ανά μονάδα προϊόντος που θα μείνει στο τέλος της περιόδου (το οποίο περιλαμβάνει πιθανά κόστη αποθήκευσης μείον την τιμή ευκαιρίας με την οποίας επιστρέφεται ή εκποιείται κάθε κομμάτι). Επίσης, υπάρχει κόστος έλλειψης p ανά μονάδα ανικανοποίητης ζήτησης που αντικατατοπτρίζει τα χαμένα κέρδη και την απώλεια καλής φήμης της εταιρείας. Υποθέτουμε ότι $p > c$. Αυτό είναι εύλογο, διότι διαφορετικά (αν $p \leq c$), τότε συμφέρει να μην παραγγέλνεται τίποτα, αφού η έλλειψη του προϊόντος κοστίζει λιγότερο από την ικανοποίησή του μέσω παραγγελίας.

Αν ληφθεί η απόφαση να παραγγελθούν a προϊόντα, δηλαδή το επίπεδο αποθέματος μετά την παραλαβή της παραγγελίας να είναι $y = x+a$, τότε το αναμενόμενο κόστος είναι

$$
\begin{aligned}
c(x,a) &= \begin{cases} K + ca + hE[(x+a-D)^+] + pE[(x+a-D)^-] & \text{αν } a > 0, \\ hE[(x-D)^+] + pE[(x-D)^-] & \text{αν } a = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} K + cy + hE[(y-D)^+] + pE[(y-D)^-] - cx & \text{αν } y > x, \\ hE[(y-D)^+] + pE[(y-D)^-] & \text{αν } y = x \end{cases} \\
&= \begin{cases} K + cy + l(y) - cx & \text{αν } y > x, \\ l(x) & \text{αν } y = x, \end{cases} \qquad (10.1)
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
l(y) &= hE[(y-D)^+] + pE[(y-D)^-] \\
&= h\int_0^y (y-\xi) f_D(\xi) d\xi + p\int_y^\infty (\xi - y) f_D(\xi) d\xi. \qquad (10.2)
\end{aligned}
$$

Για κάθε σταθερό d, έχουμε ότι οι συναρτήσεις $(y-d)^+$ και $(y-d)^-$ είναι κυρτές ως προς y, επομένως και οι $E[(y-D)^+]$, $E[(y-D)^-]$ είναι κυρτές ως προς y (γενικότερα, αν Z τυχαία μεταβλητή και $f(y,z)$ κυρτή ως προς y για κάθε σταθερό z, τότε και $E[f(y,Z)]$ είναι κυρτή ως προς y). Επομένως η $l(y)$ είναι επίσης κυρτή (γενικότερα ο γραμμικός συνδυασμός κυρτών συναρτήσεων με μη-αρνητικούς συντελεστές είναι κυρτή συνάρτηση). Έστω τώρα S η τιμή της y που ελαχιστοποιεί την $cy + l(y)$ στο $[0,\infty)$ (η οποία υπάρχει σίγουρα αφού $\lim_{y\to\infty}(cy + l(y)) = \infty$). Έστω, επίσης, s να είναι η μικρότερη τιμή της y ώστε $cs + l(s) = K + cS + l(S)$. Για να βρούμε πού πιάνεται το ελάχιστο της $c(x,a)$ που δίνεται από την (10.1) διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το αν $x > S$, $s \leq x \leq S$ ή $x < s$. Από την κυρτότητα της $cy + l(y)$, έχουμε ότι

- Για $x > S$, είναι $K + cy + l(y) - cx > K + cx + l(x) - cx > l(x)$, για κάθε $y > x$. Πράγματι η $K + cy + l(y) - cx$ είναι αύξουσα συνάρτηση του y για $y > x$, αφού η $K + cy + l(y) - cx$ είναι κυρτή με ελάχιστο στο S και $x > S$. Επομένως, στην περίπτωση αυτή το ελάχιστο της $c(x, a)$ πιάνεται στον δεύτερο κλάδο, δηλαδή για $a = 0$.

- Για $s \leq x \leq S$, η ελάχιστη τιμή του πρώτου κλάδου της $c(x, a)$, δηλαδή της $K + cy + l(y) - cx$, για $y > x$, πιάνεται στο S και είναι $K + cS + l(S) - cx = cs + l(s) - cx$. Όμως η $cy + l(y)$ είναι φθίνουσα στο $[s, x]$ αφού $x < S$, οπότε $cs + l(s) > cx + l(x)$ ή ισοδύναμα $cs + l(s) - cx > l(x)$. Επομένως, έχουμε ότι το ελάχιστο της $c(x, a)$ πιάνεται και πάλι στον δεύτερο κλάδο, δηλαδή για $a = 0$.
- Για $x < s$, η ελάχιστη τιμή του πρώτου κλάδου της $c(x, a)$, δηλαδή της $K + cy + l(y) - cx$, για $y > x$, πιάνεται στο S και είναι $K + cS + l(S) - cx = cs + l(s) - cx$. Όμως η $cy + l(y)$ είναι φθίνουσα στο $[x, s]$ αφού $x, s < S$, οπότε $cx + l(x) > cs + l(s)$ ή ισοδύναμα $cs + l(s) - cx < l(x)$. Επομένως, έχουμε ότι το ελάχιστο της $c(x, a)$ πιάνεται στον πρώτο κλάδο, και μάλιστα για $y = S$ ή ισοδύναμα $a = S - x$.

Για να βρούμε την τιμή του S, πρέπει να δούμε που ελαχιστοποιείται η κυρτή συνάρτηση $cy + l(y)$. Ισοδύναμα πρέπει να δούμε που μηδενίζεται η παράγωγός της. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dy}(cy + l(y)) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{d}{dy}\left(cy + h\int_0^y (y-\xi) f_D(\xi) d\xi + p\int_y^\infty (\xi - y) f_D(\xi) d\xi\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{d}{dy}\left(cy + hyF_D(y) - h\int_0^y \xi f_D(\xi) d\xi + p\int_y^\infty \xi f_D(\xi) d\xi - py(1 - F_D(y))\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & c + hF_D(y) + hyf_D(y) - hyf_D(y) - pyf_D(y) - p + pF_D(y) + pyf_D(y) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & F_D(y) = \frac{p - c}{p + h}. \qquad (10.3)
\end{aligned}
$$

Επομένως, καταλήξαμε στο εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 53 *Η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας για το μοντέλο του εφημεριδοπώλη είναι τύπου (s, S), δηλαδή θα πρέπει να παραγγέλνει ώστε να φθάσει σε επίπεδο αποθέματος S, αν το αρχικό απόθεμα του είναι κάτω από s, δηλαδή,*

$$
a^*(x) = \begin{cases} S - x, & \text{αν } x < s, \\ 0, & \text{αν } x \geq s. \end{cases} \qquad (10.4)
$$

Είναι

$$
S = F_D^{-1}\left(\frac{p - c}{p + h}\right) \qquad (10.5)
$$

και το s είναι η ελάχιστη λύση της εξίσωσης

$$
cs + l(s) = K + cS + l(S), \qquad (10.6)
$$

με $l(y)$ που δίνεται από την (10.2).

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει πάγιο κόστος παραγγελίας, δηλαδή $K = 0$, είναι $s = S$.

10.3 Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας ενός προϊόντος για το μοντέλο του εφημεριδοπώλη, όταν η ζήτηση έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $[5, 10]$ και οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $K = 5$, $h = 1$, $p = 5$ και $c = 3$. Το αρχικό απόθεμα είναι 10 μονάδες.

2. Να βρεθεί η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας ενός προϊόντος για το μοντέλο του εφημεριδοπώλη, όταν η ζήτηση έχει την $\text{Exp}(1)$ κατανομή, οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $K = 5$, $h = 1$, $p = 5$ και $c = 3$, και δεν υπάρχει αρχικό απόθεμα.

Αναφορές

[1] Adan, I. and J. Resing (2000) *Queueing Theory.* Notes available on the web.

[2] Axsäter, S. (1996) Using the deterministic EOQ formula in stochastic inventory control. *Management Science* **42**, 830-834.

[3] Axsäter, S. (2006) *Inventory Control, 2nd Edition.* Springer, New York.

[4] Baccelli, F. and P. Bremaud (1994) *Elements of Queueing Theory.* Springer–Verlag, New York.

[5] Gross, D. and C.M. Harris (1985) *Fundamentals of Queueing Theory.* Wiley, Chichester.

[6] Hassin, R. and Haviv, M. (2003) *To Queue or Not to Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems.* Kluwer, Boston.

[7] Hillier, Frederick S. and Gerald J. Lieberman (2015) *Introduction to Operations Research, 10th Edition.* McGraw-Hill International Edition, New York.

[8] Kulkarni, V.G. (2010) *Modeling and Analysis of Stochastic Systems, 2nd Edition.* CRC Press, Boca Raton.

[9] Little, J.D.C. (1961) A proof for the queueing formula: $L = \lambda W$. *Operations Research* **9**, 383–387.

[10] Ross, S.M. (1970) *Applied Probability Models with Optimization Applications.* Holden-Day Inc., San Francisco.

[11] Ross, S.M. (1983) *Introduction to Stochastic Dynamic Programming.* Academic Press.

[12] Stidham, S.,Jr. (1974) A last word on $L = \lambda W$. *Operations Research* **22**, 417–421.

[13] Taha, Hamdy A. (2007) *Operations Research, 8th Edition.* Pearson - Prentice Hall, New Jersey.

[14] Wolff, Ronald, W. (1989) *Stochastic Modeling and the Theory of Queues.* Prentice-Hall International Series in Industrial and Systems Engineering, New Jersey.

[15] Zheng, Y.-S. (1992) On properties of stochastic systems. *Management Science* **38**, 87-103.

[16] Zipkin, P.H. (2000) *Foundations of Inventory Management.* Mc-Graw Hill, Boston.

[17] Φακίνου, Δ. (2003) *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

[18] Φακίνου, Δ. (2003) *Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα: Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.