23/5/19 Μάθημα 21

Σ.μ.Ε.Ε.

Ανάλυση Μέσης Τιμής

[Ιδέα: χρησιμοποιώ τον Νόμο Little (1) και δεσμεύω (2) στο πλήθος πελατών που βλέπω μπαίνοντας. Λύνω το σύστημα των (1), (2), για να βρω $E[Q]$, $E[S]$ κλπ.]

① Βασικά αποτελέσματα

1] Ευστάθεια στο GI/GI/c $\Leftrightarrow$ $\rho = \underbrace{\lambda b}_{\text{δουλειά που μπαίνει στο σύστημα}} < \underset{\text{πλήθος υπηρετών}}{c}$

2] Νόμος Little: $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

3] Μεμονωμένες αφίξεις/αναχωρήσεις $\Rightarrow$ $a_j = d_j$

4] PASTA (γενικεύουμε λίγο τη διατύπωση του προηγούμενου μαθήματος): Αν X είναι η τ.μ. σε κατάσταση ισορροπίας ενός χαρακτηριστικού $\{X(t)\}$, τότε οι πιθανότητες $X=x$ είναι οι ίδιες σε συνεχή χρόνο και όταν οι στιγμές παρατήρησης είναι οι στιγμές μιας σ.δ. Poisson, της οποίας το μέλλον δεν εξαρτάται από τη μέχρι τώρα ιστορία.

5] Βασικό πόρισμα της PASTA:

Poisson διαδικασία αφίξεων $\Rightarrow$ $a_j = P_j$ $\left(\Leftrightarrow Pr[\underset{\text{\#πελατών που βλέπουμε μπαίνοντας}}{Q^-} = j] = Pr[\underset{\text{\#πελατών σε συνεχή χρόνο}}{Q} = j]\right)$

6] $\rho = (\text{μέση εισερχόμενη εργασία}) / (\text{χρονική μονάδα}) =$ μέσο πλήθος απασχολημένων υπηρετών (στο GI/GI/c) $=$

$= 1 - P_0$ (στο GI/GI/1)

$\frac{\rho}{c} =$ ποσοστό απασχολημένων υπηρετών (στην GI/GI/c)

Αυτά τα 4+2 είναι τα βασικά αποτελέσματα στις Ουρές. Πάνω σε αυτά θα στηρίξουμε τις διάφορες τεχνικές.

② Ανάλυση Μέσης Τιμής (ΑΜΤ) για την M/GI/1/1

- Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων
- Χρόνοι εξυπηρέτησης $\sim B(x)$ με $E[X]=b$
- 1 υπηρέτης
- Χωρητικότητα 1

$\xrightarrow{\lambda} \bigcirc \rightarrow$

Ερωτήματα: $E[Q]=?$, $E[S]=?$, $(P_j), (a_j), (d_j)=?$

Λύση:

Παίρνουμε την 1η σχέση από τον Νόμο του Little:

$$E[Q] = \underbrace{\lambda}_{\text{ρυθμός αφίξεων}} \cdot \underbrace{E[S]}_{\text{μέσος χρόνος παραμονής αφικνούμενων (όχι εισερχόμενων) πελατών}} \qquad (1)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ στο λ: εδώ, ασχολούμαστε με όλους όσους φθάνουν, όχι μόνο με αυτούς που εισέρχονται!

Για τη 2η σχέση, υπολογίζουμε το $E[S]$ ενός πελάτη δεσμεύοντας στο πλήθος πελατών που βρίσκει αφικνούμενος (δηλαδή στο Q^-):

$$E[S] = \underbrace{Pr[Q^-=0]}_{a_0} \cdot \underbrace{E[S|Q^-=0]}_{b} + \underbrace{Pr[Q^-=1]}_{a_1} \cdot \underbrace{E[S|Q^-=1]}_{0 \text{ (αφού δεν μπαίνει καν)}} \Rightarrow$$

$$E[S] = a_0 \cdot b \overset{\text{PASTA}}{\underset{a_0=P_0}{=\!=}} P_0 \cdot b \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2), έχουμε:

$E[Q] = \lambda P_0 b = \rho P_0$. Όμως, $E[Q] = 1 \cdot Pr[Q=1] + 0 \cdot Pr[Q=0] \Rightarrow$

$E[Q] = Pr[Q=1] = P_1$, οπότε έχουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \rho P_0 \\ P_0 + P_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} P_0 = \frac{1}{1+\rho} \\ P_1 = \frac{\rho}{1+\rho} \end{array}\right., \text{ οπότε:}$$

$E[Q]=p_1$, $E[S]=b\cdot p_0$, $d_j \underset{\text{μεταβάσεων}}{\overset{\text{ιδιότητα μεμονωμένων}}{=}} a_j \overset{\text{PASTA}}{=} p_j = \begin{cases} \frac{1}{1+\rho}, & j=0 \\ \frac{\rho}{1+\rho}, & j=1 \end{cases}$

(Να σημειωθεί ότι $p_0 \neq 1-\rho$ εδώ. Αυτό γίνεται επειδή έχουμε επιπλέον χωρητικότητα 1. Επίσης, το σύστημα είναι πάντα ευσταθές. Αυτό συμβαίνει κάθε φορά που το σύστημα έχει πεπερασμένη χωρητικότητα.)

Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται και για την M/GI/1, αλλά είναι πολύ δύσκολη. Θα δούμε την M/M/1 στη θέση της (να σημειωθεί ότι για να κάναμε ΑΜΤ, χρειάζονται οπωσδήποτε Poisson αφίξεις, για να έχουμε την PASTA. Αφού η $2^η$ σχέση προκύπτει δεσμεύοντας στο πόσους βλέπει ο αφικνούμενος πελάτης, δηλαδή στο Q^-, πρέπει να μπορούμε να περάσουμε στο Q ⤳ PASTA).

③ <u>ΑΜΤ για την M/M/1 ουρά</u>

- Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- ∞ χωρητικότητα
- FCFS πειθαρχία ουράς

Συνθήκη ευστάθειας = ?
$E[Q]$, $E[S]$ = ?
(p_j), (a_j), (d_j), $F_S(x)$ = ?
$E[\underbrace{I}_{\text{αργία}}]$, $E[\underbrace{Y}_{\text{συνεχής λειτουργία}}]$, $E[Z]$

Λύση:

Η M/M/1 είναι ειδική περίπτωση της GI/GI/1, με $b=\frac{1}{\mu}$, άρα η συνθήκη ευστάθειας είναι:

$$\rho<1 \iff \frac{\lambda}{\mu}<1 \iff \lambda<\mu$$
(λογικό: η ουρά δεν σκάει αν, και μόνο αν, ρυθμός αφίξεων < ρυθμός εξυπηρετήσεων)

<u>Υπολογισμός $E[Q]$, $E[S]$</u>:
→ $1^η$ σχέση: Νόμος Little
→ $2^η$ σχέση: Δεσμεύουμε στο πόσους είδε κάποιος φθάνοντας

λύνουμε το σύστημα

Νόμος Little: $E[Q]=\lambda\cdot E[S]$ (1)

Υπολογισμός του $E[S]$ για επιλεγμένο πελάτη, δεσμεύοντας στο Q^- :

$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{Q^-+1} X_i\right]$, όπου X_i, $2 \leq i \leq Q^-+1$, ο χρόνος εξυπηρέτησης του i-πελάτη στο σύστημα και X_1 ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του 1-πελάτη στο σύστημα. Έχουμε τυχαίο άθροισμα, άρα ΘΔΜΤ:

$$E[S] = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{Pr[Q^-=j]}_{\substack{\parallel \\ a_j \overset{PASTA}{=} P_j}} \cdot E\left[\sum_{i=1}^{Q^-+1} X_i \,\Big|\, Q^-=j\right] \quad (2)$$

Όμως,

$$E\left[\sum_{i=1}^{Q^-+1} X_i \,\Big|\, Q^-=j\right] = E\left[\sum_{i=1}^{j+1} X_i \,\Big|\, Q^-=j\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{j+1} E[X_i \,|\, Q^-=j] \overset{\text{είναι σωστό να πετάξουμε τη δέσμευση για όλα τα } X_i \text{ εκτός από το } X_1}{=\!=} E[X_1 \,|\, Q^-=j] + \sum_{i=2}^{j+1} \underbrace{E(X_i)}_{1/\mu} =$$

οι χρόνοι $X_2, X_3, \ldots, X_{j+1}$ είναι χρόνοι εξυπ. που δεν έχουν αρχίσει ακόμα, άρα ανεξάρτητοι από το $Q^-=j$

$$\overset{X_1 \sim Exp(\mu)}{=\!=} E(X_1) + j \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} + j \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{j+1}{\mu} \quad (3)$$

Εδώ θα χαλούσε στην M/GI/1

Από τις (2), (3), παίρνουμε:

$$E[S] = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \cdot \frac{j+1}{\mu} \overset{\text{τύπος αφηρημένου}}{\underset{\text{στατιστικού}}{=\!=}} \frac{E[Q]+1}{\mu} \quad (4)$$

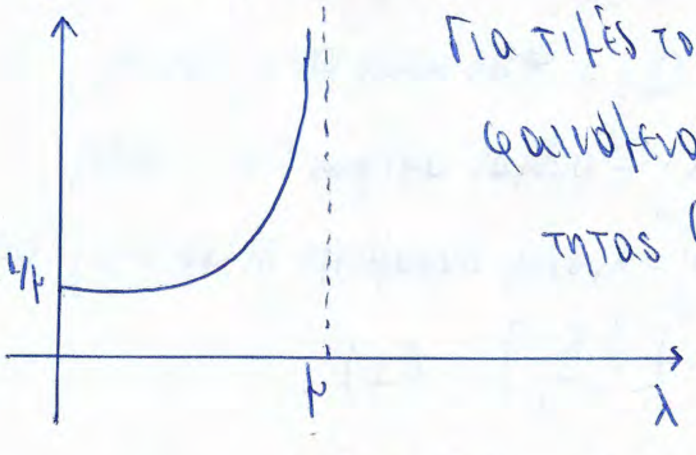
Από τις (1), (4), παίρνουμε:

$$E[Q] = \lambda \cdot \frac{E[Q]+1}{\mu} \underset{\rho=\lambda/\mu}{\Longrightarrow} E[Q] = \rho \cdot E[Q] + \rho \Rightarrow E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

άρα $E[S] \overset{N.\,Little}{=\!=} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \overset{\rho=\lambda/\mu}{=\!=} \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$

να σημειωθεί ότι ο τρόπος που επηρεάζουν οι παράμετροι μας ουράς τα $E[Q]$, $E[S]$ είναι μη γραμμικός (Βλ. Σχήμα)

Δείξαμε ότι $E[S] = \frac{1}{\mu-\lambda}$. Θεωρώντας το συνάρτηση του λ, δηλαδή για σταθερό μ, έχουμε:



Για τιμές του λ πολύ κοντά στο μ, έχουμε ακραία φαινόμενα. Αυτά είναι αποτελέσματα της τυχαιότητας (!) Θα βρούμε τώρα τα $E[I]$, $E[Y]$ και $E[Z]$:

$$E[I] = \text{Μέση τιμή υπολειπόμενου χρόνου άφιξης σε στιγμές που το σύστημα αδειάζει} \underset{\text{ιδιότητα της } Exp(\lambda)}{\overset{\text{αμνήμονη}}{=\!=\!=}} E[Exp(\lambda)] = \frac{1}{\lambda}.$$

Για το $E[Z]$:

Η $\{Q(t)\}$ στην M/M/1 είναι αναγεννητική διαδικασία με σημεία αναγέννησης τις ενάρξεις κύκλων λειτουργίας. Άρα, από το $\underbrace{\text{ΣΑΘΚ}}$ παίρνουμε:

δεν είναι απαραίτητο να έχουμε χρονικά κόστη. Το ΣΑΘΚ είναι πάρα πολύ γενικό και αναφέρεται γενικά σε μονάδες που συσσωρεύονται στον χρόνο (εδώ αυτές οι μονάδες είναι χρόνοι!)

$$\underbrace{P_0}_{\substack{1-\rho \\ \text{στην } GI/GI/1}} = \text{Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου κενού συστήματος} = \frac{E[I]}{E[Z]}$$

$E[I]$ ← μέση διάρκεια κενού συστήματος σε έναν κύκλο

$E[Z]$ ← μέση διάρκεια κύκλου

$$\Longleftrightarrow 1-\rho = \frac{\frac{1}{\lambda}}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}.$$

Ισχύει πάντα ότι $E[Z] = E[Y] + E[I]$, άρα

$$E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda}.$$

Υπολογισμός (p_j), (a_j), (d_j):

$\forall j \in \{0,1,2,\dots\}$, $p_j \overset{PASTA}{=} a_j \underset{\text{αφίξεις/αναχωρήσεις}}{\overset{\text{μεμονωμένες}}{=}} d_j$, άρα αρκεί να βρούμε την (p_j).

Για τον υπολογισμό του p_j, κάνουμε Νόμο Little στην j-θέση (ο Νόμος του Little αναφέρεται σε οποιοδήποτε υποσύστημα του αρχικού συστήματος → πολλή προσοχή τώρα στα λ, $E[S]$, $E[Q]$ ~ αλλάζουν!)

Έστω Q_j = #πελατών στην j-θέση,
λ_j = ρυθμός αφίξεων στην j-θέση,
S_j = χρόνος παραμονής πελάτη στην j-θέση.

Νόμος Little: $E[Q_j] = \lambda_j \cdot E[S_j]$ (1).

Τα βρίσκουμε ξεχωριστά:

- $E[Q_j] = 1 \cdot \Pr[Q_j = 1] = \Pr\left[\begin{matrix}\text{στο σύστημα}\\ \text{υπάρχουν}\\ \text{τουλάχιστον } j\\ \text{πελάτες}\end{matrix}\right] = \Pr[Q \geq j]$

- Για τα λ_j, $E[S_j]$ υπάρχουν δύο θεωρήσεις:

1η θεώρηση: $\lambda_j = \lambda$ (ο πελάτης περνάει σίγουρα από την j-θέση)

$$E[S_j] = \Pr[Q^- \geq j-1] \cdot \frac{1}{\mu} + \Pr[Q^- = j] \cdot 0 = \sum_{k=j-1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{\mu}$$

2η θεώρηση: $$\lambda_j = \underbrace{\lambda}_{\substack{\text{ρυθμός}\\ \text{αφίξεων}}} \cdot \underbrace{\Pr\left[\begin{matrix}\text{να υπάρχουν τουλάχιστον}\\ j-1 \text{ πελάτες μπαίνοντας}\end{matrix}\right]}_{\substack{\text{πιθανότητα να μπορέσω να}\\ \text{πιάσω την } j \text{ θέση}}} = \lambda \cdot \sum_{k=j-1}^{\infty} a_k \overset{PASTA}{=} \lambda \cdot \sum_{k=j-1}^{\infty} p_k = \lambda \cdot \Pr[Q \geq j-1]$$

Άρα, $$\Pr[Q \geq j] = \lambda \cdot \Pr[Q^- \geq j-1] \cdot \frac{1}{\mu} \xrightarrow[Q^- \overset{d}{=} Q]{PASTA} \rho \cdot \Pr[Q \geq j-1].$$

Η σχέση αυτή είναι αναδρομική. Βάζουμε όπου j το j+1:

$$\Pr[Q \geq j+1] = \rho \cdot \Pr[Q \geq j]$$

και αφαιρούμε κατά μέλη:

$\Pr[Q = j] = \rho \cdot \Pr[Q = j-1] \Rightarrow p_j = \rho \cdot p_{j-1}$, $j \geq 1$, $p_0 = 1-\rho$, άρα
$p_j = (1-\rho)\rho^j$, $j = 0, 1, \dots$, δηλαδή $(p_j) \sim Geom(\rho)$

Υπολογισμός $F_S(x)$:

$$F_S(x) = Pr[S \le x] = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{Pr[Q^-=j]}_{=\, q_j \,=\, p_j \,=\, (1-\rho)\rho^j} \cdot \underbrace{Pr[S \le x \mid Q^- = j]}_{=\, \int_0^x \frac{\mu^{j+1}}{j!} u^j e^{-\mu u}\, du} =$$

PASTA

$(S \mid Q^- = j) \sim Erlang(j+1, \mu)$ ← αφού έχουμε $j+1$ $Exp(\mu)$ χρόνους

$$= \mu(1-\rho) \int_0^x \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\rho\mu u)^j}{j!}}_{e^{\rho\mu u}} e^{-\mu u}\, du = \underbrace{\int_0^x \mu(1-\rho) e^{-\mu(1-\rho)u}\, du}_{\text{σ.κ. της } Exp(\mu(1-\rho))},$$

άρα $S \sim Exp(\mu(1-\rho))$ [συμπίπτει και με το $E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$, που είχαμε δει!].