9/5/19 Μαθημα 17

Σ.μ.Ε.Ε.

Εφαρμογές του Στοιχειώδους Ανανεωτικού Θεωρήματος με Κόστη (ΣΑΘΚ)

① ΣΑΘΚ

Έστω $\{C(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία κόστους με $\{N(t)\}$ υποκείμενη ανανεωτική διαδικασία (δηλαδή $(X_n, C_n), n\geq 1$, ανεξάρτητες και ισόνομες) όπου X_n ενδιάμεσοι χρόνοι της $\{N(t)\}$, S_n χρόνοι γεγονότων της $\{N(t)\}$ και $C_n = C(S_n) - C(S_{n-1})$. Τότε,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{\underbrace{t}_{\text{τ.μ.}}} = \frac{E[C]}{E[X]} \quad \text{με πιθ. 1}$$ (σύγκλιση τυχαίων μεταβλητών)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{\underbrace{t}_{\text{αριθμοί}}} = \frac{E[C]}{E[X]}$$ (σύγκλιση πραγματικών αριθμών)

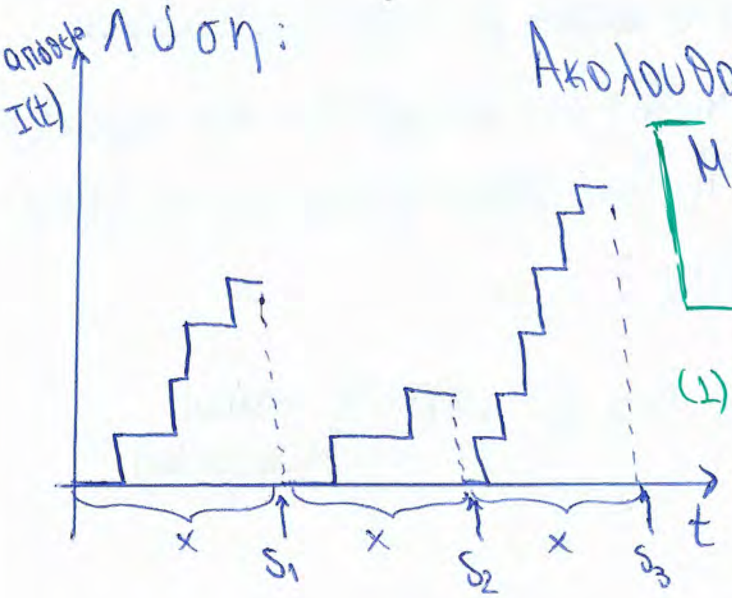
② Εκκαθάριση αποθήκης I

- $\{A(t)\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού λ προϊόντων που φθάνουν σε αποθήκη
- Η αποθήκη εκκαθαρίζεται κάθε $\underbrace{x}_{\text{μεταβλητή απόφασης}}$ χρονικές μονάδες (ακαριαία)
- Κόστη: K πάγιο κόστος ανά εκκαθάριση (το πληρώνουμε πάντα σε κάθε εκκαθάριση)
  k κόστος εκκαθάρισης/προϊόν
  h κόστος αποθήκευσης/προϊόν και χρονική μονάδα

[Η ισορροπία που πρέπει να βρούμε είναι ανάμεσα στο K και στο h. Αν το x είναι πολύ μεγάλο, τότε το K δεν μας επιβαρύνει πολύ, όμως το h μεγαλώνει, αφού συσσωρεύω πολλή ποσότητα προς αποθήκευση μέχρι να γίνει η εκκαθάριση ⇝ χρειαζόμαστε μία βέλτιστη πολιτική (!)]

- Συνάρτηση Μακροπρόθεσμου Μέσου Ρυθμού κόστους λειτουργίας της αποθήκης $= C(x)$

- Βέλτιστο x



Λύση:

Ακολουθούμε τα 4 γνωστά βήματα:

[Μοντελοποίηση (1), Επαλήθευση (2), ΣΑΘΚ (3), Βελτιστοποίηση (4) (!)] Εδώ:

(1) Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία των στιγμών εκκαθαρίσεων (ντετερμινιστική). $X_n = x$, $S_n = nx$,

$\{C(t)\}$ διαδικασία κόστους, όπου

$$C(t) = \text{κόστος μέχρι τη στιγμή } t = \begin{pmatrix}\text{κόστος}\\ \text{από } K\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{κόστος}\\ \text{από } k\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{κόστος}\\ \text{από } h\end{pmatrix} =$$

πάγιο

πόσες εκκαθαρίσεις έχουν γίνει μέχρι τη στιγμή t

$$= \underbrace{K \cdot \underbrace{N(t)}_{\lfloor \frac{t}{x} \rfloor}}_{\text{κόστος που οφείλεται στο πάγιο}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N(t)} k \underbrace{\left[A(ix) - A((i-1)x)\right]}_{\#\text{ αφίξεων στον } X_i}}_{\text{κόστος που οφείλεται στο } k} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{N(t)} h \sum_{j=1}^{A_i(x)} (x - S_{ij})}_{\text{κόστος που οφείλεται στο } h},$$ όπου S_{ij} ο χρόνος άφιξης του j-οστού προϊόντος του i-οστού κύκλου (μετρώντας από την έναρξη του κύκλου).

Παρατηρούμε ότι είναι πολύ δύσκολο να μελετάμε συνολικά το κόστος, άρα περιοριζόμαστε στον n-οστό κύκλο:

Εδώ, για τον n-οστό ανανεωτικό κύκλο έχουμε $X_n = x$ και

$$C_n = K + k\cdot A_n(x) + h\cdot \sum_{j=1}^{A_n(x)} (x - S_{n,j})$$

(2) Παρατηρούμε ότι το C_n εξαρτάται από την $\{A(t)\}$ στο διάστημα $((n-1)x, nx]$, άρα οι (X_n, C_n), $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες λόγω των ανεξάρτητων και ομογενών προσαυξήσεων της $\{A(t)\}$.

(3) Ελέγχουμε πρώτα τις προϋποθέσεις του ΣΑΘΚ:

$$E[X_n] = x$$

τυχαίο άθροισμα, άρα κάνουμε ΘΔΜΤ δεσμεύοντας στο $A_n(x)$

$$E[C_n] = K + k\cdot E[A_n(x)] + h\cdot E\left[\sum_{j=1}^{A_n(x)} (x - S_{n,j})\right] =$$

$$= K + k\lambda x + h\cdot \sum_{i=0}^{\infty}\left(\Pr[A_n(x)=i]\cdot E\left[\underbrace{\sum_{j=1}^{A_n(x)} (x - S_{n,j}) \,\Big|\, A_n(x)=i}_{\text{Θ. Campbell}}\right]\right) =$$

$$= K + k\lambda x + h\cdot \sum_{i=0}^{\infty} \Pr[A_n(x)=i]\, E\left[\sum_{j=1}^{i} (x - U_{j:i})\right],$$

όταν n-οστό κύκλο είναι i γεγονότα και θέλουμε το j-οστό

όπου $U_{j:i}$ η j-οστή διατεταγμένη από i το πλήθος ανεξάρτητες και ισόνομες Uniform([0,x]). Επομένως,

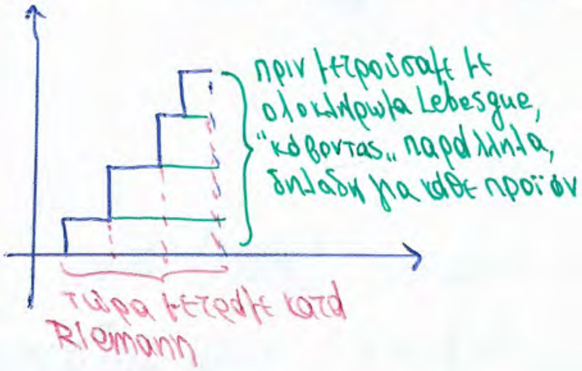
$$E[C_n] = K + k\lambda x + h\cdot \sum_{i=0}^{\infty} \Pr[A_n(x)=i] \sum_{j=1}^{i} \left(x - \frac{jx}{i+1}\right)$$

$$= K + k\lambda x + h\cdot \sum_{i=0}^{\infty} \Pr[A_n(x)=i]\left(ix - \frac{x}{\cancel{i+1}}\cdot\frac{i\cancel{(i+1)}}{2}\right)$$

$$= K + k\lambda x + h\cdot\frac{x}{2}\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\left(i\cdot \Pr[A_n(x)=1]\right)}_{E[A_n(x)] = \lambda x} = K + k\lambda x + \frac{h\lambda x^2}{2}$$

(καταλήξαμε σε πολύ απλή έκφραση!)

Εναλλακτικά, το $E[G_n]$ υπολογίζεται ευκολότερα ως εξής:



$$E[G_n] = K + k\cdot E[A_n(x)] + h\cdot E\Big[\underbrace{\int_0^x A_n(u)\,du}_{\text{Riemann}}\Big] =$$

$$= K + k\cdot E[A_n(x)] + h\cdot \int_0^x \underbrace{E[A_n(u)]}_{\lambda u}du$$

$$= K + k\lambda x + h\cdot\frac{\lambda x^2}{2}.$$

Έχουμε λοιπόν ότι $E[X_n] = x < \infty$ και $E[G_n] = K + k\lambda x + \frac{h\lambda x^2}{2} < +\infty$, άρα το ΣΑΘΚ είναι εφαρμόσιμο:

$$c(x) = \begin{array}{c}\text{Μακροπρόθεσμος}\\ \text{Μέσος Ρυθμός Κόστους}\end{array} \overset{\text{ΣΑΘΚ}}{=} \frac{E[C]}{E[X]} = \underbrace{\frac{K}{x} + k\lambda + \frac{h\lambda x}{2}}$$

Εδώ φαίνεται η ισορροπία που ζητούσαμε: $x\nearrow \Rightarrow \frac{K}{x}\searrow$ και $\frac{h\lambda x}{2}\nearrow$

(4) Η $c(x)$ είναι κυρτή ως προς x, άρα το σημείο που μηδενίζει την $c'(x)$ είναι ολικό ελάχιστο:

$$c'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{K}{x^2} + \frac{h\lambda}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2K}{\lambda h} \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x^* = \sqrt{\frac{2K}{\lambda h}},$$

η βέλτιστη περίοδος εκκαθάρισης. [Να σημειωθεί ότι αν η $\{A(t)\}$ ήταν γενικά μία ανανεωτική διαδικασία και όχι σδ Poisson, τότε η παραπάνω ανάλυση δεν ισχύει, γιατί δεν έχουμε τις ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις.]

Τελικά,

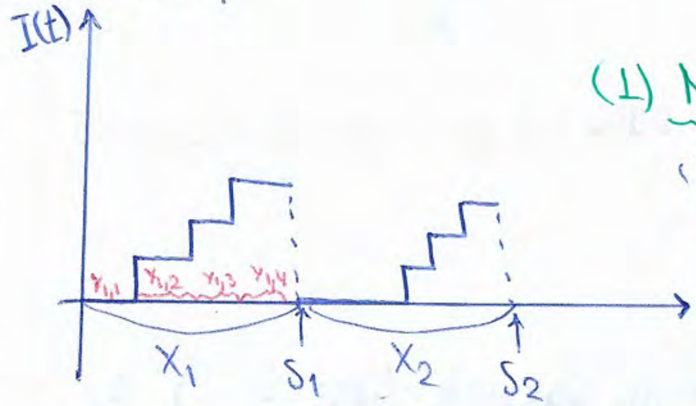
$$c(x) = \frac{K}{x} + k\lambda + \frac{h\lambda x}{2} \quad \text{και} \quad x^* = \sqrt{\frac{2K}{\lambda h}}$$

③ Εκκαθάριση αποθήκης II

- $\{A(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία αφίξεων προϊόντων με ρυθμό λ ($\mu = \frac{1}{\lambda}$: μέσος ενδιάμεσος χρόνος)
- Η αποθήκη εκκαθαρίζεται ακαριαία μόλις μαζευτούν m προϊόντα. (μεταβλητή απόφασης (αυτήν θα βελτιστοποιήσουμε))

- Ίδια δομή κόστους (K, k, h)
- Ίδια ερωτήματα: $c(m)$, m^*

Λύση:



(1) Μοντελοποίηση:

Έστω $\{N(t)\}$ η ανανεωτική διαδικασία των εκκαθαρίσεων της αποθήκης, $\{C(t)\}$ η διαδικασία κόστους. Εδώ,

$X_n = \sum_{i=1}^{m} Y_{n,i}$, όπου $Y_{n,1}, Y_{n,2}, \dots, Y_{n,m}$ είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων των προϊόντων του n-οστού κύκλου, και

$$C_n = K + km + h\cdot \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j},$$

διότι ο χρόνος αποθήκευσης του i-οστού προϊόντος του n-οστού κύκλου είναι $Y_{n,i+1} + Y_{n,i+2} + \dots + Y_{n,m}$.

(2) Επαλήθευση ορισμού:

Θεωρούμε την ακολουθία διατεταγμένων ζευγών τυχαίων μεταβλητών (X_n, C_n), $n \geq 1$. Κάθε ζεύγος (X_n, C_n) εξαρτάται από τις $Y_{n,1}, Y_{n,2}, \dots, Y_{n,m}$. Όμως οι $Y_{n,i}$, $n \geq 1$, $1 \leq i \leq m$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (ενδιάμεσοι χρόνοι της $\{A(t)\}$). Έπεται ότι και οι (X_n, C_n), $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.

(3) ΣΑΘΚ:

$$E[X_n] = E\left[\sum_{i=1}^{m} Y_{n,i}\right] = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{E[Y_{n,i}]}_{\mu} = m\cdot\mu = m\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{m}{\lambda}$$

$$E[C_n] = K + km + h\sum_{i=1}^{m-1} \underbrace{\sum_{j=i+1}^{m} \mu}_{(m-i-1+1)\mu} = K + km + h\cdot\frac{(m-1)m}{2}\mu \overset{\mu=\frac{1}{\lambda}}{=} K + km + \frac{h(m-1)m}{2\lambda}$$

Ισχύει ότι $E[X_n]<\infty$ και $E[C_n]$, άρα εφαρμόζεται το ΣΑΘΚ:

$$c(m)=\lim_{t\to\infty}\frac{E[C(t)]}{t}=\frac{E[C]}{E[X]}=\frac{K+km+h\frac{(m-1)m}{2\lambda}}{\frac{m}{\lambda}} \Rightarrow$$

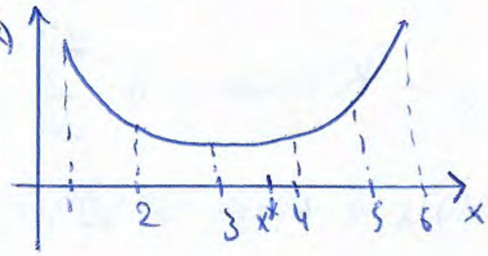
$$c(m)=\frac{\lambda K}{m}+\lambda k+\frac{h(m-1)}{2}, \quad m=1,2,\dots$$ (μοιάζει πάρα πολύ με το c(x) της Εφαρμογής I),

(4) Βελτιστοποίηση:

Το πρόβλημα είναι ότι τώρα η c(m) είναι διακριτή $(m=1,2,\dots)$. Αν θεωρήσουμε την επέκταση της c(m) με ίδιο τύπο στο $\mathbb{R}_+$, έχουμε

$$c(x)=\frac{\lambda K}{x}+\lambda k+\frac{h\cdot(x-1)}{2}$$ κυρτή, άρα $c'(x)=0 \Leftrightarrow$

$$-\frac{\lambda K}{x^2}+\frac{h}{2}=0 \Leftrightarrow x^*=\sqrt{\frac{2\lambda K}{h}}$$



Άρα το βέλτιστο m είναι

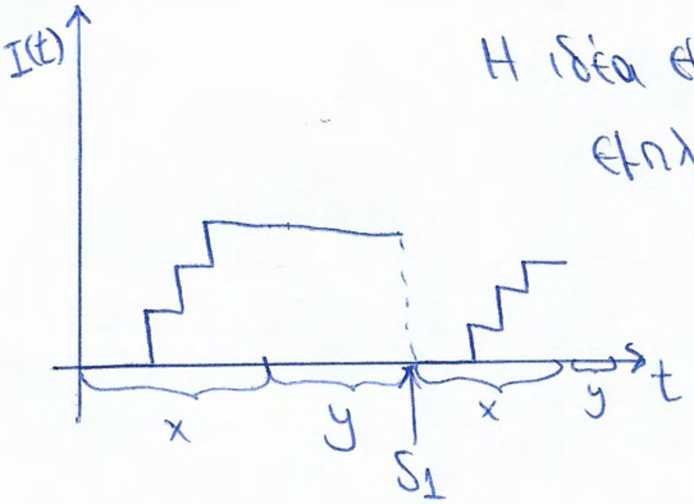
$$m^*=\lfloor x^*\rfloor \text{ ή } \lfloor x^*\rfloor+1.$$

Με βάση αυτή την πολιτική, το μήκος βέλτιστης περιόδου εκκαθάρισης $=m^*\cdot\mu=\frac{m^*}{\lambda}\simeq\sqrt{\frac{2\lambda K}{h}}\cdot\frac{1}{\lambda}$ → σε συμφωνία με την Εφαρμογή 1

[Η Εφαρμογή I μας έδειξε κάθε πότε να εκκαθαρίζουμε την αποθήκη, ενώ η Εφαρμογή II κάθε πόσα προϊόντα. Από τη μία μπορούμε να μεταβούμε στην άλλη και να πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα (!)]

④ Άλλες παραλλαγές (για μελέτη)

- Ίδιο πλαίσιο με εκκαθάριση αποθήκης, αλλά η εκκαθάριση διαρκεί χρόνο y, κατά τον οποίο δεν γίνονται δεκτά προϊόντα (αλλά πληρώνεται κόστος αποθήκευσης)



Η ιδέα είναι όπως στο Ι, απλώς τώρα εμπλέκεται και ο χρόνος y όπου δεν έχουμε αφίξεις.

["Τέτοιο θέμα μπορεί να τεθεί στο τέλος, αλλά πιο απλό!"]
~ Αντ. Οικ.