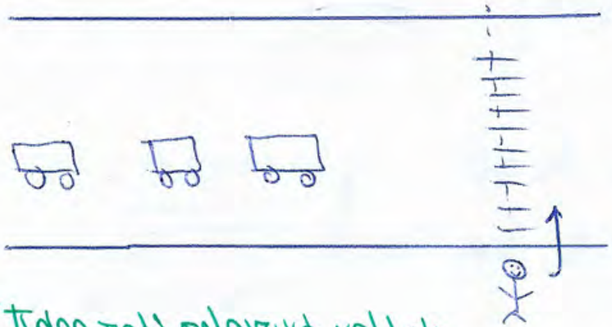
11/4/19 Μάθημα 13

Σ.μ.Ε.Ε.

Ασκήσεις στη στοχαστική διαδικασία Poisson

(θα γίνουν με φθίνουσα σειρά δυσκολίας)

① **Άσκηση** (πολύ δύσκολη!) Αυτοκίνητα που διέρχονται από διάβαση με στοχαστική διαδικασία Poisson ρυθμού λ. Υπάρχει πεζός που θέλει να διασχίσει ασφαλώς τη διάβαση και ο χρόνος διάσχισης είναι t_0 για αυτόν. ["Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε στην Ελλάδα και οι διαβάσεις δεν αποτελούν αιτία διακοπής της πορείας των αυτοκινήτων"!]



Μέσος χρόνος αναμονής μέχρι να αρχίσει τη διάσχιση $= E[T] = ?$

[Πάρα πολύ σημαντικό κομμάτι της λύσης η μοντελοποίηση!]

1ος τρόπος: (Δέσμευση στο πόσα αυτοκίνητα θα περάσουν μέχρι να αρχίσει τη διάσχιση ο πεζός)

Έστω T = χρόνος αναμονής

N = πλήθος αυτοκινήτων που θα περάσουν πριν αρχίσει τη διάσχιση ο πεζός.

Από Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής, έχουμε ότι

$$E[T] = \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N=n] \cdot E[T \mid N=n].$$

Έστω $X_1, X_2, \ldots \sim Exp(\lambda)$ οι χρόνοι μεταξύ των αυτοκινήτων.
Θέλουμε να δούμε πώς "μεταφράζεται" η $N=n$ σε σχέση των X_i.
Σε επίπεδο ενδεχομένων, έχουμε:

$$\{N=n\} = \{\underbrace{X_1 \le t_0, X_2 \le t_0, \ldots, X_n \le t_0}_{\text{τα n πρώτα αυτοκίνητα περνάνε πριν από τον πεζό}}, \underbrace{X_{n+1} > t_0}_{\text{το (n+1)-οστό μετά τον πεζό}}\}, \text{ άρα}$$

$$\Pr[N=n] \overset{X_i \text{ ανεξάρτητες}}{\underset{X_i \sim Exp(\lambda)}{=\!=\!=}} (1-e^{-\lambda t_0})^n \cdot e^{-\lambda t_0}, \quad n=0,1,\dots$$

Θέλουμε τώρα τις $E[T \mid N=n]$. Το "κομμάτι" $N=n$ μελετήθηκε, το T όμως δεν είναι κοντά σε αυτά που έχουμε (εμείς ξέρουμε απλώς ότι $X_i \sim Exp(\lambda)$), άρα το εκφράζουμε συναρτήσει των X_i.

Έχουμε:

$$E[\underbrace{T}_{\sum_{i=1}^{N} X_i} \mid N=n] = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N=n\right] \underset{\text{στο άθροισμα}}{\overset{\text{περνάμε την πληροφορία } N=n}{=\!=\!=}}$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \,\middle|\, \begin{matrix} X_1 \le t_0, X_2 \le t_0, \dots, \\ X_n \le t_0, X_{n+1} > t_0 \end{matrix}\right] \underset{\text{τιμής με πεπερασμένο άθροισμα}}{\overset{\text{εναλλαγή μέσης}}{=\!=\!=}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid \underbrace{X_i \le t_0}_{\substack{\text{μόνο αυτή χρειαζόμαστε,} \\ \text{όλες οι άλλες ανισώσεις είναι} \\ \text{non-πληροφορίες}}}] = n \cdot E[X_1 \mid X_1 \le t_0].$$

Θυμόμαστε (Μάθημα 1) ότι $E[X_1 \mid X_1 \le t_0] = \dfrac{E[X_1 \cdot 1_{\{X_1 \le t_0\}}]}{\Pr[X_1 \le t_0]} =$

[Υπενθύμιση: αν A ενδεχόμενο, τότε $E[X \mid A] = \dfrac{E[X \cdot 1_A]}{\Pr[A]}$]

$$= \frac{\int_0^\infty x \cdot 1_{\{x \le t_0\}} \cdot f_{X_1}(x)\,dx}{1-e^{-\lambda t_0}} = \frac{\int_0^{t_0} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx}{1-e^{-\lambda t_0}} \underset{\text{τη χτίζουμε}}{\overset{\text{η συνάρτηση στο ολοκλήρωμα θυμίζει σ.π.π. Gamma}(2,\lambda)}{=\!=\!=}}$$

$$= \frac{\int_0^{t_0} \frac{\lambda^2}{1!} x^{2-1} \cdot e^{-\lambda x}\,dx}{\lambda \cdot (1-e^{-\lambda t_0})} = \frac{\Pr[S_2 \le t_0]}{\lambda \cdot (1-e^{-\lambda t_0})}, \text{ όπου } S_2 \sim Erlang(2,\lambda).$$

Για τη σ.κ. της Erlang, χρησιμοποιούμε τεχνικές από σ.δ. Poisson:

$$\Pr[S_2 \le t_0] = \Pr[\underbrace{N(t_0)}_{\sim \text{Poisson}(\lambda t_0)} \ge 2] = 1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}$$ (πολύ ωραία ερμηνεία του γιατί η σ.κ. μιας Erlang είναι $1 - \sum_{n=0}^{k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$: σύνδεση Gamma με Poisson μέσω στοχαστικών διαδικασιών!)

Βρίσκουμε, λοιπόν, ότι $E[X_1 | X_1 \le t_0] = \dfrac{1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1 - e^{-\lambda t_0})}$.

Συνοψίζουμε τα μέχρι στιγμής "επιτεύγματά" μας:

$$\begin{cases} E[T] = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[N=n] \cdot E[T | N=n] & (1) \\ \Pr[N=n] = (1-e^{-\lambda t_0})^n e^{-\lambda t_0}, \quad n=0,1,\dots & (2) \\ E[T | N=n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i | X_i \le t_0] & (3) \\ E[X_1 | X_1 \le t_0] = \dfrac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda \cdot (1-e^{-\lambda t_0})} & (4) \end{cases}$$

Από τις (1), (2), (3), (4) παίρνουμε:

$$E[T] = \sum_{n=0}^{\infty} (1-e^{-\lambda t_0})^n e^{-\lambda t_0} \cdot n \cdot \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1-e^{-\lambda t_0})^{n-1} \cdot e^{-\lambda t_0} \cdot n \cdot (1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}) \cdot \frac{1}{\lambda} \right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}) \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1-e^{-\lambda t_0})^{n-1} \cdot e^{-\lambda t_0}}_{\text{μέση τιμή Geom}(e^{-\lambda t_0})} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{e^{-\lambda t_0}}.$$ Τελικά, $E[T] = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t_0} - 1 - \lambda t_0)$.

[Η άσκηση αυτή έγινε για να γίνουν σαφείς 3 δεξιότητες που πρέπει να έχουμε:

- μοντελοποίηση
- υπολογίζω πιθανότητες
- σωστό calculus: σειρές, ολοκληρώματα κλπ.

Να καταλάβουμε τη δύναμη του ανανεωτικού συλλογισμού: δεσμεύω κατάλληλα, η σ.δ. resetάρει και ούτω καθεξής → βλ. 2ος τρόπος]

2ος τρόπος (Με δέσμευση στον χρόνο διέλευσης του 1ου αυτοκινήτου):

Έστω X_1 ο χρόνος διέλευσης του 1ου αυτοκινήτου. Χρησιμοποιούμε ανανεωτικό συλλογισμό (βλ. Μαθήματα 6–9):

$$E[T] = \int_0^\infty E[T \mid X_1 = x] \cdot \underbrace{f_{X_1}(x)\,dx}_{} = \int_0^\infty E[T \mid X_1 = x] \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx,$$

η X_1 συνεχής, άρα το ολοκλήρωμα είναι Riemann αντί για Riemann Stieltjes

όπου

$$E[T \mid X_1 = x] = \begin{cases} 0, & x > t_0 \\ x + E[T], & x \le t_0 \end{cases}, \text{ άρα}$$

$$E[T] = \int_0^{t_0} (x + E[T])\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx \Rightarrow E[T] = \int_0^{t_0} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx + E[T] \cdot (1 - e^{-\lambda t_0}) \Rightarrow E[T] = \frac{\int_0^{t_0} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx}{e^{-\lambda t_0}} \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$E[T] = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda t_0} - 1 - \lambda t_0\right).$$ (πολύ πιο γρήγορη η λύση με τη θεμελιώδη ιδέα του ανανεωτικού συλλογισμού).

(Σχόλιο: Ο τύπος που είδαμε για το $E[T]$ λέει κάτι λίγο δραματικό: αν είμαι γρήγορος, τότε $E[T]$ μικρό. Όσο όμως πιο αργός είμαι, τότε περιμένω εκθετικά περισσότερο, όχι γραμμικά όπως πιστεύουν οι περισσότεροι άνθρωποι!)

② Άσκηση

Έστω $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$

Μέσος χρόνος πραγματοποίησης τελευταίου γεγονότος πριν τη χρονική στιγμή t $= E[S_{N(t)}] = ?$

Λύση:

αναμέναμε για μεγάλο t ο μέσος ενδιάμεσος χρόνος να είναι $\frac{1}{\lambda}$, γιατί αν βλέπαμε τη σ.δ. ανάποδα τότε θα λέγαμε ότι το επόμενο γεγονός συμβαίνει κατά μέσο $\frac{1}{\lambda}$ μετά. Εδώ θέλουμε πριν. Όμως η σ.δ. Poisson περιγράφει το εντελώς τυχαίο, άρα είναι το ίδιο να την κοιτάμε προς τα μπροστά ή ανάποδα

Σύμβαση: Αν δεν έχουν συμβεί γεγονότα ως τη στιγμή t, τότε ο χρόνος πραγματοποίησης τελευταίου γεγονότος είναι 0.

1ος τρόπος (δέσμευση στη $N(t)$):

Η ζητούμενη μέση τιμή είναι η $E[S_{N(t)}]$. Από Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής, παίρνουμε

$$E[S_{N(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} E[S_{N(t)} \mid N(t)=n] \cdot Pr[N(t)=n] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{E[S_n \mid N(t)=n]}_{\text{θυμίζει Θ. Campbell}} \cdot Pr[N(t)=n] \overset{\text{Θ. Campbell}}{=\!=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{E[U_{n:n}]}_{\frac{nt}{n+1}} \cdot Pr[N(t)=n], \text{ όπου } U_{n:n} \text{ είναι η}$$

(χωρίζουμε το $[0,t]$ σε $n+1$ κομμάτια άρα η $U_{n:n}$ πέφτει στο τελευταίο)

n-οστή διατεταγμένη από n το πλήθος ανεξάρτητες Uniform($[0,t]$), άρα

$$E[S_{N(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt}{n+1} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} =$$

(Εδώ τελειώνει το στοχαστικό κομμάτι και αρχίζει η 3η δεξιότητα: Calculus!)

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n+1=k}{=} \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

σπάμε τις σειρές γιατί συγκλίνουν και οι δύο

$$= \frac{1}{\lambda} \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}}_{E[\text{Poisson}(\lambda t)]} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}}_{1-e^{-\lambda t}} \Big) = t - \frac{1}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

[Ο τρόπος που πρέπει να μας έρχεται συχνά είναι ο ανανεωτικός συλλογισμός: Δέσμευση στο X_1. Εδώ δε βολεύει πολύ, αλλά πρέπει να τον σκεφτόμαστε(!)]

2ος τρόπος (Δέσμευση στο X_1):

$$E[S_{N(t)}] = \int_0^{\infty} E[S_{N(t)} \mid X_1 = x] \cdot f_{X_1}(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} E[S_{N(t)} \mid X_1 = x] \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx, \text{ όπου}$$

$$E[S_{N(t)} \mid X_1 = x] = \begin{cases} 0, & x > t \\ x + E[S_{N(t-x)}], & x \le t \end{cases}, \text{ άρα αν}$$

θέσουμε $h(t) = E[S_{N(t)}]$, σπάμε τα ολοκληρώματα και έχουμε:

$$h(t) = \int_t^{\infty} \cancel{0}\, dx + \int_0^t (x + h(t-x)) \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \underbrace{\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx}_{d(t)} + \underbrace{\int_0^t h(t-x) \lambda e^{-\lambda x} dx}_{(h * F)(t)},$$

οπότε έχουμε ανανεωτική εξίσωση με $d(t) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda t} dx \underset{\text{Άσκηση 1}}{=} \dfrac{1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}}{\lambda}$.

Η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης είναι $h(t) = d(t) + (d * m_X)(t)$,

άρα $$E[S_{N(t)}] = E[h(t)] = E\left[d(t) + (d * m_X)(t)\right].$$

Έχουμε ότι $(d * m_X)(t) = \int_0^t d(t-x)\, d\underbrace{m_X(x)}_{\lambda x \text{ (εδώ)}} = \int_0^t d(t-x)\cdot \lambda\, dx = \lambda \cdot \int_0^t d(u)\, du$,

οπότε $$E[S_{N(t)}] = \frac{1-e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}}{\lambda} + \lambda \cdot \int_0^t \frac{1-e^{-\lambda u} - \lambda u e^{-\lambda u}}{\lambda}\, du$$

$$\Rightarrow \ \dots \ \Rightarrow E[S_{N(t)}] = t - \frac{1}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

[6 βασικά εργαλεία στις σ.δ. Poisson:

- 3 ορισμοί
- 2 θεωρήματα: διάσπαση και υπέρθεση
- Θ. Campbell

Μετά από αυτά, είναι πάρα πολύ σημαντικό το κομμάτι της μοντελοποίησης (στοχαστικό), αλλά και αναλυτικές δεξιότητες (εμφανίζεται π.χ. συχνά το ολοκλήρωμα $\int_0^t x^n e^{-\lambda x} dx$ να χτίζουμε Gamma κλπ)]