14/3/19 Μάθημα 6

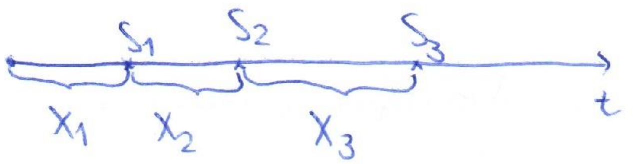
Σ.μ.Ε.Ε.

Ανανεωτική Θεωρία

Βασική Οριακή Θεωρία
Ανανεωτικός Συλλογισμός

Σιωπηλά, αποδεχτήκαμε μέχρι στιγμής ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι πεπερασμένες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.). Αν δεν απαιτήσουμε κάτι τέτοιο, πώς τροποποιείται η κατανομή του συνολικού πλήθους ανανεώσεων?

① Κατανομή "συνολικού" πλήθους ανανεώσεων



$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους X_i.

$$X_i : \underline{\Omega} \to [0,\infty) \cup \{\infty\} \quad \text{και} \quad F_X(x) = P_r[X_i \le x], \; x \in [0,\infty).$$

Θέτουμε $F_X(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = Pr[X_i < \infty]$. Τότε,

1] $F_X(\infty) = 1 \Rightarrow N(\infty) = \infty$ με πιθ. 1

[αν όλοι οι χρόνοι είναι $<\infty$, τότε σε άπειρο χρόνο θα έχουν γίνει άπειρα γεγονότα, δηλαδή $N(\infty)=\infty$]

2] $\underbrace{F_X(\infty) < 1}_{\text{δηλαδή υπάρχει θετική πιθ. να είναι άπειρος ο ενδιάμεσος χρόνος}} \Rightarrow Pr[N(\infty)=0] = 1 - F_X(\infty)$ και, γενικά,

$$P_r[N(\infty)=k] = \underbrace{(1-F_X(\infty))\cdot(F_X(\infty))^k}_{\text{για να έχουν συμβεί k-το πλήθος γεγονότα σε άπειρο χρόνο, θέλουμε k πεπερασμένους χρόνους και μετά άπειρο}}, \; k \ge 0$$

Μας ενδιαφέρει όμως περισσότερο η μελέτη του $\underline{\text{ρυθμού}}$ $\frac{N(t)}{t}$. Θα θυμηθούμε πρώτα τα δύο βασικά οριακά θεωρήματα από τις Πιθ. Ι: Κ.Ο.Θ. & Ι.Ν.Μ.Α.

② Οριακά Θεωρήματα στη Θεωρία Πιθανοτήτων

1] **ΝΜΑ** (Νόμος Μεγάλων Αριθμών)

Αν $X_n, n \geq 1$, ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E[X_n] = \mu$, τότε

$$\Pr\left[\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \mu\right] = 1$$

[ουσιαστικά, ο ΝΜΑ μας λέει ότι το θεωρητικό κατασκεύασμα που έχουμε ορίσει για τη μέση τιμή ανταποκρίνεται καλά στον εμπειρικό (δειγματικό) μέσο, αφού οριακά συμπίπτουν με πιθ. 1 (!)]

2] **Κ.Ο.Θ.** (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)

Αν $X_n, n \geq 1$, ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E[X_n] = \mu$ και $Var[X_n] = \sigma^2 < \infty$, τότε αν $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \leq x\right] = \Phi(x) \to \text{σ.κ. της } N(0,1)$$

[το Κ.Ο.Θ. αφορά αθροίσματα τ.μ.]

Επεκτείναμε αυτά τα Θεωρήματα και στην Ανανεωτική Θεωρία:

③ Βασικά Οριακά Θεωρήματα στην Ανανεωτική Θεωρία

Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους X_i με $E[X_i] = \mu < \infty$, $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$ [η ιδέα είναι ότι πίσω από την $\{N(t)\}$ κρύβεται η $\{S_n\}$, η οποία σχετίζεται με αθροίσματα τ.μ. ($S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$) και άρα φυσιολογικά εμπλέκεται το ΚΟΘ και ο ΝΜΑ!]

1] **ΝΜΑ:** $\Pr\left[\lim_{t\to\infty} \underbrace{\frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}}_{\text{αφού ο μέσος ενδιάμεσος χρόνος είναι } \mu \text{, ο ρυθμός αναμένεται να είναι } \frac{1}{\mu}}\right] = 1$ (δηλαδή $N(t) \simeq \frac{t}{\mu}$ για μεγάλα t)

2] **ΣΑΘ** (Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{\mu}$$

(μοιάζει λίγο με τον ΝΜΑ: η βασική ιδέα είναι "1 γεγονός κάθε m χρονικές μονάδες") [ο ΝΜΑ και το ΣΑΘ μοιάζουν λίγο, αλλά έχουν μία σημαντική διαφορική: διαφορετικά είδη σύγκλισης τ.μ. Στον ΝΜΑ έχουμε σύγκλιση με πιθ. 1, δηλαδή η προς μελέτη ιδιότητα ισχύει Pr-σχεδόν παντού σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$, άρα αρκεί ένα μόνο πείραμα για να πάρω αποτέλεσμα, ενώ στο ΣΑΘ θέλω πολλά!]

3] <u>Κ.Ο.Θ</u>:

$$\lim_{t\to\infty} Pr\left[\frac{N(t)-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \le x\right] \overset{\text{για πλήθος} \geq 30 \,\mu}{\doteq} \Phi(x)$$

[η ιδέα της απόδειξης είναι να χρησιμοποιούμε τη σχέση-γέφυρα $\{N(t) \le n\} = \{S_n \geq t\}$, να πηγαίνω το $N(t)$ στο S_n, το οποίο όμως είναι άθροισμα τ.μ. και το μελετάω με ΝΜΑ και ΚΟΘ για πιθανότητες!]

[Άρα, μέχρι στιγμής, 2 σημαντικές "κλάσεις" θεωρημάτων:

1 για τη συμπεριφορά της $N(\infty)$ (απειρισμός ή γεωμετρική) και

1 για την οριακή συμπεριφορά των ρυθμών $\frac{N(t)}{t}$ (ΝΜΑ, ΣΑΘ, ΚΟΘ)

④ <u>Ανανεωτικός Συλλογισμός</u> [Βασική ιδέα: αφού σε κάθε ανανέωση όλα ξεκινάνε από την αρχή, μπορείς να δεσμεύσεις στο 1ο βήμα και να χρησιμοποιήσεις αυτή την αναδρομικότητα]

<u>Ιδέα:</u> Να <u>δεσμεύσω στον S_1</u> για τον υπολογισμό $h(t) = E[f(N(t))]$ για τυχούσα f ή $Pr[N(t) \in A]$ για τυχόν A. $\rightsquigarrow$ Ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$

⑤ <u>Παράδειγμα 1: Η ανανεωτική εξίσωση για την $m_X(t) = E[N(t)]$</u>

Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $X_i \sim F_X(x)$ και $h(t) = m_X(t) = E[N(t)]$. Τότε, <u>δεσμεύοντας στον S_1</u>, έχουμε από <u>Θ.Δ.Μ.Τ.</u>:

$$m_X(t) = E[E[N(t)|S_1]] = \int_0^\infty E[N(t)|S_1=u]\,dF_{S_1}(u) \overset{S_1\sim F_X}{=\!=}$$

$= \int_0^\infty E[N(t)|S_1=u]\,dF_X(u)$. Όμως,

$$E[N(t)|S_1=u] = \begin{cases} 0, & u>t \\ 1+\underbrace{E[N(t-u)]}_{m_X(t-u)}, & u\le t \end{cases}$$

Άρα, σπάζοντας στα διαστήματα $[0,t]$ και $[t,\infty]$, έχουμε:

$$m_X(t) = \int_t^\infty \overbrace{\cancel{0\, dF_X(u)}}^{0} + \int_0^t (1+m_X(t-u))\, dF_X(u) \Rightarrow$$

$$m_X(t) = \int_0^t dF_X(u) + \int_0^t m_X(t-u)\, dF_X(u) = F_X(t) + (m_X * F_X)(t)$$

Η

$$\boxed{\underbrace{m_X(t)}_{\text{άγνωστη συνάρτηση}} = \underbrace{F_X(t)}_{\text{κάτι γνωστό}} + \underbrace{(m_X * F_X)(t)}_{\text{συνέλιξη της άγνωστης με τη γνωστή}}}$$

είναι η ανανεωτική εξίσωση για την $m_X(t)$

Βασική ιδέα του ανανεωτικού συλλογισμού: άγνωστη συνάρτηση = κάτι γνωστό + συνέλιξη της άγνωστης με τη γνωστή

6 Παράδειγμα 2: Η ανανεωτική εξίσωση για την $h(t) = E[(N(t))^2]$

[Θα δούμε ότι η διαδικασία είναι πάντα η ίδια, εκτός από το "κρίσιμο" σημείο $E[f(N(t))|S_1=u]$, που κάθε φορά θέλει άλλη προσέγγιση]

Βασική σχέση: για $u \le t$, $(N(t)|S_1=u) \overset{d}{=} 1 + N(t-u)$

χρησιμοποιούμε ότι τη στιγμή που συμβαίνει το 1ο γεγονός, η ανανεωτική διαδικασία αρχίζει από την αρχή

Όπως πριν,

$$h(t) = \int_0^\infty E\left[(N(t))^2 \,|\, S_1 = u\right] dF_X(u).$$

Όμως,

$$E\left[(N(t))^2 | S_1 = u\right] \overset{\text{κρίσιμο βήμα}}{=} \begin{cases} 0, & u > t \\ E\left[(1+N(t-u))^2\right], & u \le t \end{cases}$$

Όμως η $E\left[(1+N(t-u))^2\right]$ δε δίνει την αναδρομικότητα που θέλαμε (με την $m_X(t-u)$), άρα ανοίγουμε το τετράγωνο:

$$E\left[(1+N(t-u))^2\right] = 1 + 2E[N(t-u)] + E\left[(N(t-u))^2\right] =$$

$$= \overbrace{1 + 2m_X(t-u)}^{\text{γνωστά}} + \overbrace{h(t-u)}^{\text{άγνωστο}}$$

(θέλω πάντα να εμφανίζεται η h και στο αριστερό και στο δεξί μέλος)

Τώρα κάνουμε τα στάνταρ βήματα:

$$h(t) = \int_t^\infty \overbrace{\cancel{0\, dF_X(u)}}^{0} + \int_0^t (1 + 2m_X(t-u) + h(t-u))\, dF_X(u) =$$

$$= \int_0^t dF_X(u) + 2\int_0^t m_X(t-u)\, dF_X(u) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t) = \underbrace{F_X(t) + 2\int_0^t m_X(t-u)\,dF_X(u)}_{d(t)\ \text{(γνωστή)}} + \int_0^t h(t-u)\,dF_X(u)$$

$$\Rightarrow \underbrace{h(t)}_{\text{άγνωστη}} = \underbrace{d(t)}_{\text{γνωστή}} + (h * F_X)(t)$$, η ανανεωτική εξίσωση για την $h(t) = E[(N(t))^2]$.

7 Ανανεωτική εξίσωση - λύση

Ορ. Αν $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και $m_X(t) = E[N(t)]$ η ανανεωτική συνάρτηση, τότε μια εξίσωση

$$\underbrace{h(t)}_{\substack{\text{άγνωστη}\\ \text{συνάρτηση}}} = \underbrace{d(t)}_{\substack{\text{γνωστή}\\ \text{συνάρτηση}}} + \int_0^t h(t-u)\,d\underbrace{F_X(u)}_{\text{γνωστή σ.κ.}} = d(t) + (h * F_X)(t)$$

λέγεται ανανεωτική εξίσωση. [ο ανανεωτικός συλλογισμός οδηγεί σε ανανεωτικές εξισώσεις]

Θεώρημα Η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης $h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)\,dF_X(u)$ είναι

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\,dm_X(u) = d(t) + (d * m_X)(t).$$

[διώξαμε δηλαδή την άγνωστη h από το δεξί μέλος]

Πολύ καλό
[αποτέλεσμα: Μας ενδιαφέρει η Επιχειρησιακή Έρευνα, άρα κόστη-κέρδη σε περιοδικά φαινόμενα. Αυτά που υπολογίζω αφορούν είδαμε τη $N(t)$. Χρησιμοποιώντας τον ανανεωτικό συλλογισμό, θέλω να μπορώ να βρίσκω την $h(t)$. Η παραπάνω λύση δείχνει ότι χρειάζεται "απλώς" να ξέρω την ανανεωτική συνάρτηση $m_X(t)$]

Απόδειξη: $h(t) = d(t) + (h * F_X)(t) \xRightarrow[\text{L-S}]{\text{μετασχ.}} \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{h}(s)\cdot\tilde{F}_X(s)$

$$\Rightarrow \tilde{h}(s) = \frac{\tilde{d}(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} \Rightarrow \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s)\cdot\left(1 + \frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{F}(s)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s)\cdot(1+\tilde{m}_X(s)) \Rightarrow \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s)\tilde{m}_X(s) \xRightarrow[\text{μετασχ. L-S}]{\text{αντιστροφή}}$$

$$\Rightarrow h(t) = d(t) + (d * m_X)(t).$$

⑧ Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

$$\underbrace{m_X(t)}_{h} = \underbrace{F_X(t)}_{d} + (\underbrace{m_X}_{h} * F_X)(t) \overset{\text{λύση}}{\Longrightarrow} m_X(t) = F_X(t) + (F_X * m_X)(t),$$ άρα

η ανανεωτική εξίσωση δε δίνει τίποτα σε αυτή την περίπτωση (αφού $h(t) = m_X(t)$ εδώ). Παρ' όλα αυτά, δίνει μία επιπλέον μέθοδο υπολογισμού της $m(t)$, λύνοντας την ολοκληρωτική εξίσωση (την ανανεωτική εξίσωση) αντί για τη μετάβαση $F_X(t) \to \tilde{F}_X(s) \to \tilde{m}_X(s) \to m_X(t)$, που είχαμε δει (στο Μάθημα 5).

π.χ. έστω ότι $X \sim \text{Uniform}([0,1])$. $m_X(t) = ?$ για $t \in [0,1]$.

Εδώ, η κλασική προσέγγιση αποτυγχάνει:

$$F_X(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases} \Rightarrow \tilde{F}_X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dF_X(t) = \int_0^1 e^{-st} dt + 0 =$$

$$= \int_0^1 e^{-st} dt = \frac{1-e^{-s}}{s}, \text{ οπότε } \tilde{m}_X(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} = \frac{\frac{1-e^{-s}}{s}}{1-\frac{1-e^{-s}}{s}} =$$

$$= \frac{1-e^{-s}}{s-1+e^{-s}}$$ ⇝ πολύ δύσκολη αντιστροφή. Όμως, για $t \in [0,1]$ η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης δίνει: $m_X(t) = F_X(t) + (m_X * F_X)(t) \Rightarrow$

$$m_X(t) = t + \int_0^t m_X(t-u)\,du \overset{x=t-u}{\underset{dx=-du}{\Longrightarrow}} m_X(t) = t + \int_0^t m_X(x)\,dx \overset{d/dt}{\Longrightarrow} m_X'(t) = 1 + m_X(t)$$

$$\Leftrightarrow m_X'(t) - m_X(t) = 1 \overset{\cdot e^{-t}}{\Longrightarrow} e^{-t} \cdot m_X'(t) - e^{-t} \cdot m_X(t) = e^{-t} \Rightarrow (e^{-t} \cdot m_X(t))' = e^{-t} \Rightarrow$$

$$e^{-t} \cdot m_X(t) - e^{0} \cancel{m_X(0)}^{\,0} = \int_0^t e^{-u} du \Rightarrow e^{-t} \cdot m_X(t) = 1 - e^{-t} \Rightarrow m_X(t) = e^{t} - 1, \; 0 \le t \le 1.$$