ΣΜΕΕ 5/5/2017

Ανανεωτική Θεωρία - Ασκήσεις:

① Βασικές τεχνικές

1] Υπολογισμός ανανεωτικών συναρτήσεων

$\{N(t)\}$ αν. διαδ. με κατανομή ενδ. χρόνων $\sim G(x) \rightsquigarrow M(t)=E[N(t)]$

1η ιδέα: $M(t)=\sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$

(π.χ. για εκθετική)

2η ιδέα: $G(t) \longrightarrow \tilde{G}(s) \longrightarrow \tilde{M}(s)=\dfrac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \longrightarrow M(t)$

3η ιδέα: $M(t)=G(t)+\int_0^t M(t-u)\,dG(u)$

2] Υπολογισμός μακροπρόθεσμου μέσου κόστους/αμοιβής ανά χρονική μονάδα σε μοντέλο με ανανεωτική διαδικασία και δομή κόστους/αμοιβής

ΣΑΘΑ
- → Προσδιορισμός κατάλληλης ανανεωτικής διαδικασίας
- → Έλεγχος των υποθέσεων του ΣΑΘΑ
- → Υπολογισμός $E[X_n]$, $E[R_n]$

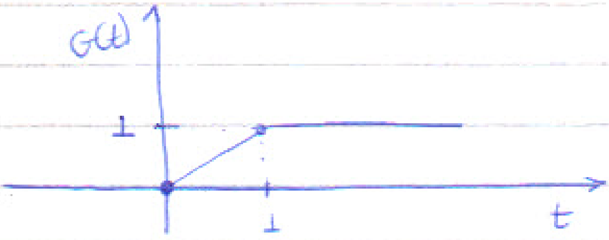
3] Υπολογισμός κατ., μέσων τιμών, κλπ σε μοντέλο με κατάλληλη ανανεωτική διαδικασία

ΣΑΘΑ, Ανανεωτική εξίσωση + λύση, ΒΑΘ

② Ασκ 1/Φυλ 6

$\{N(t)\}$ με $G(t) \sim Uniform([0,1])$

$$G(t) = \begin{cases} t & , 0 \le t \le 1 \\ 1 & , t > 1 \end{cases}$$



1η Ιδέα

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$$

↑ δύσκολα για φασιμορφή

2η Ιδέα

$$\tilde{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \, dG(t) = \int_0^1 e^{-st} \, dt = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \frac{1-e^{-s}}{s-1+e^{-s}} \quad \times$$

3η Ιδέα

$$M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-u)\, dG(u) \xRightarrow{0 \le t \le 1} M(t) = t + \int_0^t M(t-u)\, du$$

$$\xRightarrow{y=t-u} M(t) = t + \left(-\int_t^0 M(y)\, dy\right) \Longrightarrow M(t) = t + \int_0^t M(y)\, dy$$

$$\xRightarrow{d/dt} M'(t) = 1 + M(t) \quad , 0 \le t \le 1$$

$$M'(t) - M(t) = 1$$

$$e^{-t} M'(t) - e^{-t} M(t) = e^{-t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t} M(t)\right) = e^{-t}$$

$$e^{-t} M(t) - \cancel{e^{-0} M(0)}^{\,0} = \int_0^t e^{-u}\, du$$

$$e^{-t} M(t) = -e^{-u}\Big|_0^t = -e^{-t} + 1$$

$$M(t) = e^t - 1 \quad , 0 \le t \le 1$$

③ Ασκ 2/ Φυλ 6

④ Ασκ 3/ Φυλ 6

1η Ιδέα

$$G(t) = Erlang(r,\lambda) \Longrightarrow G^{*n}(t) \sim Erlang(nr,\lambda)$$

$$G^{*n}(t) = P(S_{nr} \le t) = P(N(t) \ge nr) = \sum_{i=nr}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

σε Poisson με ρυθμό λ

$$= 1 - \sum_{i=0}^{nr-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

$$\Longrightarrow M(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \sum_{i=0}^{nr-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right)$$

2η Ιδέα

$$G(t) \longrightarrow \tilde{G}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^r \Longrightarrow \tilde{M}(s) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^r}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^r} = \frac{\lambda^r}{(\lambda+s)^r - \lambda^r}$$

Η αναστροφή είναι δύσκολη

⑤ Ασκ 4/ Φυλ 6

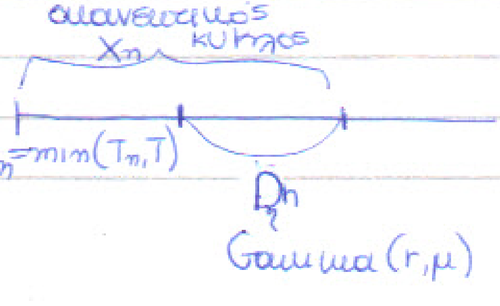
- $C(t)$ = Συνολικό κόστος αντικατάστασης τη στιγμή t

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[C(t)]}{t}$$ και βέλτιστο T;

Ανανεωτική διαδικασία → Γεγονότα: Αντικαταστάσεις

X_n = Χρόνος μεταξύ $(n-1)$-γεγονότος και n-γεγονότος

$$G_1(t) = P(U_n \le t) = P(\min(\overset{\sim Exp(\lambda)}{T_n}, T) \le t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & 0 \le t < T \\ 1, & T \le t \end{cases}$$



$X_n = U_n + D_n$, όπου $U_n \sim G_1(t)$

$$D_n \sim G_2(t) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^i}{i!}$$

• $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \underset{NMA}{=} \frac{1}{E[X_n]} = \frac{1}{E[U_n]+E[D_n]} = \frac{1}{\int_0^{\infty}(1-G_1(t))dt + \frac{r}{\mu}}$

$= \frac{1}{\int_0^{T} e^{-\lambda t}dt + \frac{r}{\mu}} = \frac{1}{\frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} + \frac{r}{\mu}}$

• $C(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} C_i$, όπου C_i : κόστος της i αντικατάστασης

$X_n = U_n + D_n$

$C_n = C_p \cdot P(T_n > T) + C_f\, P(T_n \leq T)$

$(X_n, C_n)_{n\geq 1} = \left(\min(T_n,T)+D_n\,,\ C_p\, P(T_n>T) + C_f\, P(T_n\leq T)\right)$ ανεξ + ισον.

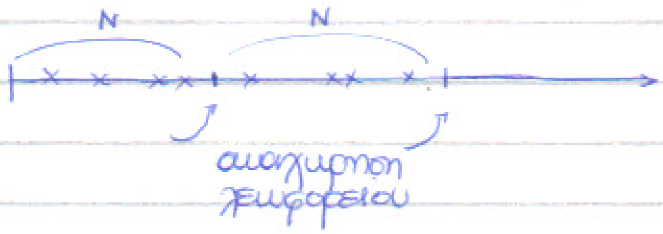
ΣΑΘΑ $\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C_n]}{E[X_n]}$

Είναι $E[X_n] = \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} + \frac{r}{\mu}$

$E[C_n] = C_p \cdot e^{-\lambda T} + C_f\left(1-e^{-\lambda T}\right)$

⑥ Ασκ 5/ Φυλ. 6

Επιβάτες φτάνουν με Poisson(λ) ανά λεπτό ≡ Poisson$\left(\frac{\lambda}{60}\right)$ ανά ώρα



Ενδιάμεσος χρόνος ~ Erlang(N,λ)

$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{E[\text{ενδιάμεσου χρόνου}]}$

$= \frac{1}{\frac{N}{\lambda/60}} = \frac{\lambda}{60N}$

(7) Ασκ 1 / Φυλ 7

$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $G(t)$

$E[X]=\mu$, $Var[X]=\sigma^2$, $M(t)=E[N(t)]$

$$\lim_{t\to\infty}\left(M(t)-\frac{t}{\mu}\right)= ;$$

$H(t)=M(t)-\frac{t}{\mu}$, $t\geq 0$

$$H(t)=M(t)-\frac{t}{\mu}=\int_0^\infty E[N(t)\mid X_1=u]\,dG(u)-\frac{t}{\mu}$$

$$E[N(t)\mid X_1=u]=\begin{cases}0 & , u>t\\ 1+E[N(t-u)], & u\leq t\end{cases}$$

άρα, $H(t)=\int_0^t 1+M(t-u)\,dG(u)-\frac{t}{\mu}=\int_0^t\left(1+H(t-u)+\frac{t-u}{\mu}\right)dG(u)-\frac{t}{\mu}$

$$=\int_0^t H(t-u)\,dG(u)+\underbrace{\int_0^t\left(1+\frac{t-u}{\mu}\right)dG(u)-\frac{t}{\mu}}_{D(t)}$$ ανανεωτική εξίσωση

$\lim_{t\to\infty} H(t)$. Θα εφαρμόσω το ΒΑΘ

$$D(t)=\frac{t}{\mu}G(t)+\int_0^t\left(1-\frac{u}{\mu}\right)dG(u)-\frac{t}{\mu}=\int_0^t\left(1-\frac{u}{\mu}\right)dG(u)-\frac{t}{\mu}\left(1-G(t)\right)$$

$$D'(t)=\left(1-\cancel{\frac{t}{\mu}}\right)g(t)-\frac{1-G(t)}{\mu}+\cancel{\frac{t\,g(t)}{\mu}}=\underbrace{g(t)}_{\geq 0}-\underbrace{\frac{1-G(t)}{\mu}}_{\geq 0}$$

$$D(t)=\int_0^t g(u)\,du-\int_0^t\frac{1-G(u)}{\mu}\,du=G(t)-G_e(t)$$ διαφορά ≥ 0 μονότονων και φραγμένων

$$=(1-G_e(t))-(1-G(t))$$

$$\int_0^\infty |D(t)|\, dt = \int_0^\infty |G(t) - G_e(t)|\, dt$$

! προσαμμώ συναρτηση επιβιωσης

$$\int_0^\infty |D(t)|\, dt = \int_0^\infty \left| (1 - G_e(t)) - (1 - G(t)) \right| dt \leq \int_0^\infty |1 - G_e(t)|\, dt$$

$$+ \int_0^\infty |1 - G(t)|\, dt < \infty$$

$$= \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu} + \mu < \infty$$

ΒΑΘ εφαρμόσιμο

$$\lim_{t \to \infty} \left(M(t) - \frac{t}{\mu} \right) = \lim_{t \to \infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)\, dt}{\mu} = \frac{\frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu} - \mu}{\mu} = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}$$

ΣΜΕΕ 10/3/2017

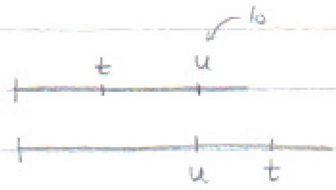
Ασκ. 2 / Φυλ. 7

X_1: χρόνος του 1ου γεγονότος

$$H(t) = E\left[N(t)(N(t)-1)\right] = \int_0^\infty E\left[N(t)(N(t)-1) \mid X_1 = u\right] dG(u)$$

ροπή 2ης τάξης της N(t)

$$E\left[\underbrace{N(t)(N(t)-1)}_{f(N(t)),\ f(x)=x-1} \mid X_1 = u\right] = \begin{cases} 0 & u > t \\ E\left[(1+N(t-u))N(t-u)\right] & u \le t \end{cases}$$



$$= E\left[(2 + N(t-u) - 1)N(t-u)\right] = 2M(t-u) + H(t-u)$$

$$(N(t) \mid X_1 = u) \overset{d}{=} 1 + N(t-u), \quad u \le t$$

$$H(t-u) = E\left[N(t-u)(N(t-u)-1)\right]$$

$$H(t) = \underbrace{2\int_0^t M(t-u)\, dG(u)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

$$D(t) = 2\int_0^t M(t-u)\, dG(u) = 2(M*G)(t)$$

Όμως, η ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση ανανέωσης είναι:

$$M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-u)\, dG(u) = G(t) + (M*G)(t)$$

$$\Rightarrow D(t) = 2\left(M(t) - G(t)\right)$$

Λύση ανάν. εξίσωσης

$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, dM(u)$$

$$= 2\left(M(t) - G(t)\right) + 2\int_0^t \left(M(t-u) - G(t-u)\right) dM(u)$$

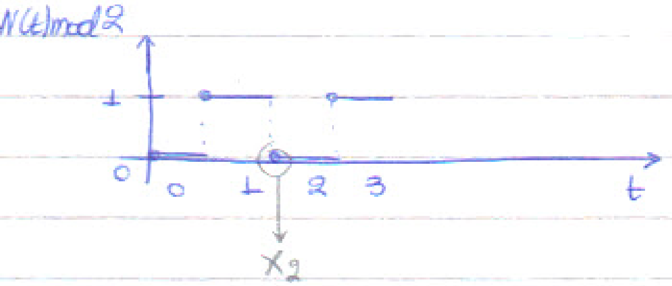
$$= \cancel{2M(t)} - 2G(t) + 2(M*M)(t) - \cancel{2(\underset{M(t)-G(t)}{G*M})(t)}$$

$$\Rightarrow E\left[N(t)(N(t)-1)\right] = 2(M*M)(t)$$

ιη) $\longrightarrow$ $H(t)=E[N(t)^2]=\int_0^t \underbrace{E\left[\left(1+N(t-u)\right)^2\right]}_{\text{ιδιότητες} \,\to\, \text{προσθαφαιρέσεις και } \mu(t-u)} dG(u)$

$1+2N(t-u)+N(t-u)^2$

② Ασκ. 3 / Φυλ. 7



όταν εναλλασσόμενη θα δεσμεύσω στο τέλος τη "κίνηση", δηλ. στο X_2

$\longrightarrow$ Αν δεσμεύσω ως προς X_1: $H(t)=\int_0^\infty P(N(t)\text{ περιττός}\,|\,X_1=u)\,dG(u)$

$$=\begin{cases} 0, & u>t \\ P(N(t-u)\text{ άρτιος}) \overset{\|}{=} 1-H(t-u), & u\le t \end{cases}$$

$(N(t)\,|\,X_1=u)\overset{d}{=}1+N(t-u)\,,\ u\le t$

άρα: $H(t)=\int_0^t dG(u) - \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$

καταστρέφει την ανανεωτική εξίσωση

α)

Η σωστή ανανεωτική διαδικασία για να πάρω ανανεωτική εξίσωση έχει χρόνους γεγονότων $S_1=X_1+X_2$

$S_2=X_1+X_2+X_3+X_4$ ...

Τότε $H(t)=P(N(t)\text{ περιττός})=\int_0^\infty P(N(t)\text{ περ}\,|\,S_1=u)\,dG_{S_1}(u)$

$P(N(t)\text{ περιττός}\,|\,S_1=u)=\begin{cases} P(X_1\le t\,|\,X_1+X_2=u), & u>t \\ H(t-u), & u\le t \end{cases}$

$$H(t)=\underbrace{\int_t^\infty P(X_1\le t\,|\,X_1+X_2=u)\,dG^{*2}(u)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$

$$D(t)=\int_t^{\infty} P(X_1 \le t \mid X_1+X_2=u)\, dG^{*2}(u) = P(X_1 \le t,\ X_1+X_2 > t) =$$

$$= P(X_1 \le t < X_1+X_2) = P(X_1 \le t) - P(X_1+X_2 \le t) = G(t) - G^{*2}(t)$$

$$H(t) = G(t) - G^{*2}(t) + \int_0^t H(t-u)\, dG^{*2}(u)$$

$$\Longrightarrow H(t) = D(t) + \int_0^{\infty} D(t-u)\, dM_{G^{*2}}(u).$$

β) Αν $N(t)$ Poisson :

$P(N(t)$ περιττός$)$ με πιθανογεννήτρια στο 1 και -1, κτλ.

Αλλιώς, $D(t) = (1-e^{-\lambda t}) - (1-e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}) = \lambda t e^{-\lambda t}$

$M_{G^{*2}}(t)$: η ανανεωτική συνάρτηση και αντιστοιχεί σε Erlang$(2,\lambda)$

$$\hookrightarrow \tilde{M}_{G^{*2}}(s) = \frac{\tilde{G}^{*2}(s)}{1-\tilde{G}^{*2}(s)} \xrightarrow{\text{αντιστροφή}} M_{G^{*2}}(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}(1-e^{-2\lambda t})$$

$$\text{Άρα, } H(t) = \lambda t e^{-\lambda t} + \int_0^t \lambda(t-u) e^{-\lambda(t-u)} \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} e^{-2\lambda u}\right) du = \dots$$

γ) $H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$

$D(t) = G(t) - G^{*2}(t) = \underbrace{(1-G^{*2}(t)) - (1-G(t))}_{\text{διαφ. μη αρνητικών, φθινουσών}}$

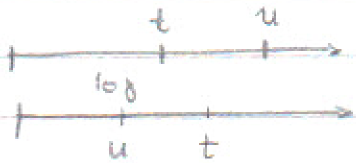
και $\displaystyle\int_0^{\infty} |D(t)|\,dt \le \int_0^{\infty} (1-G^{*2}(t))\,dt + \int_0^{\infty} (1-G(t))\,dt = 3\mu < \infty$, όπου $\mu = E[X_1]$

$$\text{ΒΑΘ} \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^{\infty} D(t)\,dt}{E[S_1]} = \frac{\int_0^{\infty}(1-G^{*2}(t))\,dt - \int_0^{\infty}(1-G(t))\,dt}{E[S_1]} = \frac{2\mu-\mu}{2\mu} = \frac{1}{2}$$

③ Ασκ 4 / Φυλ. 7

a) $H(t) = E[A(t)B(t)] = \int_0^\infty E[A(t)B(t) \mid S_1 = u]\, dG(u)$

$$E[A(t)B(t) \mid S_1 = u] = \begin{cases} t(u-t) & u > t \\ H(t-u) & u \le t \end{cases}$$



∇ $(A(t) \mid X_1 = u) \overset{d}{=} A(t-u)$
$(B(t) \mid X_1 = u) \overset{d}{=} B(t-u)$ $u \le t$

$$H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

$$= \int_t^\infty t(u-t)\, dG(u) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

∇ $\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} g(u,t)\, du$

$$\text{ΒΑΘ} \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)\, dt}{\mu_1'}$$

$$\int_0^\infty D(t)\, dt = \int_0^\infty \int_t^\infty t(u-t)\, dG(u)\, dt = \int_0^\infty \int_0^u \overset{ut - t^2}{t(u-t)}\, dt\, dG(u)$$

$0 < t < u < \infty$

$u\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \Big|_0^u$

$$= \int_0^\infty \Big(\underbrace{\frac{u^3}{2} - \frac{u^3}{3}}_{= \frac{u^3}{6}} \Big)\, dG(u) = \frac{1}{6} \int_0^\infty u^3\, dG(u) = \frac{\mu_3'}{6}$$

Άρα, $\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\mu_3'}{6\mu_1'}$

④ Ανανεωτικό Θεώρημα Blackwell

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με αναν. συνάρτηση $M(t)=E[N(t)]$ και μέσους ενδιάμεσους χρόνους $\mu<\infty$ και συνεχή κατανομή ενδ. χρόνων τότε

$\forall h$

$$\lim_{t\to\infty}\Big(\underbrace{M(t)-M(t-h)}_{H(t)}\Big)=\frac{h}{\mu}$$

Απόδ. Έστω $H(t)=M(t)-M(t-h)$, $t\geq h$

$$=\int_{t-h}^{t} dM(u)$$

Πρέπει να βρω $D(t)=\begin{cases}1, & 0\leq t<h\\ 0, & t\geq h\end{cases}$

Έχω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΒΑΘ ($D(t)$: ↘, ≥ 0, φραγμένη) και $\int_0^\infty |D(t)|\,dt=\int_0^\infty D(t)\,dt=\int_0^h dt=h$

$$\text{ΒΑΘ} \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} H(t)=\frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\mu}=\frac{h}{\mu}$$

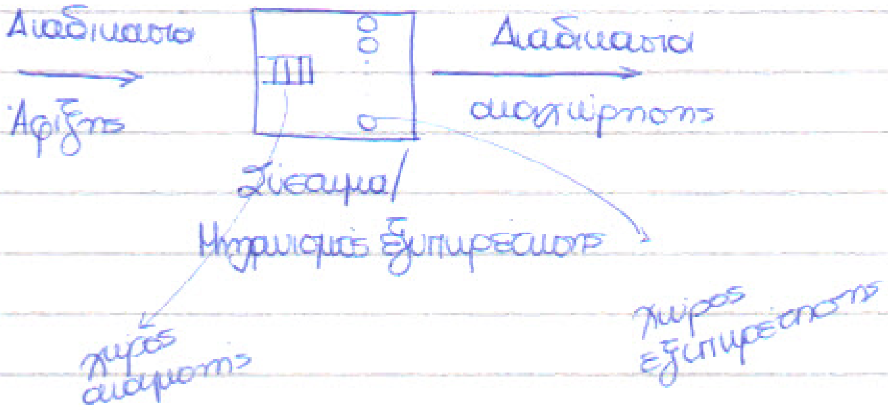
ΣΜΕΕ 12/5/2017

Εισαγωγή στις Ουρές Αναμονής

① Πλαίσιο

Σύστημα εξυπηρέτησης - Ουρά (Queueing System - Queue)

Σύστημα εισόδων-εξόδων, διακριτές μονάδες, στοχαστικός χαρακτήρας



② Ονοματολογία / Συμβολισμός Kendall

Erlang (1909) ⟶ Αρχή Θεωρίας Ουρών

Kendall ⟶ Ονοματολογία

A / B / c / k ( )

- A → Διαδικασία αφίξεων
- B → Χρόνος εξυπηρέτησης
- c → Αριθμός παράλληλων υπηρετών
- k → Χωρητικότητα (# πελατών σε εξυπηρέτηση + # πελατών σε αναμονή)
- ( ) → Πειθαρχία ("first-come, first-served" FCFS / "first-in-first-out" FIFO, first-come-last-served LCFS ή LIFO, π.χ. "shortest-service-time-first" SSTF, "service-in-random-order" SIRO)

A: M (Markovian/Memoryless) Poisson διαδικασία αφίξεων

D (Deterministic) Σταθεροί ενδιάμεσοι χρόνοι

GI/G (General Independent) Ανανεωτική διαδικασία

E_k (Erlang-k) Ανανεωτική διαδικασία με Erlang(k, ·)

Ομοίως το B

Αν το k παραλειφθεί, σημαίνει ότι $k \to \infty$

Αν το ( ) —//— , —//— ( ): FCFS

③ Παράδειγμα $M/GI/1 \longrightarrow$ Poisson διαδ. αφίξεων
Γενικοί και ανεξ. χρόνοι εξυπηρέτησης
1 υπηρέτης
∞ χωρητικότητα
FCFS πειθαρχία

$D/E_2/1/8$ (SIRO) Ντετ. διαδ. αφίξεων
Ανεξ. Erlang $(2,\cdot)$ χρ. εξυπ.
1 υπηρ.
7 θέσεις αναμονής
SIRO πειθαρχία

④ Δεδομένα συστημάτων εξυπηρέτησης
① Τύπος κατά Kendall
② Κατανομή ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων
③ Κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης

a: μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων ή (το ελάχιστο που χρειάζεται ανά για ②)
$\lambda = \frac{1}{a}$: ρυθμός αφίξεων

b: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης ή (—— // —— για ③)
$\mu = \frac{1}{b}$: ρυθμός εξυπηρέτησης

⑤ Οι 3 Οπτικές
- Διαχειριστής
- Πελάτες
- Υπηρέτης

⑥ Μέτρα Απόδοσης

$Q(t) = \#$ πελατών τη στιγμή t
$Q_q(t) =$ —— // —— σε αναμονή
$Q_s(t) =$ —— // —— σε εξυπηρέτηση

ενδιαφέρουν κυρίως το διαχειριστή

S_n (sojourn) = χρόνος παραμονής του nοστού πελάτη
W_n (waiting) = —//— αναμονής ——//——
X_n = —//— εξυπηρέτησης ——//——
A_n (arrival) = —//— άφιξης ——//——
D_n (departure) = —//— αναχώρησης ——//——

$Q_n^- = Q(A_n^-) =$ # πελατών που βλέπει η nοστή άφιξη

$Q_n^+ = Q(D_n^+) =$ # πελατών που αφήνει η nοστή αναχώρηση

εξαιρείται ο πελάτης

$S_n = W_n + X_n$ χρόνος του πελάτη

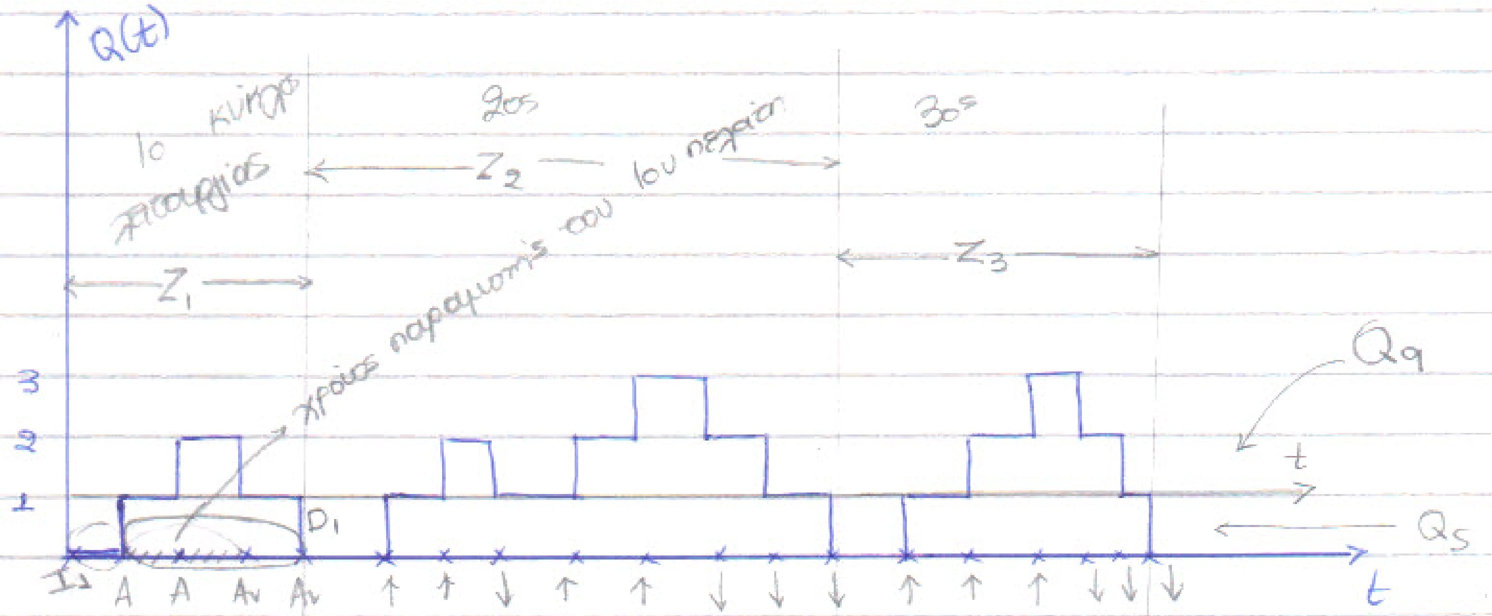
$S_n = D_n - A_n$

Z_n = διάρκεια nοστού κύκλου λειτουργίας (από στιγμή αναχώρησης που αφήνει άδειο σύστημα μέχρι την επόμενη τέτοια στιγμή)

περίοδος αργίας − περίοδος λειτουργίας

I_n = περίοδος nοστής αργίας

Y_n = περίοδος nοστής συνεχόμενης λειτουργίας



καθε φορά που ανεβαίνει έχω άφιξη και καθε φορά που κατεβαίνει αναχώρηση

⑦ Οριακή κατανομή αριθμού πελατών

Διαίσθηση: Πιθ. j πελάτες στο σύστημα μια τυχαία χρονική στιγμή

$$P_j = \lim_{t\to\infty} P\big(Q(t)=j\big)$$: οριακή πιθανότητα "αριθμός πελατών = j" (αφήνω το σύστημα να "ισορροπήσει")

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1\{Q(u)=j\}\,du}{t}$$: μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου με # πελατών = j

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t P\big(Q(u)=j\big)\,du}{t}$$

Οριακή πιθ. "# πελατών = j" αν η στιγμή επιλέγεται ομοιόμορφα

$$\lim_{t\to\infty} P\big(Q(T)=j\big), \quad T\sim Uniform([0,t])$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty P\big(Q(T)=j \mid T=u\big) f_T(u)\,du$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_0^t P\big(Q(T)=j \mid T=u\big) \frac{1}{t}\,du$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t P\big(Q(u)=j\big)\,du}{t}$$

Είναι ίσα όταν $\{Q(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία.

⑧ Οριακός μέσος αριθμός πελατών

Διαίσθηση: Μέσος # πελατών σε τυχαία χρονική στιγμή

$$E[Q] = \sum_{j=0}^{\infty} j\,P_j = \lim_{t\to\infty} E\big[Q(t)\big]$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)\,du}{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t E\big[Q(u)\big]\,du}{t}$$

⑨ Οριακή κατανομή χρόνου παραμονής

Διαίσθηση: Πιθ. ένας τυχαίος πελάτης να έχει χρόνο παραμονής $\leq x$

$$F_S(x) = P(S \leq x) = \lim_{n \to \infty} P(S_n \leq x)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} 1\{S_n \geq x\}}{n}$$ μακρ. ποσοστό πελατών με χρ. αναμ. $\leq x$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} P(S_n \leq x)}{n}$$

⑩ Οριακός μέσος χρόνος παραμονής

$$E[S] = \int_0^\infty x \, dF_S(x) = \lim_{n \to \infty} E[S_n]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} E[S_i]}{n}$$

Υπό την προϋπόθεση $Q(t)$ αναγεννητική