ΣΜΕΕ 26/4/2017

Ανανεωτική Θεωρία: Τα 3 βασικά εργαλεία

① Στοχαστικές Ανανεωτικό Θεώρημα με Αμοιβές (ΣΑΘΑ)

$\{N(t)\}$ ανανε. διαδ. με χρόνους γεγον. $S_1, S_2, \dots$

$\{R(t)\}$ διαδ. "αμοιβών"

ώστε $\{(X_n, R_n)\}_{n\geq 1}$, όπου $X_n = S_n - S_{n-1}$ και $R_n = R(S_n) - R(S_{n-1})$

είναι ανεξ. + ισον., τότε $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_1]}{E[X_1]} = \frac{r}{\mu}$

② Ανανεωτική εξίσωση

Ανανεωτικές εξισώσεις ικανοποιούν δεσμεύοντας στον S_1 σε στοχαστικά φαινόμενα με αναγεννητικό χαρακτήρα (ανανεωτικός συλλογισμός)

$\{N(t)\}$ ανανε. διαδ. με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \dots \sim G(x)$ και $M_G(t)=E[N(t)]$ η ανανεωτική συνάρτηση

Η ανανεωτική εξίσωση
$$\underbrace{H(t)}_{\text{άγνωστη συνάρτηση}} = \underbrace{D(t)}_{\text{γνωστή συνάρτηση}} + \int_0^t H(t-u)\,d\underbrace{G(u)}_{\text{γνωστή σ.κ.}}$$

$$H(t) = D(t) + (H*G)(t)$$

③ Παρ. 1 - Ανανεωτική εξίσωση για την $M_G(t)$

Έστω ότι θέλω να μελετήσω την $H(t) = E[N(t)]$ για $\{N(t)\}$ ανανε. διαδ.

$$H(t) = \int_0^\infty E[N(t)\mid S_1=u]\,dG(u) = \int_0^t [1+H(t-u)]\,dG(u) = G(t) + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$

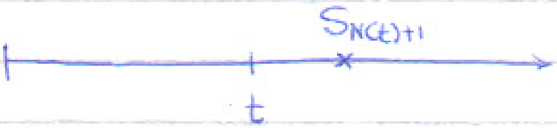
ανανεωτική εξίσωση με $D(t)=G(t)$

$$E[N(t)\mid S_1=u] = \begin{cases} 0, & u>t \\ 1+\underbrace{E[N(t-u)]}_{=H(t-u)}, & u\leq t \end{cases}$$

④ Παρ. 2 - Ανανεωτική εξίσωση για την $E[S_{N(t)+1}]$

$$H(t) = E\left[S_{N(t)+1}\right]$$

↑ ο χρόνος που θα συμβεί το πρώτο γεγονός μετά τη χρονική στιγμή t



$$H(t) = \int_0^\infty E\left[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u\right] dG(u)$$

$$E\left[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u\right] = \begin{cases} u, & u > t \\ u + \underbrace{E\left[S_{N(t-u)+1}\right]}_{= H(t-u)}, & u \le t \end{cases}$$

$$H(t) = \underbrace{\int_0^\infty u \, dG(u)}_{= \mu} + \int_0^t H(t-u) \, dG(u)$$ ανανεωτική εξίσωση με $D(t) = \mu$

∇ 1ος τρόπος: $\boxed{u \le t}$ θα αναφέρεται στο $H(t-u)$ / 2ος τρόπος: $\boxed{u > t}$ στο $D(t)$

⑤ Λύση ανανεωτικής εξίσωσης

Ανάν. εξίσωση: $H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u) \, dG(u) = D(t) + (H * G)(t)$

Λύση: $H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u) \, dM_G(u) = D(t) + (D * M_G)(t)$

Αποδ: $H(t) = D(t) + (H*G)(t) \xRightarrow{L-S} \tilde{H}(s) = \tilde{D}(s) + \tilde{H}(s)\tilde{G}(s) \Rightarrow \tilde{H}(s) = \tilde{D}(s) \dfrac{1}{1 - \tilde{G}(s)}$

∇

Όμως $\tilde{M}_G(s) = \dfrac{\tilde{G}(s)}{1 - \tilde{G}(s)}$

Άρα, $\tilde{H}(s) = \tilde{D}(s)\left(1 + \dfrac{\tilde{G}(s)}{1 - \tilde{G}(s)}\right) = \tilde{D}(s) + \tilde{D}(s)\tilde{M}_G(s) \Longrightarrow H(t) = D(t) + (D * M_G)(t)$

⑥ Ερμηνεία ανανεωτικής εξίσωσης – λύσης

$H(t)$: συνολική επίδραση μετά από χρόνο t από όλα τα γεγονότα
$D(t)$: επίδραση μετά από χρόνο t από 1 γεγονός

Αναν. Εξίσωση: $H(t)=D(t)+\int_0^t H(t-u)\,dG(u)$

συνολική επίδραση τη στιγμή t — επίδραση από το γεγονός στο S_1 — επίδραση από τα γεγονότα $S_1, S_2, \dots$ μέχρι τη στιγμή t

Λύση: $H(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t D(t-u)\,dG_{S_n}(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t D(t-u)\,dG^{*n}(u) \Longrightarrow$

επίδραση από γεγονός S_n

$\Longrightarrow H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-u)\,dH_G(u)$, όπου $H_G(t)=\sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$

⑦ Οριακή λύση Ανανεωτικής Εξίσωσης — Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα (ΒΑΘ)

$H(t)=D(t)+\int_0^t H(t-u)\,dG(u)$

Λύση: $H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-u)\,dH_G(u)$

$\lim_{t\to\infty} H(t) = ;$

ΒΑΘ: Αν η $D(t)$ γράφεται ως ① διαφορά μη αρνητικών ② μονότονων φραγμένων συναρτήσεων και ③ $\int_0^{\infty} |D(t)| < \infty$ και ④ $G(t)$ απεριοδική (δηλ. η αντίστοιχη τμ X_i δεν

π.χ. όχι διαιρείται σε {1,2,3,...} ξ όπως Bin, Poisson
Εδώ συνεχείς

...διαιρεί τιμές σε κάποιο dN)

τότε $\lim_{t\to\infty} H(t) = \dfrac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{E[X_i] \rightarrow \mu}$

⑧ Διαισθητική απόδειξη

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \lim_{t\to\infty}\left[D(t) + \int_0^t D(t-u)\,dM_G(u)\right] = \cancel{\lim_{t\to\infty} D(t)}^{\,0 \text{ λόγω } \int |D(t)|dt<\infty} + \lim_{t\to\infty}\int_0^t D(t-u)\,dM_G(u)$$

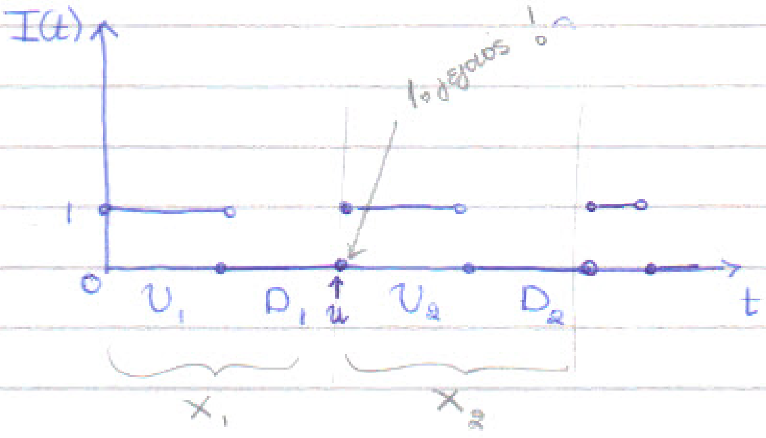
∇ $M_G(u) \simeq \dfrac{u}{\mu}$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_0^t D(t-u)\,\frac{du}{\mu} = \frac{1}{\mu}\lim_{t\to\infty}\int_{0 \to t}^{t \to 0} D(\underbrace{t-u}_{x})\,\underbrace{du}_{-dx} = \frac{1}{\mu}\lim_{t\to\infty}\int_0^t D(x)\,dx$$

$x = t-u$

$$= \frac{\int_0^\infty D(x)\,dx}{\mu}$$

⑨ Εφαρμογή: Εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία



Μηχανή και εναλλάσσεται μεταξύ περιόδων λειτ(U), αργία (D)

$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν η μηχανή λειτουργεί} \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

(U_n, D_n) ανεξ. ισον $\sim G_{U,D}(t,s)$

$E[U_n] = \mu_U$, $E[D_n] = \mu_D$

1] Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου λειτουργίας μηχανής

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t I(u)\,du\right]}{t}$$ ← ΣΛΘΑ

2] Π.Θ. λειτουργίας της μηχανής τη στιγμή $t = P(I(t)=1) \longleftarrow$ Αναν. Εξ + Λύση

3] Οριακή π.θ. λειτουργίας της μηχανής $= \lim_{t\to\infty} P(I(t)=1) \longleftarrow$ ΒΑΘ

1] Ορίζω διαδικασία αμοιβής $R(t) = \int_0^t I(u)\,du$

ανανεωτικός κύκλος

Έχουμε $(X_n, R_n) = (U_n + D_n, U_n)$ ανεξ. ισον (αφού και τα αρχικά (U_n, D_n) ανεξ. ισον)

ΣΑΘΑ είναι εφαρμόσιμο: $\lim_{t\to\infty} \frac{E[R_n]}{t} = \frac{E[R_1]}{E[X_1]} = \frac{E[U]}{E[U]+E[D]} = \frac{\mu_U}{\mu_U+\mu_D}$

2] $H(t) = P(I(t)=1) = \int_0^\infty P(I(t)=1 \mid X_1 = u)\, dG_{U+D}(u)$

$$P(I(t)=1 \mid X_1=u) = \begin{cases} P(U_1 > t \mid U_1+D_1 = u) & u > t \\ P(I(t-u)=1) = H(t-u) & u \le t \end{cases}$$

Άρα, $H(t) = \underbrace{\int_t^\infty P(U_1 > t \mid U_1+D_1 = u)\, dG_{U+D}(u)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$

$$D(t) = \int_t^\infty P(U_1 > t \mid U_1 + D_1 = u)\, dG(u) = \int_t^\infty P(U_1 > t \mid U_1+D_1 = u)\, \underbrace{g_{U_1+D_1}(u)}_{\text{σππ της } U_1+D_1}\, du$$

! $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

$$= \int_t^\infty P(U_1 > t, U_1+D_1 = u)\, g_{U_1+D_1}(u)\, du = P(U_1 > t, U_1 + D_1 > t) =$$

$$= P(U_1 > t) = 1 - G_U(t)$$

ΣΜΕΕ 28/4/2017

Συνέχεια....

Άρα, $H(t) = \underbrace{1 - G_U(t)}_{D(t)} + (H*G)(t)$

Λύση: $H(t) = 1 - G_U(t) + \underbrace{\int_0^t (1-G_U)(t-u)\, dM_G(u)}_{(D*M_G)(t)}$

3] $\lim_{t\to\infty} P\left(I(t)=1\right)$

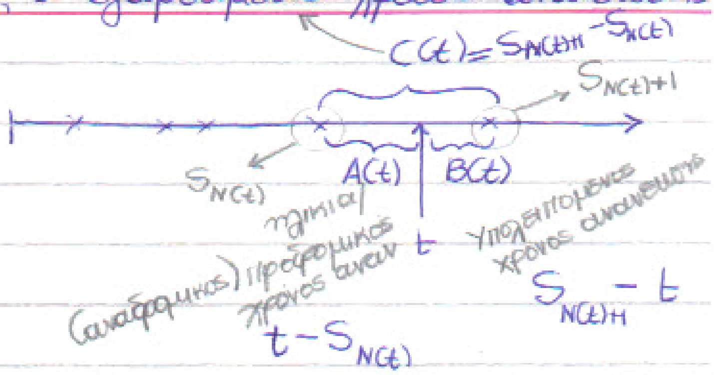
- $G(t)$ απεριοδική (υποθ: $G_{U,D}(t,s)$ συνεχής)
- $D(t) = 1 - G_U(t) \geq 0$, φραγμένη, μονότονη
- $\int_0^\infty |D(t)|\,dt \overset{\text{αφού } D\geq 0}{=} \int_0^\infty (1-G_U(t))\,dt = E[U] = \mu_U < \infty$

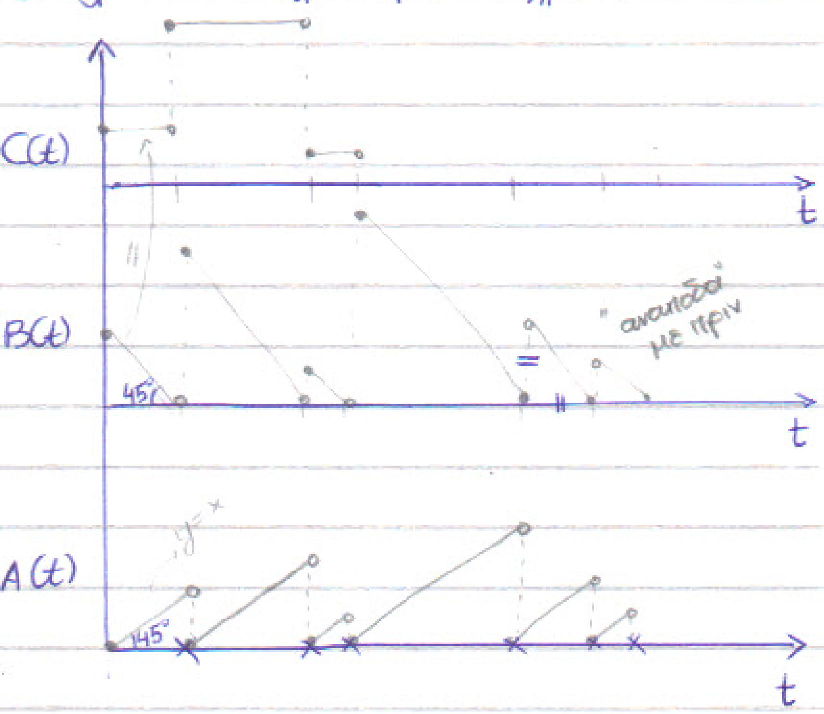
Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΒΑΘ.

ΒΑΘ: $\lim_{t\to\infty} P\left(I(t)=1\right) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\mu} = \frac{\mu_U}{\mu_U+\mu_D}$

! Σας εφαρμογές, όπου το ① και το ③ ερώτημα θα δίνουν ίδιο αποτέλεσμα

3) Ηλικία, Υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης, t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης





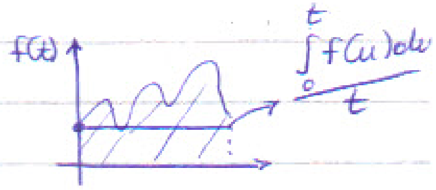
④ Υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης – Μέση τιμή

$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με χρ. γεγονότων $S_1, S_2, \dots$, ενδιάμεσους χρ. $X_1, X_2, \dots \sim G$ με $E[X_1^r]=\mu_r$

$B(t)= S_{N(t)+1} - t$

1] $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t B(u)du\right]}{t}$

μακροπρόθεσμος μέσος όρος της $\{B(t)\}$



2] $E[B(t)]=;$

3] $\lim\limits_{t\to\infty} E[B(t)]=;$

Λύση

1] Ορίζω $R(t)=\int_0^t B(u)du$

(X_n, R_n);

$R_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} B(u)du = \dfrac{X_n^2}{2}$ (εμβαδόν του τριγώνου)

Άρα $(X_n, R_n) = \left(X_n, \dfrac{X_n^2}{2}\right)$ ανεξ. ισον. $n\geq 1$

ΣΑΘΑ: $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t B(u)du\right]}{t} = \dfrac{E[R_1]}{E[X_1]} = \dfrac{\mu_2}{2\mu_1}$

2] $H(t)=E[B(t)] = \int_0^\infty E[B(t)\mid X_1=u]\, dG(u)$

$$E[B(t)\mid X_1=u] = \begin{cases} u-t & u>t \\ \underbrace{E[B(t-u)]}_{H(t-u)} & u\leq t \end{cases}$$

$$H(t) = \underbrace{\int_t^{\infty} (u-t)\, dG(u)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

αλλάζω σειρά στα ολοκληρώματα

$$D(t) = \int_t^{\infty} (u-t)\, dG(u) = \int_t^{\infty} \int_0^{u-t} dx\, dG(u) = \int_0^{\infty} \int_{t+x}^{\infty} dG(u)\, dx$$

$t<u$
$0<x<u-t$

$$= \int_0^{\infty} \big(1 - G(t+x)\big)\, dx \overset{y=t+x}{=\!=} \int_t^{\infty} \big(1 - G(y)\big)\, dy$$

Άρα, $E[B(t)] = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, dH_G(u)$

3] $G(t)$ απεριοδική

$$D(t) = \int_t^{\infty} (1 - G(y))\, dy \geq 0 \text{ μονότονη, φραγμένη}$$

αφού η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει είναι για $t=0$
τότε $D(t) < \infty$ $D(0) = \mu = E[X]$

και $\int_0^{\infty} |D(t)|\, dt \overset{\geq 0}{=} \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} (1 - G(y))\, dy\, dt = \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} \int_y^{\infty} dG(u)\, dy\, dt$

$1 - G(y) = \int_y^{\infty} dG(u)$

$0 < t < \infty$
$0 < y < \infty$
$y < u < \infty$

$\Big\}\ 0 < t < y < u$

$\frac{u^2}{2}$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{u} \int_0^{y} dt\, dy\, dG(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^2\, dG(u) = \frac{1}{2} E[X^2] = \frac{\mu_2}{2} < \infty$$

ΒΑΘ: $\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \dfrac{\frac{\mu_2}{2}}{\mu_1} = \dfrac{\mu_2}{2\mu_1}$

⑤ Το ανανεωτικό παράδοξο

$$\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{E[X^2]}{2E[X]} = \frac{(E[X])^2 + V[X]}{2E[X]} = \frac{E[X]}{2} + \frac{V[X]}{2E[X]}$$

Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης $\geq$ $\dfrac{\text{Μέσος ενδιάμεσος χρόνος}}{2}$

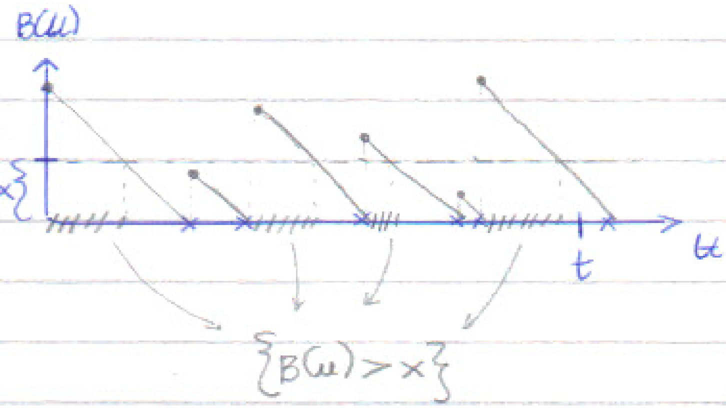
ΣΗΕΕ 3/5/2017

④ Μελέτη της "κατανομής" της $\{B(t)\}$

Επικεντρωνόμαστε στο $\{B(t) > x\}$ για συγκεκριμένο x

1) $$\lim_{t\to\infty} \frac{E\begin{bmatrix}\text{Χρόνος στο } [0,t] \\ \text{που } B(u)>x\end{bmatrix}}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t \mathbb{1}\{B(u)>x\}\,du\right]}{t}$$

Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου που ο υπολειπόμενος χρόνος αναμονής είναι $> x$



2) $P(B(t)>x) = ;$

3) $\lim_{t\to\infty} P(B(t)>x) = ;$

Υπολογισμοί:

1) Θέτω $R(t) = \int_0^t \mathbb{1}\{B(u)>x\}\,du$

$$R_n = \text{χρόνος στο } (S_{n-1}, S_n] \text{ που } B(u)>x = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \mathbb{1}\{B(u)>x\}\,du = \begin{cases} X_n - x & \text{αν } X_n - x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$= \max(X_n - x, 0) = (X_n - x)^+$$

$(X_n, R_n) = ((X_n - x)^+, R_n)$ ανεξ. ισον. $n \geq 1$

ΖΑΘΑ $\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t 1\{B(u)>x\}du\right]}{t} = \lim_{t\to\infty}\dfrac{E[R(t)]}{t} = \dfrac{E[R_1]}{E[X_1]}$

$$= \frac{E\left[(X_1-x)^+\right]}{E[X_1]}$$

$$E\left[(X_1-x)^+\right] = \int_0^\infty P\left((X_1-x)^+>u\right)du = \int_0^\infty P\left(\max(X_1-x, 0)>u\right)du$$

$$= \int_0^\infty P(X_1-x>u)\,du = \int_0^\infty P(X_1>u+x)\,du \underset{dy=du}{\overset{y=u+x}{=\!=}} \int_x^\infty P(X_1>y)\,dy$$

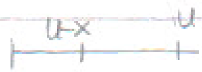
$$= \int_x^\infty (1-G(y))\,dy$$

Άρα, $\lim_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t 1\{B(u)>x\}du\right]}{t} = \dfrac{\int_x^\infty (1-G(y))\,dy}{\mu}$

2) Έστω $H(t)=P(B(t)>x)$. Δεσμεύω στον X_1.

$$H(t)=\int_0^\infty P\left(B(t)>x \mid X_1=u\right)dG(u)$$

$$P\left(B(t)>x \mid X_1=u\right) = \begin{cases} P(B(t-u)>x) = H(t-u), & u\le t \\ & \cancel{u>t} \\ 0, & u-x\le t<u \\ 1, & t<u-x \end{cases}$$



$$H(t) = \int_{x+t}^\infty dG(u) + \int_0^t H(t-u)\,dG(u) = \underbrace{1-G(x+t)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$

Λύση: $P(B(t)>x) = H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\,dM_G(u) = 1-G(x+t) + \int_0^t \big(1-G(x+t-u)\big)\,dM_G(u)$

3) • G συνεχής $\Rightarrow$ απεριοδική

• $D(t)=1-G(x+t) \geq 0$, φραγμένη, $\downarrow$

• $\int_0^\infty |D(t)|\,dt = \int_0^\infty D(t)\,dt = \int_0^\infty \big(1-G(t+x)\big)\,dt \overset{}{\underset{t+x=y}{=\!=}} \int_x^\infty \big(1-G(y)\big)\,dy \leq \int_0^\infty \big(1-G(y)\big)\,dy = \mu < \infty$

$$\text{ΒΑΘ} \Rightarrow P(B(t)>x) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\mu} = \frac{\int_x^\infty \big(1-G(y)\big)\,dy}{\mu}$$

5) Πόρισμα:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1\{B(u)\leq x\}\,du\right]}{t} = \lim_{t\to\infty} P(B(t)\leq x)$$

$$= 1 - \frac{\int_x^\infty \big(1-G(y)\big)\,dy}{\mu} \overset{\text{σημειωμα } x,\ \mu.\tau}{=} \underbrace{\frac{\int_0^x \big(1-G(y)\big)\,dy}{\mu}}_{G_e(x)} \longleftarrow \text{Κατανομή ισορροπίας της } G$$

Διαισθητικά: $G(x) \longrightarrow G_e(x)$

Κατανομή ενδιάμεσων χρόνων ανανεώσεων $\longrightarrow$ Κατανομή υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης

6) Χαρακτηριστικά της $G_e(x)$

Έστω $G(x)$ σκ με $E[X]=\mu$, $Var[X]=\sigma^2$, μετασχηματισμό LS $\tilde{G}(s)$ και $G_e(x)$ η αντίστοιχη κατανομή ισορροπίας

$$G_e(x) = \frac{\int_0^x (1-G(y))dy}{\mu}, \quad x \geq 0$$

σπ: $g_e(x) = \frac{1-G(x)}{\mu}, \quad x \geq 0$

$$E[X_e] = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}$$

μετασχηματισμός L-S: $\frac{1-\tilde{G}(s)}{\mu s}$

↳ Αποδ: $\tilde{G}_e(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG_e(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-sx}(1-G(x))dx$

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-sx}\int_x^\infty dG(y)\, dx = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \underbrace{\int_0^y e^{-sx}dx}_{\frac{1-e^{-sy}}{s}}\, dG(y)$$

$0<x<y$

$$= \frac{1}{\mu s}\left(\int_0^\infty dG(y) - \int_0^\infty e^{-sy}dG(y)\right)$$

$$= \frac{1}{\mu s}\left(1-\tilde{G}(s)\right)$$

(7) Κλασικά ζεύγη $G(x)$, $G_e(x)$

$G(x)$	$G_e(x)$
• Σταθερή $= c$ $G(x) = \begin{cases} 0, & x<c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$	Uniform $([0,c])$ $g_e(x) = \frac{1}{c}, \quad 0 \leq x \leq c$
• Exp(λ)	Exp(λ)
• Erlang (2, λ)	Μίξη Exp(λ), Erlang (2, λ) με πιθ ½ κ' ½

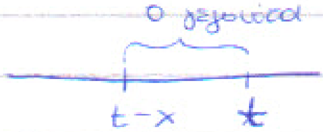
⑧ Μελέτη του $A(t)$

$$\lim_{t\to\infty} E[A(t)] = ;\ \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}$$

τα ίδια με τα αντίστοιχα της $B(t)$

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t)\le x) = ;\ \frac{\int_0^x (1-G(y))\,dy}{\mu}$$

∇ $\{A(t)>x\}$

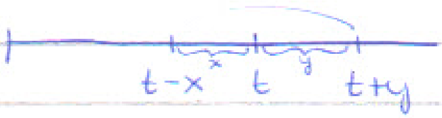


$=\{$όχι ανανεώσιμα γεγονότα στο $(t-x,t)\} = \{B(t-x)>x\}$

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t)>x) = \lim_{t\to\infty} P\big(B(t-x)>x\big) = \lim_{y\to\infty} P\big(B(y)>x\big) = \frac{\int_x^\infty (1-G(y))\,dy}{\mu}$$

⑨ Μελέτη του $(A(t), B(t))$

$P(A(t)>x,\ B(t)>y) = P($όχι ανανεώσιμα γεγονότα στο $t-x,\ t+y$ $)$



$$= P\big(B(t-x)>x+y\big)$$

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t)>x,\ B(t)>y) = \lim_{t\to\infty} P\big(B(t-x)>x+y\big) = \lim_{s\to\infty} P\big(B(s)>x+y\big)$$

$$= \frac{\int_{x+y}^\infty (1-G(u))\,du}{\mu}$$

∇ Για $G \sim Exp$, τότε $A(t)$ και $B(t)$ ανεξ.

⑩ Μελέτη του $C(t)$

Έχω $C(t) = A(t) + B(t)$

$$\lim_{t \to \infty} E\left[C(t)\right] = 2\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}\right) = \mu + \frac{\sigma^2}{\mu}$$