ΣΜΕΕ 29/3/2017

① Ασκ. 5 / Φυλ. 4

Ηλεκτρικές διαταραχές τύπου $i \to$ σ.δ. Poisson λ_i, $i=1,2,\dots,k$

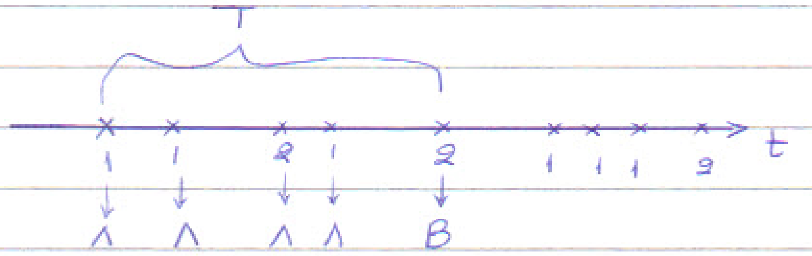
η διατ. $i \longrightarrow$ βλάβη με πιθ. p_i

T: χρόνος ζωής

S: τύπος διαταραχής που προκαλεί τη βλάβη

Έστω $N_i(t) =$ # ηλεκτρικών διαταραχών τύπου i στο $(0,t]$, $i=1,\dots,k$

$\sim$ Poisson$(\lambda_i t)$



διάσπαση

$N_{iB}(t) =$ # ηλ. διαταραχών τύπου i που προκαλούν βλάβη στο $(0,t]$

$\{N_{iB}(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda_i p_i$, $i=1,2,\dots,k$

Αν $N_B(t) = \sum_{i=1}^{k} N_{iB}(t) =$ # διαταραχών που προκαλούν βλάβη στο $(0,t]$

υπέρθεση

$\{N_B(t)\}$ σδ Poisson ρυθμού $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j$

T: χρόνος του 1ου γεγονότος της $\{N_B(t)\}$

S: τύπος

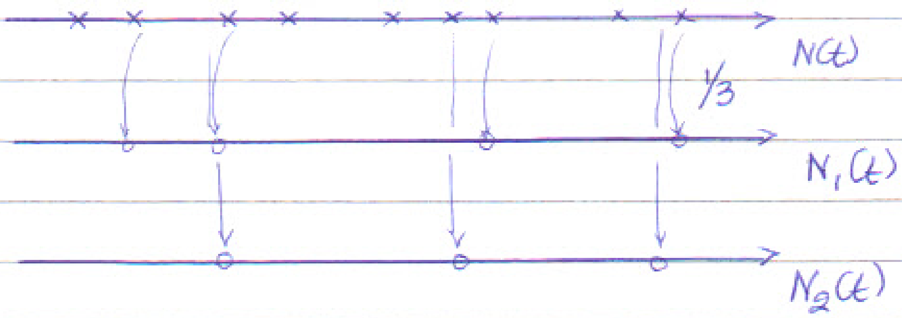
$$P(T>t, S=i) \underset{\text{υπέρθεσης}}{\overset{\theta}{=}} P(T>t)P(S=i) = e^{-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j p_j \cdot t} \frac{\lambda_i p_i}{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j p_j}$$

② Ασκ 6 / Φυλ. 4

$\{N(t)\}$ σδ Poisson ρυθμού λ

$N_1(t) =$ # γεγον. καταγεγραμμένων της $\{N(t)\}$ στο $(0,t]$

$N_2(t) =$ # γεγον. της $\{N(t)\}$ στο $(0,t]$ με δείκτη πολ. του 3



τυχαίος μηχανισμός

ντετερμινιστικά

a) Είναι η $\{N_1(t)\}$ σ.δ. Poisson; ΝΑΙ (θεώρημα διάσπασης ρυθμού $\frac{\lambda}{3}$)
Είναι η $\{N_2(t)\}$ σδ Poisson; ΟΧΙ διότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων είναι ανεξ. αλλά $\sim$ Erlang$(3,\lambda)$ και όχι κάποια εκθετική

β) $P(N_1(t)=3 \mid N_2(t)=1) = P(N_1(t)=3 \mid N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5) =$

$$= \frac{P(N_1(t)=3,\ N(t)\in\{3,4,5\})}{P(N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5)} = \frac{\sum_{i=3}^{5} P(N_1(t)=3,\ N(t)=i)}{P(N(t)\in\{3,4,5\})} = \frac{P(N(t)=i)P(N_1(t)=3 \mid N(t)=i)}{} =$$

έχουν γίνει 3 επιλ. και έχουν όλα κατέβει

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda t}}\frac{(\lambda t)^3}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cancel{e^{-\lambda t}}\frac{(\lambda t)^4}{4!}\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{2}{3} + \cancel{e^{-\lambda t}}\frac{(\lambda t)^5}{5!}\binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\cancel{e^{-\lambda t}}\left(\frac{(\lambda t)^3}{3!} + \frac{(\lambda t)^4}{4!}\ \frac{(\lambda t)^5}{5!}\right)}$$

③ Ασκ. 2/ Φυλ. 5

$N(t) \sim \text{Poisson}(\Lambda(t))$, $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du = \int_0^t \lambda u\,du = \frac{\lambda t^2}{2}$

$E[N(t)] = \Lambda(t) = \frac{\lambda t^2}{2}$

$$E[S_1] = \int_0^\infty P(S_1>t)\,dt = \int_0^\infty P(N(t)=0)\,dt = \int_0^\infty e^{-\Lambda(t)}\,dt = \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda t^2}{2}}\,dt$$

$$\overset{\sqrt{\lambda}t=u}{=\!=} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

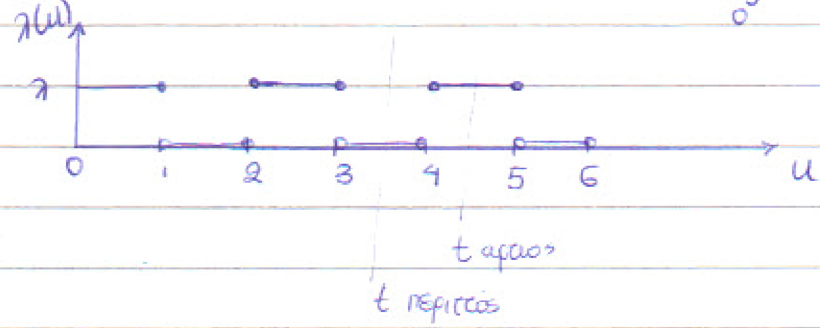
! $X \sim N(0,1)$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$ $\quad \sim \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(4) Ασκ 3/Φυλ 5

$\{N(t)\}$ μη ομογενής Poisson με $\lambda(t)=\begin{cases}\lambda, & t\in[0,1]\cup[2,3]\cup[4,5]\cup\ldots\\ 0, & t\in(1,2)\cup(3,4)\cup(5,6)\cup\ldots\end{cases}$

α) $P(S_1\le x)=$; β) $P(N(t)=n)=$;

$\{N(t)\}$ οδ. Poisson $(\Lambda(t))$ είναι $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)\,du=\begin{cases}\left(\frac{[t]}{2}+t-[t]\right)\cdot\lambda = \lambda\left(t-\frac{[t]}{2}\right), & [t] \text{ άρτιος}\\ \left[\frac{t+1}{2}\right]\cdot\lambda, & [t] \text{ περιττός}\end{cases}$



$P(S_1\le x)=P(N(x)\ge 1)=1-P(N(x)=0)=1-e^{-\Lambda(x)}$

$P(N(t)=n)=e^{-\Lambda(t)}\dfrac{(\Lambda(t))^n}{n!}, \quad n=0,1,\ldots$

γ) $E[S_1\,|\,N(t)=n]$, $t\in[0,2]$

Για $t\in[0,1]$ το Θ Campbell είναι άμεσα εφαρμόσιμο, αφού η $\{N(t)\}$ είναι οδ Poisson στο $[0,t]$ με ρυθμό λ

$E[S_1\,|\,N(t)=n]=E[U_{1:n}]=\dfrac{t}{n+1}$

Ενώ για $t\in(1,2]$ εφαρμόζω το Θ. Campbell προσέχοντας ότι η $\{N(s)\}$ είναι οδ Poisson ρυθμού λ στο $[0,1]$ και στο $(1,t)$ δεν συμβαίνουν γεγονότα

$E[S_1\,|\,N(t)=n]=E[S_1\,|\,N(1)=n]\overset{\text{Campbell}}{=}\dfrac{1}{n+1}$

⑤ Ασκ 4 / Φυλ 5

$\{N(t)\}$ αδ Poisson ρυθμού λ $\quad$! $P_{N(t)}(z) = e^{-\lambda t(1-z)}$

$Z_1, Z_2, \ldots$ ανεξ. της $\{N(t)\}$ ακέραιες ≥ 0

$p_j = P(Z_n = j)$, $j \geq 0$ και $P_Z(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j$, $E[Z_n] = \mu_Z$, $Var[Z_n] = \sigma_Z^2$

$Z(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Z_n$ σύνθετη διαδικασία Poisson

β) $P_{Z(t)}(z) = P_{N(t)}(P_Z(z)) = e^{-\lambda t(1-P_Z(z))}$

α) $E[Z(t)] = P'_{Z(t)}(1) = \frac{d}{dz}\left(P_{Z(t)}(z)\right)\Big|_{z=1} = \lambda t \left(\frac{d}{dz} P_Z(z)\right) e^{-\lambda t(1-P_Z(z))}\Big|_{z=1}$

$= \lambda t \mu_Z$

$V[Z(t)] = \ldots$

γ) $r_0 = P_{Z(t)}(0) = e^{-\lambda t(1-P_Z(0))} = e^{-\lambda t(1-p_0)}$

$P_{Z(t)}(z) = e^{-\lambda t(1-P_Z(z))}$

$\Downarrow$ παρ. ως προς z

$P'_{Z(t)}(z) = \lambda t \, P'_Z(z) \, P_{Z(t)}(z)$

$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k r_k z^{k-1} = \lambda t \sum_{j=0}^{\infty} j p_j z^{j-1} \sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k$

πολ. $(\cdot z)$

$\Longrightarrow$

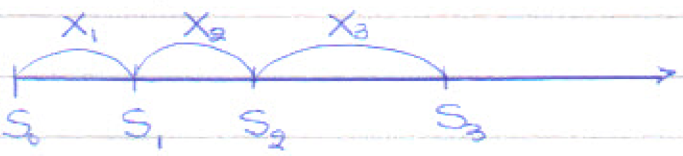
ΣΜΕΕ 31/3/2017

Ανανεωτική Θεωρία

Βασικοί Υπολογισμοί

1) Ορισμός $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ+ισον μη αρνητικές τμ. με σκ $G(x)$

$$S_0 = 0$$
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$



Η $\{S_n : n \geq 0\}$ λέγεται ανανεωτική ακολουθία και η $\{N(t)\}$ με $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\} = \#$ γεγονότων στο $(0,t]$ λέγεται (απαριθμητική) ανανεωτική διαδικασία

2) Βασικές ιδιότητες

-Κατανομή χρόνου ν-οστού γεγονότος

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_n \leq x\right) = P(X_1 + \cdots + X_n \leq x) = (G * G * \cdots * G)(x)$$
$$= G^{*n}(x)$$

συνέλιξη σ.κ

όπου αν X, Y ανεξ. με $G_X(x), G_Y(y)$ τότε $(G_X * G_Y)(t) = P(X+Y \leq t)$

Αναλυτικά $(G_X * G_Y)(t) \underset{\text{δεσμεύω ως προς } X \text{ ή } Y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X+y \leq t)\, g_Y(y)\,dy$

κανονικά είναι $P(X+y \leq t \mid Y=y) \underset{X,Y \text{ ανεξ.}}{=} P(X+y \leq t)$

αν X, Y συνεχείς με πυκνότητες $g_X(x), g_Y(y)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq t-y)\, g_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(t-y)\, g_Y(y)\,dy$$

Για διακριτές: $(G_X * G_Y)(t) = \sum_y F_X(t-y)P(Y=y)$

- Κατανομή πλήθους γεγονότων στο $(0,t]$

$t \geq 0$,

$$p_n(t) = P(N(t)=n) = P(S_n \leq t < S_{n+1}) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) =$$

$$= \boxed{G^{*n}(t) - G^{*(n+1)}(t)}, \quad n \geq 0$$

με τη σύμβαση $G^{*0}(t) = 1$

- Ανανεωτική συνάρτηση $M(t) = E[N(t)]$

$$E[N(t)] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1\{S_n \leq t\}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[1\{S_n \leq t\}] = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t) =$$

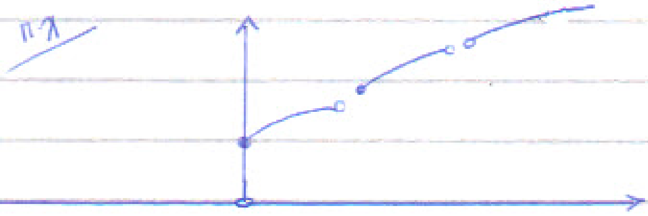
$$= \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)}$$

Άρα,
$$\left.\begin{aligned} &- F_{S_n}(t) = G^{*n}(t) \\ &- p_n(t) = P(N(t)=n) = G^{*n}(t) - G^{*(n+1)}(t) \\ &- M(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t) \end{aligned}\right\} \text{!}$$

③ Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

Αν $F(t)$ δεξιά συνεχής, αύξουσα και έχει αριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας, έστω $\{x_1, x_2, \dots\}$, $x_1 < x_2 < \dots$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$

π.χ.



(Γενικά δεν η ιδιότητα $F(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 1$)

Τότε αν $g(t)$ συνεχής,

$$\underbrace{\int_a^b g(t)\,dF(t)}_{\text{ολοκλήρωμα R-S}} = \int_a^b g(t) F'(t)\,dt + \sum_{x_i \in [a,b]} g(x_i) \cdot \big(F(x_i) - F(x_i-)\big)$$

Υπό αυτόν τον συμβολισμό:

$$(G_X * G_Y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(t-y)\, dG_Y(y)$$

Επίσης, μετασχηματισμός L-S μια τμ $X \geq 0$

$$\tilde{G}_X(s) = E\left[e^{-sX}\right] = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-sx} \underbrace{f_X(x)dx}_{\sigma\pi\pi}, & X \text{ συνεχής} \\ \sum_x e^{-sx} \underbrace{p_X(x)}_{\sigma\pi}, & X \text{ διακριτή} \end{cases}$$

$$\overset{\text{ορισμ. R-S}}{=} \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dG_X(x)$$

Επίσης, αν X τμ με σκ $G_X(t)$: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dG_X(x)$

4) Μετασχηματισμοί L-S των βασικών ποσοτήτων !

- $$\tilde{F}_{S_n}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, d\underbrace{F_{S_n}(x)}_{G^{*n}(x)} = \left(\tilde{G}(s)\right)^n$$

- $$\tilde{p}_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dp_n(t) = \left(\tilde{G}(s)\right)^n - \left(\tilde{G}(s)\right)^{n+1}$$

- $$\tilde{M}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dM(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{G}(s)\right)^n = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

5) Διαδικασία υπολογισμού των $F_{S_n}(x)$, $p_n(t)$, $M(t)$ με βάση μετασχηματισμούς L-S

1ο βήμα: Υπολογισμός της $\tilde{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dG(x)$

2ο βήμα: —//— των $\tilde{F}_{S_n}(s)$, $\tilde{p}_n(s)$, $\tilde{M}(s)$

3ο βήμα: Αντιστροφή του μετασχηματισμού

Συνάρτηση	Μετασχηματισμός	τμ.
• $\underbrace{F(t)=1}_{=a}$, $t\geq 0$	$\underbrace{\tilde{F}(s)=1}_{=a}$	$X=0$ με πιθ 1
• $F(t)=t$, $t\geq 0$	$\tilde{F}(s)=\frac{1}{s}$	—
• $F(t)=e^{-\lambda t}$, $t\geq 0$	$\tilde{F}(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}$	$X\sim Exp(\lambda)$
• $F(t)=\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$ $P(S_n\leq t)=P(N(t)\geq n)$	$\tilde{F}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$	$X\sim Erlang(n,\lambda)$
• $F_Z(t)=(F_X * F_Y)(t)$	$\tilde{F}_Z(s)=\tilde{F}_X(s)\tilde{F}_Y(s)$	$Z=X+Y$
• $F_Z(t)=\sum_{i=1}^{n} p_i F_{X_i}(t)$	$\tilde{F}_Z(s)=\sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{F}_{X_i}(s)$	$Z=\begin{cases} X_1, & \text{με πιθ } p_1 \\ X_2, & \text{με πιθ } p_2 \\ \vdots & \vdots \\ X_n, & \text{με πιθ } p_n \end{cases}$

⑥ Παράδειγμα I: Βασικοί Υπολογισμοί για $G(x)\sim Exp(\lambda)$

$G(x)=1-e^{-\lambda x}$, $x\geq 0$

1ο βήμα $\quad \tilde{G}(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx}\, dG(x)=\frac{\lambda}{\lambda+s}$

2ο βήμα $\quad \tilde{F}_{S_n}(s)=\left(\tilde{G}(s)\right)^n=\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$

$$\tilde{p}_n(s)=\left(\tilde{G}(s)\right)^n-\left(\tilde{G}(s)\right)^{n+1}=\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{n+1}$$

$$\tilde{M}(s)=\frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda}{\lambda+s}}=\frac{\lambda}{s}$$

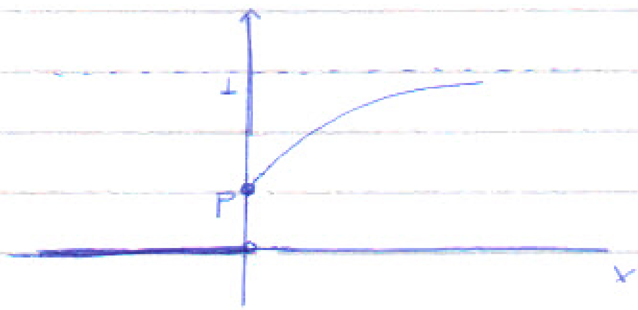
3ο βημα $\quad F_{S_n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$M(t) = \lambda t$$

(7) Παραδειγμα ΙΙ: Βασικοι Υπολογισμοι

$$X = \begin{cases} 0, & \text{με πιθ } p \\ Exp(\lambda), & \text{με πιθ } 1-p \end{cases}$$



$$G(x) = p \cdot 1 + (1-p)(1-e^{-\lambda x}), \quad x \geq 0$$

1ο βημα: $\quad \tilde{G}(x) = p + (1-p)\frac{\lambda}{\lambda+s}$

$$= \frac{\lambda + ps}{\lambda + s}$$

2ο βημα: $\quad \tilde{F}_{S_n}(s) = \left(\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}\right)^n$

$$\tilde{p}_n(s) = \left(\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}\right)^n - \left(\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}\right)^{n+1}$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}}{1 - \frac{\lambda+ps}{\lambda+s}}$$

3ο βημα: Αντιστροφη

$$\tilde{F}_{S_n}(s) = \left(\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}\right)^n \overset{\text{διαιρεση}}{=} \left(p + \frac{\lambda(1-p)}{s+\lambda}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda(1-p)}{s+\lambda}\right)^i p^{n-i} =$$

$$\begin{array}{r|l} ps+\lambda & s+\lambda \\ \hline -ps-\lambda p & p \\ \hline \lambda(1-p) & \end{array}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-p)^i p^{n-i} \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^i$$

Άρα, $F_{S_n}(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-p)^i p^{n-i} \sum_{k=i}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

Ομοίως, για την $p_n(t)$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\lambda+ps / \lambda+s}{1-\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}} = \frac{\lambda+ps}{(1-p)s} = \frac{p}{1-p}\cdot 1 + \frac{\lambda}{1-p}\,\frac{1}{s}$$

Άρα, $M(t) = \frac{p}{1-p} + \frac{\lambda}{1-p}\cdot t$

(8) Παράδειγμα III Βασικοί Υπολογισμοί

$$X = \begin{cases} Exp(\lambda), & \text{με πιθ } p \\ Exp(\mu), & \text{με πιθ } 1-p \end{cases}$$

$$G(x) = p\left(1-e^{-\lambda x}\right) + (1-p)\left(1-e^{-\mu x}\right)$$

$$\tilde{G}(s) = p\,\frac{\lambda}{\lambda+s} + (1-p)\frac{\mu}{\mu+s} = \frac{p\lambda(\mu+s) + (1-p)\mu(\lambda+s)}{(\lambda+s)(\mu+s)}$$

$$\tilde{F}_{S_n}(s) = \sum_{i=0}^{n} p^i (1-p)^{n-i} \underbrace{F_{i,n-i}(t)}_{\int_0^\infty F_X(t-y)\,dF_Y(y)}$$

σκ Erlang (i, λ) σκ Erlang $(n-i, \mu)$

αυτό μας ενδιαφέρει

Για την ανανεωτική συνάρτηση $\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \dfrac{\dfrac{\lambda\mu + (p\lambda+(1-p)\mu)s}{(\lambda+s)(\mu+s)}}{\dfrac{\lambda\mu + (\lambda+\mu)s + s^2 - \lambda\mu - (p\lambda+(1-p)\mu)s}{(\lambda+s)(\mu+s)}}$

$$= \frac{\lambda\mu + (p\lambda+(1-p)\mu)s}{s\left(s+\lambda+\mu-\lambda p-\mu(1-p)\right)} = \frac{\lambda\mu + (p\lambda+(1-p)\mu)s}{s\left(s+\lambda(1-p)+\mu p\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\lambda(1-p)+\mu p}$$

$$= A\cdot\frac{1}{s} + \frac{B}{\lambda(1-p)+\mu p}\cdot\frac{\lambda(1-p)+\mu p}{s+\lambda(1-p)+\mu p}$$

$$\Longrightarrow M(t) = A \cdot t + \frac{B}{\lambda(1-p)+\mu p}\left(1 - e^{-\left(\lambda(1-p)+\mu p\right)t}\right)$$

ΣΜΕΕ 3/4/2017

Ανανεωτική Θεωρία – Νόμος Μεγάλων Αριθμών – Κεντρικό Οριακό Θεώρημα –
– Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με αμοιβές

① Πλαίσιο

② Υπενθύμιση από θεωρία Πιθανοτήτων

<u>ΝΜΑ</u> $X_1, X_2, \dots$ ανεξ + ισον και $E[X_i]=\mu<\infty$. Τότε $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \mu$ με πιθ. 1

δηλ. $P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \mu\right) = 1$.

<u>ΚΟΘ</u> $X_1, X_2, \dots$ ανεξ + ισον και $E[X_i]=\mu$, $Var[X_i]=\sigma^2$. Τότε:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le x\right) = \Phi(x)$$

, όπου $\Phi(x)$ σκ της $N(0,1)$

③ <u>ΝΜΑ και ΚΟΘ στην Ανανεωτική Θεωρία</u>

$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \dots$ με $E[X_1]=\mu$ και $Var[X_i]=\sigma^2$

Η συχνότητα είναι 1/περίοδο

<u>ΝΜΑ</u>: Αν $\mu<\infty$, τότε:

$$P\Big(\underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}}_{\text{μακροπρόθεσμος ρυθμός γεγονότων ανά χρονική μονάδα}} = \frac{1}{\mu}\Big) = 1$$

! Αν t χρονικές μονάδες, έχουν γίνει $\frac{t}{\mu}$ γεγονότα

<u>ΚΟΘ</u>: Αν $\mu, \sigma^2 < \infty$, τότε:

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \le x\right) = \Phi(x)$$

④ Στοχαστικό Ανανεωτικό Θεώρημα με αμοιβές

ΣΑΘΑ:

$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδ. με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \dots$ και χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \dots$ Επιπλέον, υπάρχει μια $\{R(t)\}$ στοχαστική διαδικασία "συσσωρευμένων αμοιβών" με την ιδιότητα: (X_n, R_n) $n \geq 1$ είναι ανεξ. + ισόν. ← έλεγχος πριν εφαρμοστεί

όπου $R_n = \underbrace{R(S_n) - R(S_{n-1})}_{\text{αμοιβή που συσσωρεύτηκε στο } (S_{n-1}, S_n]}$, $n \geq 1$

και $E[X_n] = \mu$, $E[R_n] = \tau$. Τότε $\underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{E[R(t)]}{t}}_{\text{μακροπρόθεσμη μέση αμοιβή ανά χρονική μονάδα}} = \frac{\tau}{\mu} \left(= \frac{E[R_n]}{E[X_n]} \right)$

⑤ Εφαρμογή 1:

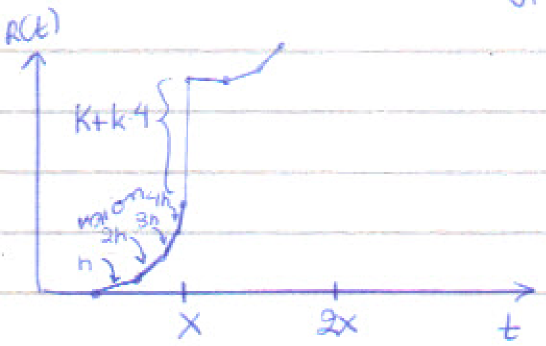
Σε μια αποθήκη φθάνουν αντικείμενα σύμφωνα με στοχ. διαδ. Poisson(λ). Κάθε x χρονικές μονάδες η αποθήκη αδειάζει με κόστος K. Επίσης, κάθε αντικείμενο επιφέρει κόστος h ανά χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη και εισάγει κόστος k για την εκκαθάρισή του.

1) Ποιο είναι το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος διαχείρισης της αποθήκης ανά χρονική μονάδα: $C(x)$

2) Βέλτιστο x;

Έστω $\{N(t)\}$ η ανανεωτική διαδ. των εκκαθαρίσεων της αποθήκης με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους $(\mu = x)$

Έστω $R(t)$ κόστος διαχείρισης στο $(0, t]$



Ζητάμε $C(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{E[R(t)]}{t}$

Είναι $X_n=x$ και $R_n=K+k\Big(M(S_n)-M(S_{n-1})\Big)+h\sum\limits_{i=1}^{M}(x-Y_i)$

όπου $M(t)=\#$ αιτημένων στο $(0,t]$

$M=\#$ —//— στο $(S_{n-1},S_n]$

και έστω $Y_1,\dots,Y_m$ οι χρόνοι αφίξης των αιτημένων μετά την S_{n-1}

Ισχύει ότι $(X_n,R_n)_{n\geq 1}$ ανεξ + ισον.

εξαρτάται μόνο από τον κύκλο n

Οπότε το ΖΑΘΑ είναι εφαρμόσιμο

$$C(x)=\frac{\tau}{\mu}$$

$$\tau=E[R_n]=E\Big[K+kM+h\sum_{i=1}^{M}(x-Y_i)\Big]=K+kE[M]+h\sum_{m=0}^{\infty}P(M=m)E\Big[\sum_{i=1}^{m}(x-Y_i)\,\Big|\,M=m\Big]$$

Campbell σε διάστημα μήκους x

$$=K+k\lambda x+h\sum_{m=0}^{\infty}P(M=m)\Big(xm-\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\frac{ix}{m+1}}_{\frac{m(m+1)}{2}}\Big)$$

$$=K+k\lambda x+h\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}P(M=m)\Big(xm-\frac{mx}{2}\Big)}_{\frac{x}{2}E[M]\,=\,\frac{\lambda x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow C(x)=\frac{K+k\lambda x+h\lambda\frac{x^2}{2}}{x}=\frac{K}{x}+k\lambda+\frac{h\lambda x}{2}$$

Έχω $\frac{dC(x)}{dx} = -\frac{K}{x^2} + \frac{h\lambda}{2}$

$$\frac{d^2C(x)}{dx^2} = \frac{2K}{x^3} > 0$$

$\frac{dC(x)}{dx} = -\frac{K}{x^2} + \frac{h\lambda}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2K}{h\lambda}}$ ελαχιστοποιεί το $C(x)$

⑥ Εφαρμογή 2

Ίδιες παράμετροι με πριν: K, k, λ, h

Όμως, η αποθήκη επιαναπληρώνεται κάθε φορά που μαζεύονται m παραγγελίες

1) Μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα $= C(m)$

2) Βέλτιστο m;

Έστω $\{N(t)\}$ η ανανεωτική διαδ. των επαναπληρώσεων της αποθήκης

$\{M(t)\}$ η διαδ. Poisson των αφίξεων παραγγελιών

$R(t) =$ Κόστος διαχείρισης ως τη στιγμή t

$X_n \sim Erlang(m, \lambda)$ χρόνος μεταξύ $(n-1)$οστής και nοστής επαναπλήρωσης της αποθήκης

χρόνος για να μαζευτούν m πελάτες

$$E[R_n] = K + km + h\sum_{i=1}^{m}(m-i)\frac{1}{\lambda} = K + km + \frac{h}{\lambda}\frac{(m-1)m}{2}$$

$(X_n, R_n)_{n\geq 1}$ ανεξ. και ισον.

Το ΣΑΘΑ είναι εφαρμόσιμο

$$C(m) = \lim_{t\to\infty}\frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]} = \frac{K + km + \frac{h(m-1)m}{2\lambda}}{\frac{m}{\lambda}} = \frac{K\lambda}{m} + k\lambda + \frac{h(m-1)}{2}$$

Βρίσκω το m όπως πριν. Η $C(m)$ είναι κυρτή για $m \in \mathbb{R}$. Επομένως το ελάχιστό της είναι $\lfloor m^* \rfloor$ ή $\lfloor m^* + 1 \rfloor$ όπου $m^*: \frac{dC(m)}{dm} = 0$