ΣΜΕΕ 17/03/2017

Poisson- Ασκήσεις

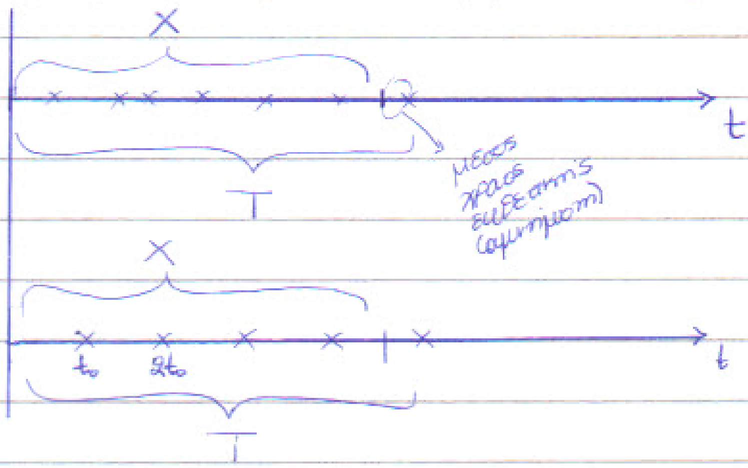
① Άσκηση

Μηχάνημα με $X \sim Exp(\lambda)$ χρόνος ζωής

-Επιθεωρήσεις γίνονται κατά μέσο όρο κάθε t_0 χρονικές μονάδες

-Είναι καλύτερο η διαδικασία των επιθεωρήσεων να είναι Poisson (με ενδιάμεσους χρόνους $Exp\left(\frac{1}{t_0}\right)$) ή ντετερμινιστική (με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους t_0);

-Συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει η $E[$Χρόνος μέχρι την διαπίστωση βλάβης$]=E[T]$



Λύση:

(1η περ.) $E(T)=E(X)+E(Z)$

υπολειπόμενος χρόνος ως την επόμενη επιθεώρηση από το σημείο που χάλασε το μηχάνημα

(λόγω αμνημοσύνης διάρκειας των χρόνων μεταξύ των επιθεωρήσεων)

$$E(T)=\frac{1}{\lambda}+t_0$$

(2η περ.) $$T=\left(\left[\frac{X}{t_0}\right]+1\right)\cdot t_0$$

$$E(T)=E\Big(\underbrace{\left(\left[\frac{X}{t_0}\right]+1\right)t_0}_{g(X)}\Big)=\int_0^{\infty}E\left(\left(\left[\frac{x}{t_0}\right]+1\right)t_0 \,\Big|\, X=x\right)\lambda e^{-\lambda x}\,dx=t_0\int_0^{\infty}\underbrace{\left(\left[\frac{x}{t_0}\right]+1\right)\lambda e^{-\lambda x}}_{g(x)\cdot f_X(x)}\,dx$$

$$= t_0 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)t_0}^{n t_0} \left(\left[\frac{x}{t_0} \right] + 1 \right) \lambda e^{-\lambda x} \, dx = t_0 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)t_0}^{n t_0} n \, \lambda e^{-\lambda x} \, dx =$$

$$= t_0 \sum_{n=1}^{\infty} n \left[-e^{-\lambda x} \right]_{x=(n-1)t_0}^{x=n t_0} = t_0 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{-\lambda (n-1) t_0} - e^{-\lambda n t_0} \right) =$$

$$= t_0 \sum_{n=1}^{\infty} n \, e^{-\lambda n t_0} \left(e^{\lambda t_0} - 1 \right) = t_0 \left(e^{\lambda t_0} - 1 \right) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{-\lambda t_0} \right)^n =$$

$$! \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \ |x|<1 \quad \xRightarrow[d/dx]{\text{τότε}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \ |x|<1$$

$$\xRightarrow{\cdot x} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \ |x|<1$$

Άρα, $$E(T) = t_0 \, \frac{\overbrace{\left(e^{\lambda t_0} - 1 \right) e^{-\lambda t_0}}^{1-e^{-\lambda t_0}}}{\left(1 - e^{-\lambda t_0} \right)^2} =$$

$$E(T) = \frac{t_0}{1 - e^{-\lambda t_0}}$$

Συνεπώς, Poisson $\longrightarrow E(T_1) = \frac{1}{\lambda} + t_0$

Ντετερμινιστικό $\longrightarrow E(T_2) = \frac{t_0}{1 - e^{-\lambda t_0}}$

$$E(T_1) - E(T_2) = \frac{1}{\lambda} + t_0 - \frac{t_0}{1 - e^{-\lambda t_0}} = \frac{1 - e^{-\lambda t_0} + \lambda t_0 (1 - e^{-\lambda t_0}) - \lambda t_0}{\lambda (1 - e^{-\lambda t_0})} =$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda (1 - e^{-\lambda t_0})} = \frac{P(N(t) \geq 2)^{>0}}{\lambda \underbrace{(1 - e^{-\lambda t_0})}_{>0}} > 0$$

για $N \sim \text{Poisson}(\lambda t_0)$

② Άσκηση

$\{N(t)\}$ σδ Poisson ρυθμού λ

Αν $1 \leq k < n$, $E[S_k \mid N(t)=n] = \frac{k \cdot t}{n+1}$

↑ Θ. Campbell

$$E[S_k \mid S_n = t] = \,; \qquad \frac{kt}{n}$$

Λύση:

1ος τρόπος: $E[S_k \mid S_n = t] = \lim\limits_{h \to 0^+} E[S_k \mid N(t-h) = n-1, N(t) = n] =$

δεδομένος αυτού είναι ανεξ.

$$= \lim_{h\to 0^+} E[S_k \mid N(t-h)=n-1] \overset{\text{Campbell}}{=\!=} \lim_{h \to 0^+} \frac{k \cdot (t-h)}{n} = \frac{kt}{n}$$

2ος τρόπος: $E[S_k \mid S_n = t] = \int_0^\infty x \, f_{S_k \mid S_n = t}(x)\, dx = \int_0^t x \, \frac{f_{S_k, S_n}(x,t)}{f_{S_n}(t)}\, dx$

$$= \frac{\int_0^t x \frac{\cancel{\lambda^k}}{(k-1)!} x^{k-1} \cancel{e^{-\lambda x}} \frac{\cancel{\lambda^{n-k}}}{(n-k-1)!} (t-x)^{n-k-1} \cancel{e^{-\lambda(t-x)}} \, dx}{\frac{\cancel{\lambda^n}}{(n-1)!} t^{n-1} \cancel{e^{-\lambda t}}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \int_0^t \frac{x^k (t-x)^{n-k-1}}{t^{n-1}} dx$$

$$\overset{\frac{x}{t} = u}{=\!=} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \int_0^1 u^k \underbrace{(1-u)^{n-k-1}}_{B(k+1,\, n-k) \,=\, \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)}{\Gamma(n+1)} \,=\, \frac{k!(n-k-1)!}{n!}} t \, du = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\cancel{(n-k-1)!}} \frac{k!\, \cancel{(n-k-1)!}}{n!} t$$

$$= \frac{kt}{n}$$

∇

③ Ασκ 1 / Φυλ 1

n βιβλία αριθμημένα $1,2,\dots,n$

$$P(\text{λάθη βιβλίου } k = i) = \frac{k^i}{(k+1)^{i+1}} \qquad k=1,2,\dots,n \quad i=0,1,\dots$$

Πείραμα τύχης: επιλογή βιβλίου και βρίσκω λάθη

X: # τυπογραφικών λαθών $\quad E[X]=;$ $\quad Var[X]=;$

Λύση:

Έστω Z το βιβλίο που επέλεξα

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{P(Z=k)}_{\frac{1}{n}} E[X|Z=k]$$

$$E[X|Z=k] = \sum_{i=0}^{\infty} i \underbrace{P(X=i|Z=k)}_{\frac{k^i}{(k+1)^{i+1}}} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{\infty} i\left(\frac{k}{k+1}\right)^i = \frac{1}{k+1}\,\frac{\frac{k}{k+1}}{\left(\frac{1}{k+1}\right)^2} = k$$

παραγ. γεωμετρική σειρά

Άρα $E[X] = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\,\frac{k(k+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z=k) E[X|Z=k] = \cdots$$

④ Ασκ 2 / Φυλ 1

a λευκά και b μαύρα

Τραβάμε σφαιρίδιο, αν είναι Λ το επανατοποθετούμε

αν είναι Μ το αντικαθιστούμε με λευκό

X_n = # Λ μετά τη n-οστή επανάληψη

$X_0 = a$

i) $E[X_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right)E[X_n] + 1$

ii) κλειστός τύπος για τη $E[X_n]$

Λύση:

i) $E[X_{n+1}] = \sum_x P(X_n=x)\, E[X_{n+1}|X_n=x]$

$$E[X_{n+1}|X_n=x] = \underset{\text{πιθ. Λ στη (n+1) επαν.}}{\frac{x}{a+b}} \cdot x + \left(1-\underset{\text{πιθ. Μ}}{\frac{x}{a+b}}\right)\cdot(x+1) = x + \left(1-\frac{x}{a+b}\right) = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)x+1$$

Άρα, $$E[X_{n+1}] = \sum_x \underbrace{P(X_n=x)}_{f_{X_n}(x)} \underbrace{\left[\left(1-\frac{1}{a+b}\right)x+1\right]}_{g(x)} = \underset{E[g(X_n)]}{E}\left[\left(1-\frac{1}{a+b}\right)X_n+1\right] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_n]+1$$

ii) 1ος τρόπος: $$E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_{n-1}]+1 = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 E[X_{n-2}] + \left(1-\frac{1}{a+b}\right)+1$$

$$= \dots = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n \underset{\substack{\| \\ a}}{E[X_0]} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^k = \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$$

2ος τρόπος: $E[X_{n+1}] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_n]+1$ μεικτή πρόοδος

λύνω την εξίσωση σταθερού σημείου: $x = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)x+1 \Rightarrow x = a+b$

αφαιρώ: $E[X_{n+1}]-x = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)\left(E[X_n]-x\right)$ γεωμετρική πρόοδος με λόγο $1-\frac{1}{a+b}$

Άρα, $E[X_n]-x = \left(E[X_0]-0\right)\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n$

$$E[X_n] = a+b-a\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n$$

ΣΗΕΕ 22/03/2017

① Ασκ. 3 / Φυλ 1

Ρίψη νομίσματος $\begin{cases} \xrightarrow{\text{πιθ } p} K \\ \xrightarrow{\text{πιθ } (1-p)} \Gamma \end{cases}$

$$E[\underbrace{\#\text{ ριψεων μέχρι } r \text{ συνεχόμενες κεφαλές } (K)}_{Y_r}] = ;$$

1ος τρόπος: Δέσμευση στην ρίψη X_1

$$E[Y_r] = (1-p)\left(1+E[Y_r]\right) + p\, E[Y_r \mid X_1 = K]$$
$$= (1-p)\left(1+E[Y_r]\right) + p\left[(1-p)\left(2+E[Y_r]\right) + p\, E[Y_r \mid X_1=K, X_2=K]\right]$$
$$= (1-p) + 2p(1-p) + \left[(1-p)+p(1-p)\right]E[Y_r] + p^2(1-p)\left(3+E[Y_r]\right) +$$
$$+ p^3 E[Y_r \mid X_1=K, X_2=K, X_3=K]$$
$$= (1-p) + 2p(1-p) + 3p^2(1-p) + \left[(1-p)+p(1-p)+p^2(1-p)\right]E[Y_r]$$
$$+ p^3 E[Y_r \mid X_1=K, X_2=K, X_3=K]$$

$= \ldots\ldots$ (r φορές)

$$= \sum_{i=1}^{r} i(1-p)p^{i-1} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r}(1-p)p^{i-1}\right)}_{\cancel{(1-p)}\frac{1-p^r}{\cancel{1-p}}} E[Y_r] + p^r \cdot r$$

$$\Longrightarrow E[Y_r] = \frac{1}{p^r}\left[\sum_{i=1}^{r} i(1-p)p^{i-1} + p^r \cdot r\right]$$

2ος τρόπος: Δέσμευση στον αριθμό των ριψεων για να εμφανιστούν πρώτη φορά γράμματα, έστω X

$$E[Y_r] = \sum_{i=1}^{\infty} P(X=i)\, E[Y_r \mid X=i]$$

Έχω $P(X=i) = p^{i-1}(1-p), \; i \geq 1$

$$E[Y_r \mid X=i] = \begin{cases} i + E[Y_r], & i \le r \\ r, & i > r \end{cases}$$

Άρα, $E[Y_r] = \sum_{i=1}^{r} p^{i-1}(1-p)\left(i + E[Y_r]\right) + \sum_{i=r+1}^{\infty} p^{i}(1-p)r$

$$= \sum_{i=1}^{r} i(1-p)p^{i-1} + (1-p^r)E[Y_r] + rp^r$$

3ος τρόπος: Δέσμευση στην Y_{r-1}

$$E[Y_r] = \sum_{i=r-1}^{\infty} P(Y_{r-1}=i)\,E[Y_r \mid Y_{r-1}=i]$$

$$E[Y_r \mid Y_{r-1}=i] = p\cdot(i+1) + (1-p)\left(i+1+E[Y_r]\right)$$
$$= i+1 + (1-p)E[Y_r]$$

Άρα, $E[Y_r] = \sum_i P(Y_{r-1}=i)(i+1) + (1-p)E[Y_r]\underbrace{\sum_i P(Y_{r-1}=i)}_{1}$

$$= E[Y_{r-1}] + 1 + (1-p)E[Y_r]$$

$\Longrightarrow E[Y_r] = \frac{1}{p}\left(E[Y_{r-1}]+1\right)$ μεικαί ωρόδοδος

Λύνω την εξίσωση σταθερού σημείου

$$E[X_r] = \frac{1}{p}E[X_{r-1}] + \frac{1}{p}$$

$$-\quad x = \frac{1}{p}x + \frac{1}{p}$$

$$E[X_r] - x = \frac{1}{p}\left(E[X_{r-1}] - x\right)$$

$$\Longrightarrow E[X_r] - x = \left(\frac{1}{p}\right)^{r-1}\left(E[X_1] - x\right)$$

και $x = \dfrac{\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}} = \dfrac{1}{p-1} \Longrightarrow E[X_r] = \dfrac{1}{p-1} + \left(\dfrac{1}{p}\right)^{r-1}\left(\underbrace{E[X_1]}_{=\frac{1}{p}} - \dfrac{1}{p-1}\right)$

2) Ασκ 4 / Φυλ. 1

$X \geq 0$ ακέραια με πιθανογεννήτρια $P_X(z) = \dfrac{c}{6-z-z^2}$

- $c =$;
- $E[X] =$;
- $f_X(x) = P(X=x) =$; $\quad x = 0, 1, \ldots$
- $P(X$ άρτιος$) =$;

- $P_X(1) = 1 \Longrightarrow c = 4$

- $E[X] = P_X'(1) = \ldots$

- Παραγοντοποίηση: $-z^2 - z + 6 = -(z^2+z-6) = -(z+3)(z-2)$

$$P_X(z) = \frac{4}{(3+z)(2-z)} \overset{\text{απλά κλάσματα}}{=} \frac{A}{3+z} + \frac{B}{2-z}$$

$$= \frac{A(2-z) + B(3+z)}{(3+z)(2-z)}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 4 = 2A + 3B \\ 0 = -A + B \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 5A = 4 \\ A = B \end{array}\right\} \Longrightarrow A = B = \frac{4}{5}$$

$$P_X(z) = \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \qquad ! \ \sum_{x=0}^{\infty} t^x = \frac{1}{1-t}, \ |t|<1$$

$$P_X(z) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) z^x = \sum_{x=0}^{\infty} \left[\frac{4}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^x + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right] z^x$$

- $P(X$ άρτιος$) =$;

$$\left.\begin{array}{l} P_X(1) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) \\ P_X(-1) = \sum_{x=0}^{\infty} (-1)^x P(X=x) \end{array}\right\} \oplus \Longrightarrow P_X(1) + P_X(-1) = 2 \underbrace{\sum_{x \text{ άρτιος}} P(X=x)}_{P(X \text{ άρτιος})}$$

$$\Longrightarrow P(X \text{ άρτιος}) = \frac{1}{2}\left[P_X(1) + P_X(-1)\right] = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{6}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

③ Άσκ 5/ Φυλ. 1

X, Y, Z ανεξ.

$X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\lambda)$, $Z \sim Exp(\mu)$ $\quad \lambda \neq \mu$

$W = X + Y + Z$

- $\tilde{F}_W(s) = ;$ μετ. L-S
- $f_W(s) = ;$ σππ

- $\tilde{F}_W(s) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \tilde{F}_X(s)\tilde{F}_Y(s)\tilde{F}_Z(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2 \frac{\mu}{\mu+s}$

- $\tilde{F}_\omega(s) \overset{\text{σπάσιμο σε}}{\underset{\text{απλά κλάσματα}}{=}} \frac{\lambda^2 \mu}{(\lambda+s)^2(\mu+s)} = \frac{A}{\lambda+s} + \frac{B}{(\lambda+s)^2} + \frac{\Gamma}{\mu+s}$

$$= \frac{A(s+\lambda)(s+\mu) + B(s+\mu) + \Gamma(\lambda+s)^2}{(s+\lambda)^2(s+\mu)}$$

$$= \frac{s^2(A+\Gamma) + s\left(A(\lambda+\mu) + B + 2\lambda\Gamma\right) + (A\lambda\mu + B\mu + \Gamma\lambda^2)}{(s+\lambda)^2(s+\mu)}$$

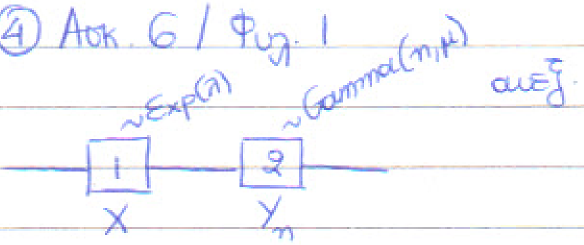
$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} A + \Gamma = 0 \\ A(\lambda+\mu) + B + 2\lambda\Gamma = 0 \\ A\lambda\mu + B\mu + \Gamma\lambda^2 = \lambda^2\mu \end{array}\right\} \Longrightarrow A, B, \Gamma \text{ γνωστά}$$

$$\tilde{F}_\omega(s) = \frac{A}{\lambda}\underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+s}}_{exp(\lambda)} + \frac{B}{\lambda^2}\underbrace{\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2}_{erlang(2,\lambda)} + \frac{\Gamma}{\mu}\underbrace{\frac{\mu}{\mu+s}}_{exp(\mu)}$$

Άρα, $f_\omega(\omega) = \frac{A}{\cancel{\lambda}}\cancel{\lambda} e^{-\lambda\omega} + \frac{B}{\cancel{\lambda^2}}\frac{\cancel{\lambda^2}}{(2-1)!}\omega^{2-1}e^{-\lambda\omega} + \frac{\Gamma}{\cancel{\mu}}\cancel{\mu}e^{-\lambda\mu}$

$= \ldots$

④ Ασκ. 6 / Φυλ. 1



T ο χρόνος ζωής του συστήματος

$E[T]$

$T = \min(X, Y_n)$

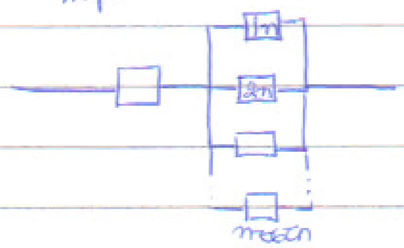
1ος τρόπος: $E[T] = \int_0^\infty (1-F_T(t))\,dt = \int_0^\infty P(T>t)\,dt = \int_0^\infty P(X>t, Y_n>t)\,dt$

$$\overset{\text{ανεξ.}}{=} \int_0^\infty P(X>t)\underbrace{P(Y_n>t)}_{\substack{\| \\ P(N(t)<n) \\ \text{Poisson}(\mu t)}}\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^i}{i!}\,dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu^i}{i!} \overbrace{\int_0^\infty t^i e^{-(\lambda+\mu)t}\,dt}^{=\frac{i!}{(\lambda+\mu)^{i+1}}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu^i}{(\lambda+\mu)^{i+1}} = \frac{1}{\lambda+\mu} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^i$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} \frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n}{1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}} = \frac{1}{\lambda}\left(1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n\right)$$

2ος τρόπος:



$T_n = \min(X, Y_n)$

$$E[T_n] = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot 0 + \frac{\mu}{\lambda+\mu} E[T_{n-1}]$$

Άρα, $E[T_n] = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} E[T_{n-1}]$

Εξίσωση σταθ. σημείου $x = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} x \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda}$

$\ominus$

$$E[T_n]-\overset{x}{\frac{1}{\lambda}}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(E[T_{n-1}]-\overset{x}{\frac{1}{\lambda}}\right)$$

$$=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1}\left(E[T_1]-\frac{1}{\lambda}\right)=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda+\mu}-\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\Longrightarrow E[T_n]=\frac{1}{\lambda}-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1}\frac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n}\right)$$

3ος τρόπος:

$$E[T]=E[\min(X,Y_n)]=E[X]+E[\min(0,Y_n-X)]=\frac{1}{\lambda}+P(Y_n\geq X)\cdot\overset{0}{\ }0+P(X>Y_n)\cdot$$

$$\cdot E[\overset{<0}{Y_n-X}\mid X>Y_n]=\frac{1}{\lambda}+P(X>Y_n)\,\underbrace{E[X-Y_n\mid X>Y_n]}_{=\frac{1}{\lambda}}$$

[illegible] λόγω της 1

ισχυρή αμνημοσύνη

$$=\frac{1}{\lambda}-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n}\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n}\right)$$

⑤ Ασκ 1 / Φυλ 2

$\{N(t)\}$ αδ Poisson ρυθμού λ

$$E\big[N(t)[N(t)-1][N(t)-2]\cdots[N(t)-k+1]\big]=\;;$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\,e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=\sum_{n=k}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{(n-k)!}$$

$$=e^{-\lambda t}(\lambda t)^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!}\quad(n-k=j)\quad=e^{-\lambda t}(\lambda t)^k e^{\lambda t}=(\lambda t)^k$$

ή $\quad P_{N(t)}(z)=e^{-\lambda t(1-z)}\rightsquigarrow P^{(k)}_{N(t)}(1)$

ΣΜΕΕ 24/3/17

Ασκήσεις στη Στοχαστική Διαδικασία Poisson

① Ασκ. 3/Φυλ. 2

$$P(N(t)=k \mid N(t+s)=k+m)=; \quad t \geq 0, s \geq 0, k \geq 0, m \geq 0$$

$$P(N(t)=k \mid N(t+s)=k+m) = \overbrace{\binom{k+m}{k}\left(\frac{t}{t+s}\right)^k\left(\frac{s}{t+s}\right)^m}^{\sim Bin\left(n, \frac{t}{t+s}\right)}$$

② Ασκ. 4/Φυλ. 2

$$P_{N(t)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(N(t)=n)}_{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} z^n = e^{-\lambda t} e^{\lambda t z} = e^{-\lambda t(1-z)}$$

$$\left.\begin{aligned} P_{N(t)}(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) \\ P_{N(t)}(-1) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P(N(t)=n) \end{aligned}\right\} \overset{\ominus}{\Longrightarrow} P_{N(t)}(1) - P_{N(t)}(-1) = 2\sum_{n \text{ περιττός}} P(N(t)=n) = 2P(N(t) \text{ περιττός})$$

$$\Longrightarrow P(N(t) \text{ περιττός}) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right) = \frac{1-e^{-2\lambda t}}{2}$$

③ Ασκ. 5/Φυλ. 2

$N(t) \sim Poisson(8t)$ t: ώρα

α) $E[N(8)] = Var[N(8)] = 8 \cdot 8 = 64$

β) $P(N(\frac{1}{4})=0) = e^{-8 \cdot \frac{1}{4}} = e^{-2}$

γ) $Cov(N(2), N(2)-N(1)) = Cov(N(1) + N(2)-N(1), N(2)-N(1)) =$

$\overset{0\ (\text{λόγω ανεξ. προσ.})}{}$

$$= \cancel{Cov(N(1), N(2)-N(1))} + Cov(N(2)-N(1), N(2)-N(1)) = Var(N(2)-N(1)) \underset{\text{προσ.}}{\overset{\text{στασ.}}{=}}$$

$$= Var(N(1)) = 8 \cdot 1 = 8$$

δ) $Cov(N(2), N(26)-N(25)) \underset{\text{προσαυξήσεις}}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}} 0$ (δεν έχουν τομή τα διαστήματα)

⑤ Ασκ. 6 / Φυλ. 2

α) $P(A_i = n) = ;$

$\{N(t)\}$ η υπέρθεση τους

$P(A_i = n) = P($τα πρώτα n γεγονότα τύπου i, $(n+1)$οστό γεγονός του άλλου τύπου$)$

$$= \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}\right) \qquad i = 1,2, \quad n = 0,1,2,\dots$$

β) A_1, A_2 ανεξ; όχι ανεξάρτητες

$A_1 > 0 \Longrightarrow A_2 = 0$ αφού $\underbrace{P(A_1=3, A_2=2)}_{=0} \neq \underbrace{P(A_1=3)P(A_2=2)}_{\neq 0}$

⑥ Ασκ. 1 / Φυλ. 3

$$E[S_{N(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(N(t)=n)}_{= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} \underbrace{E[S_{N(t)} \mid N(t)=n]}_{\overset{\text{Campbell}}{=} E[U_{n:n}] = \frac{nt}{n+1}}$$

n-οστή διατεταγμένη από εδώ της $U([0,t])$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \frac{n\, t}{(n+1)} = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n (\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n+1=j}{=} \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} (j-1)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(E[N(t)] - (1-e^{-\lambda t}) \right) = \frac{1}{\lambda} \left(\lambda t - (1-e^{-\lambda t}) \right) = t - \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}$$

β' τρόπος:

$$E[S_{N(t)}] = \int_0^{\infty} \left(1 - F_{S_{N(t)}}(x)\right) dx = \int_0^{\infty} P(S_{N(t)} > x)\, dx = \int_0^{\infty} P(N(x) < N(t))\, dx$$

$$\nabla \; \{S_n \le x\} = \{N(x) \ge n\}$$

$$= \int_0^{t} P(N(x) < N(t))\, dx \overset{\nabla}{=} \int_0^{t} P(\text{συμβαίνει ένα γεγονός στο } (x,t])\, dx$$

$$= \int_0^{t} \left(1 - \underbrace{e^{-\lambda(t-x)}}_{\text{0 γεγονότα στο } (x,t]}\right) dx = t - \int_0^{t} e^{-\lambda(t-x)} dx = t - \int_0^{t} e^{-\lambda u} du = t - \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}$$

(7) Ασκ. 2 / Φυλ. 3

(8) Ασκ. 3 / Φυλ. 3

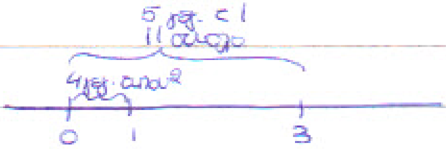
$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(N(t)=n)}_{= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} E\left[\sum_{i=1}^{\cancel{N(t)}\, n} S_i \,\middle|\, N(t)=n\right]$$

$$\overset{\text{Campbell}}{=} E\left[\sum_{i=1}^{n} U_{i:n}\right] \overset{\text{συμμετρική συνάρτηση}}{=} E\left[\sum_{i=1}^{n} U_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E(U_i) = n \cdot \frac{t}{2}$$

$$= \frac{t}{2}\sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, n = \frac{t}{2} E[N(t)] = \frac{\lambda t^2}{2}.$$

(9) Ασκ. 4 / Φυλ. 3

(10) Ασκ 1 / Φυλ. 4



$$P\left(N_1(3)=5,\ N(3)=11 \mid N_2(1)=4\right) = P\left(N_1(3)=5,\ N_2(3)=6 \mid N_2(1)=4\right) =$$

$$= P(N_1(3)=5)\,P\left(N_2(3)-N_2(1)=2 \mid \cancel{N_2(1)=4}\right) = e^{-3\cdot\frac{\lambda}{3}}\,\frac{\lambda^5}{5!}\,e^{-2\cdot\frac{2\lambda}{3}}\,\frac{\left(\frac{4\lambda}{3}\right)^2}{2!}$$

στ. ‖ πρ. ανεξ προσ.

$$P(N_2(2)=1)$$

(11) Ασκ 2 / Φυλ. 4

Κάθε γεγονός είναι τύπου 1 ή τύπου 2 με πιθ p, q ανεξ.

$$\pi_1 = P(\underbrace{11\ldots1}_{n}\ \underbrace{22\ldots2}_{k}) = p^n q^k$$

$$\pi_2 = \binom{n+k}{n} p^n q^k$$

(12) Ασκ. 3 / Φυλ. 4

$$E[N_1(t) \mid N(t)=10]$$

α' τρόπος: $P\left(N_1(t)=k \mid N(t)=10\right) = \dfrac{\overset{\text{ανεξ}}{P(N_1(t)=k,\ N_2(t)=10-k)}}{P(N(t)=10)} =$

$$= \frac{e^{-3t}\frac{(3t)^k}{k!}\,e^{-2t}\frac{(2t)^k}{(10-k)!}}{e^{-5t}\frac{(5t)^{10}}{10!}} = \binom{10}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{5}\right)^{10-k}$$

Σημ. $N_1(t) \mid N(t)=10 \sim Bin\left(10, \frac{3}{5}\right)$ άρα $E[N_1(t) \mid N(t)=10] = 10\cdot\frac{3}{5} = 6$

β' τρόπος: $N_1(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} I_i$ όπου $I_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το i-οστό γεγονός προέρχεται από την } \{N_1(t)\} \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

$$E\left[N_1(t)\,|\,N(t)=10\right] = E\left[\sum_{i=1}^{10} I_i \,|\, \cancel{N(t)=10}\right] = \sum_{i=1}^{10} E(I_i) = \sum_{i=1}^{10} P(I_i=1) = 10\cdot\frac{3}{5}$$

(13) Ασκ. 4/Φυλ. 4

$$F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = P(T_1\le t_1, T_2\le t_2) \overset{\text{ανεξ. } N_1 \text{ και } N_2}{=} P(T_1\le t_1)\,P(T_2\le t_2) = (1-e^{-\lambda p t_1})(1-e^{-\lambda(1-p)t_2}$$