ΣΜΕΕ 8/3/2017

Γενικεύσεις- Ασκήσεις:

① Μη ομογενής διαδικασία Poisson:

Ορισμός(τοπικός) Μια απαριθμήτρια σ.δ. $N(t)$ λέγεται μη ομογενής σ.δ. Poisson
($N(t)$ αυξάνει ως προς t και $N(t)\in\{0,1,2,\dots\}$)

με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$ αν:

i) έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις: $t_1<t_2<\dots<t_n \Longrightarrow N(t_1), N(t_2)-N(t_1), \dots, N(t_n)-N(t_{n-1})$ ανεξ.

ii) $$P(N(t+h)=n+j \mid N(t)=j)=\begin{cases}\lambda(t)\cdot h+o(h), & n=1\\ 1-\lambda(t)\cdot h+o(h), & n=0\\ o(h), & n\geq 2\end{cases}$$

$h\to 0^+$, όπου $\dfrac{o(h)}{h}\xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$

Ορισμός(ολικός) Μια απαριθμήτρια σ.δ. $N(t)$ λέγεται μη ομογενής σ.δ. Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$ αν:

i) έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

ii) $$N(t+s)-N(t)\sim \text{Poisson}\left(\underbrace{\int_t^{t+s}\lambda(u)\,du}_{=\Lambda(t+s)-\Lambda(t)}\right)$$

Οι ορισμοί είναι ισοδύναμοι (ίδια απόδειξη με ομογενή σ.δ. Poisson)

(ολικός $\Rightarrow$ τοπικός
$$P(N(t+s)-N(t)=n)=e^{-\int_t^{t+s}\lambda(u)du}\,\frac{(\lambda(t)\cdot t)^n}{n!}$$ και ανάπτυγμα Taylor)

② Σύνθετη σ.δ. Poisson:

Ορισμός: Αν $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ και $Y_1, Y_2, \dots$ ανεξ. ισον. τ.μ. $\sim F(x)$ και $Y(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, $t\geq 0$, τότε η $\{Y(t)\}$ λέγεται σύνθετη διαδικασία Poisson ρυθμού λ και σ.κ. μεγέθους αλμάτων (ή ομάδων) $F(x)$.

③ Μη ομογενής διάσπαση σ.δ. Poisson

Θεώρημα: Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ και κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ που συμβαίνει τη στιγμή t καταγράφεται ως τύπου i με πιθ. $p_i(t)$ ανεξ. από τα άλλα γεγονότα, $i=1,2,\dots,n$. Αν $N_i(t) = \#$ γεγ. τύπου i στο $(0,t]$, τότε η $\{N_i(t)\}$ είναι μη ομογενής σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda_i(t)=\lambda p_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$

Αποδ: $\{N(t)\}$ σδ Poisson ρυθμού $\lambda \rightarrow$ (i) έχει ανεξ. προσαυξήσεις

(ii) $P(N(t+h)=n+j \mid N(t)=j) = \begin{cases} 1-\lambda h+o(h), & n=0 \\ \lambda h+o(h), & n=1 \\ o(h), & n\geq 2 \end{cases}$

κάθε γεγονός καταγράφεται $\Longrightarrow$ με πιθ $p_i(t)$ ανεξ. από τα άλλα + (i)

Έχει ανεξ. προσ. αυξήσεις

και $P(N_i(t+h)=n+j \mid N_i(t)=j) = \begin{cases} \lambda p_i(t)\, h+o(h), & n=1 \\ o(h), & n\geq 2 \\ \underbrace{1-\lambda h+o(h)}_{\text{να μην γίνει γεγονός}} + \underbrace{(\lambda h+o(h))(1-p_i(t))}_{\text{να γίνει γεγονός αλλά να μην καταγραφεί ως τύπου } i} = 1-\lambda p_i(t)h+o(h), & n=0 \end{cases}$

④ Άσκηση 1:

Γεννήσεις συμβαίνουν σε μαιευτήριο σύμφωνα με σδ Poisson ρυθμού $\lambda=24$ γεν/μέρα

Σήμερα είναι η 8 Μαρτίου

i) Ποια είναι η πιθ 10 γεννήσεων σήμερα =;

ii) ——//—— 10 ——//—— αύριο | 30 γεννήσεων σήμερα =;

iii) Αναμενόμενη ώρα γέννησης 3ου παιδιού δεδομ. ότι σήμερα είχαμε 11 γεννήσεις;

iv) P(100 γεννήσεις από 8-11 Μαρτίου | Αύριο θα έχουμε 30 γεννήσεις) =;

v) P(15 γεννήσεις σήμερα : 9 αγόρια, 6 κορίτσια) =;

vi) P(10 γεννήσεις σήμερα : A A A A A A K A K K) =;

vii) P(5 γεννήσεις αγοριών σήμερα | 30 γεννήσεις σήμερα και αύριο) =;

Λύση:

$\{N(t)\}$ σδ Poisson των γεννήσεων (t σε μέρες)

$\{N_1(t)\}$ ——— // ——— των αγοριών

$\{N_2(t)\}$ ——— // ——— των κοριτσιών

$S_1, S_2, \dots$ οι χρόνοι γεννήσεων ξεκινώντας από την αρχή της 8ης Μαρτίου

i) $P(N(1)=10) = e^{-24\cdot 1}\dfrac{(24\cdot 1)^{10}}{10!}$

ii) $P(N(2)-N(1)=10 \mid N(1)=30) \overset{\text{ανεξ.}}{\underset{\text{ωρ.}}{=}} P(N(2)-N(1)=10) \overset{\text{ομ.}}{\underset{\text{ωρ}}{=}} P(N(1)=10)$ (i)

iii) $E[S_3 \mid N(1)=11] \overset{\text{Θεωρ.}}{\underset{\text{Campbell}}{=}} E[U_{3:11}] = \left(\dfrac{i\cdot t}{n+1}\right) = \dfrac{3\cdot 1}{11+1} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$ μέρας

$\downarrow$ η 3η διατεταγμένη από 11 ανεξ + ισον $\sim U([0,1])$

Η αναμενόμενη ώρα γέννησης 3ου παιδιού | 11 γεννήσεων είναι 6 το πρωί

iv) $P(\underbrace{N(4)=100}_{(\eta\, N(4)-N(0))} \mid N(2)-N(1)=30) = P(\underbrace{N(4)-N(2)+N(1)=70}_{} \overset{\text{ανεξ.}}{\mid} \underbrace{N(2)-N(1)=30}_{})$

$\overset{\text{ανεξ.}}{\underset{\text{ωρισ.}}{=}} P(\underbrace{N(4)-N(2)}_{}+\underbrace{N(1)}_{}=70) \overset{\text{ομογ.}}{\underset{\text{ωρισ.}}{=}}_{(*)} e^{-72}\dfrac{(72)^{70}}{70!}$

ανεξ.

ομογ. προσ.
$N(1) \sim \text{Poisson}(24\cdot 1)$
$N(4)-N(2) \sim \text{Poisson}(24\cdot 2)$
ανεξ. (λόγω ανεξ. ωρ)

$\overset{\text{άθροισμα ανεξ. Poisson}}{\Longrightarrow} N(4)-N(2)+N(1) \sim \text{Poisson}(\underset{72}{\underbrace{24+48}})$

λάθος

$(*) = \cancel{P(N(2)+N(1)=70)}$

v) $P(N(1)=15,\ N_1(1)=9,\ N_2(1)=6) = P(N_1(1)=9,\ N_2(1)=6) \overset{N_1 \text{ και } N_2}{\underset{\text{ανεξ.}}{=}}$
$P(N_1(1)=9)\,P(N_2(1)=6) = e^{-24\cdot\frac{1}{2}\cdot 1}\dfrac{(24\cdot\frac{1}{2}\cdot 1)^9}{9!}$
$\cdot\, e^{-24\cdot\frac{1}{2}\cdot 1}\dfrac{(24\cdot\frac{1}{2}\cdot 1)^6}{6!} = e^{-24}\dfrac{12^{15}}{9!\,6!}$

ή $e^{-24}\dfrac{24^{15}}{15!}\dbinom{15}{9}\left(\dfrac{1}{2}\right)^9\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$

$$P(Z_i=K)=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{1}{2}$$
$$P(Z_i=A)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{12}{12+12}=\frac{1}{2}$$

vi) $P(N(1)=10, Z_1=A, Z_2=A, \dots, Z_{10}=K) \overset{\text{ανεξ.}}{=} e^{-24}\frac{24^{10}}{10!}\underbrace{\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{10 \text{ φορές}}=e^{-24}\frac{12^{10}}{10!}$

vii) $P(N_1(1)=5 \mid N(2)=30)=\frac{P(N_1(1)=5,\ N(2)=30)}{P(N(2)=30)}=$ (δεσμεύω ως προς $N(1)$)

$$=\frac{\sum_{k=5}^{30} P(N_1(1)=5,\ N(1)=k,\ N(2)=30)}{P(N(2)=30)}=\frac{\sum_{k=5}^{30} P(N_1(1)=5,\ N_2(1)=k-5,\ N(2)-N(1)=30-k)}{P(N(2)=30)}$$

(σπάω σε ανεξ. τμ)

$$\overset{\substack{\text{ανεξ.}\\ \text{ισόπ.}\\ \oplus\\ \text{θεωρ.}\\ \text{διάσπασης}}}{=}\frac{\sum_{k=5}^{30} P(N_1(1)=5)P(N_2(1)=k-5)P(N(2)-N(1)=30-k)}{P(N(2)=30)}=$$

$$=\frac{\sum_{k=5}^{30}\cancel{e^{-12}}\frac{12^5}{5!}\cancel{e^{-12}}\frac{12^{k-5}}{(k-5)!}\cdot\cancel{e^{-24}}\frac{(24)^{30-k}}{(30-k)!}}{\cancel{e^{-48}}\frac{(48)^{30}}{30!}}=\frac{30!}{5!\cdot 25!}\frac{12^5}{48^{30}}\sum_{k=5}^{30}\frac{25!\ 12^{k-5}24^{30-k}}{(k-5)!(30-k)!}$$

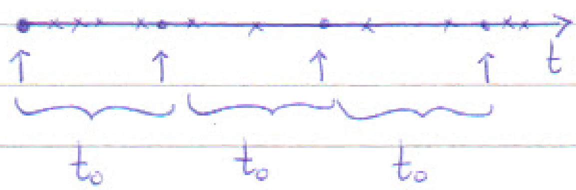
$$=\binom{30}{5}\frac{12^5}{48^{30}}\underbrace{\sum_{k=5}^{30}\binom{25}{k-5}12^{k-5}\,24^{30-k}}_{\| \ k-5=j}=\binom{30}{5}\frac{12^5\cdot 36^{25}}{48^{30}}\cdot 36^{25}$$

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{25}\binom{25}{j}12^{j}\,24^{25-j}}_{\| \ 36^{25}}$$

ΣΜΕΕ 10/3/2017

Διαδικασία Poisson: Ασκήσεις-Εφαρμογές

① Πρόβλημα 1



Σταθμός μεταφορικών μέσων. Επιβάτες φθάνουν σύμφωνα με σδ Poisson ρυθμού λ και τα μέσα φθάνουν κάθε t_0 χρονικές μονάδες

Ποιος είναι ο μακροπρόθεσμος ρυθμός χαμένων ωρών αναμονής;

δηλ. $$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\text{Συνολικού χρόνου αναμονής στο } [0,t]]}{t}$$

$$= \frac{E[\text{Συνολικός χρόνος αναμονής στο } [0,t_0]]}{t_0}$$

$\{N(t)\}$ σδ Poisson των αφίξεων επιβατών και $S_1, S_2, \dots$ οι χρόνοι αφίξεων επιβατών

$$= \frac{E\left[\sum_{i=1}^{N(t_0)} (t_0 - S_i)\right]}{t_0} \quad (*)$$

∇ τυχαίο άθροισμα άρα δεσμεύω ως προς $N(t_0)$

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t_0)} (t_0 - S_i)\right] = E\left[t_0 N(t_0)\right] - E\left[\sum_{i=1}^{N(t_0)} S_i\right] = t_0 E[N(t_0)] - E\left[\sum_{i=1}^{N(t_0)} S_i\right]$$

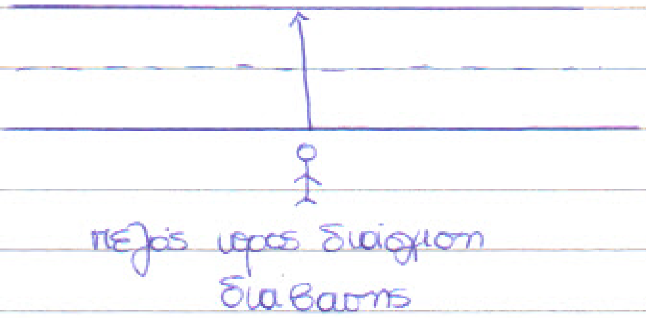
$$\overset{\nabla}{=} t_0 \cdot \lambda t_0 - \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t_0)=n)\, E\left[\sum_{i=1}^{N(t_0)} S_i \,\Big|\, N(t_0)=n\right]$$

Όμως, $$E\left[\sum_{i=1}^{N(t_0)} S_i \,\Big|\, N(t_0)=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} S_i \,\Big|\, N(t_0)=n\right] = \sum_{i=1}^{n} E[S_i \mid N(t_0)=n]$$

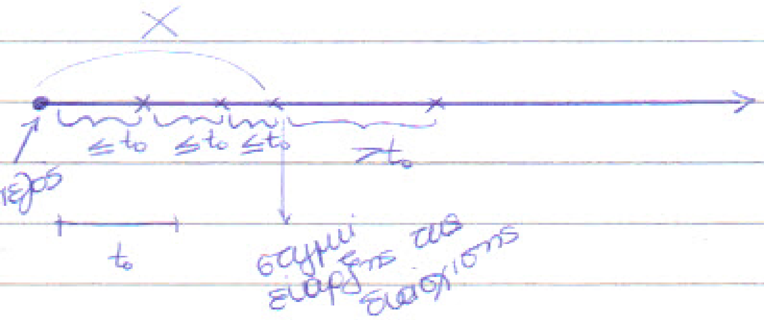
Θεωρ. Campbell $$\sum_{i=1}^{n} E[U_{i:n}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{i t_0}{n+1} = \frac{t_0}{n+1} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{t_0}{\cancel{n+1}} \cdot \frac{n\cdot\cancel{(n+1)}}{2} = \frac{n t_0}{2}$$

$$(*) \Longrightarrow \frac{\lambda t_0^2 - \frac{t_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty} P(N(t_0)=n)\, n}{t_0} = \frac{\lambda t_0^2 - \frac{t_0}{2} E[\overset{\lambda t_0}{\overset{\|}{N(t_0)}}]}{t_0} = \frac{\frac{\lambda t_0^{\cancel{2}}}{2}}{\cancel{t_0}} = \frac{\lambda t_0}{2}$$

② Πρόβλημα 2



Έστω t_0 ο χρόνος διάσχισης
Τα αυτοκίνητα περνάνε τη διάβαση
σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson λ
Ο πεζός αρχίζει τη διάσχιση αν ο
χρόνος της διέλευσης του επόμενου
αυτοκινήτου είναι $> t_0$
Αν X χρόνος για έναρξη της διάσχισης
$E[X] =$;



$\{N(t)\}$ σδ Poisson με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \dots$
$X_1, X_2, \dots$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι των γεγονότων $\sim Exp(\lambda)$ ανεξ.
$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ όπου N αριθμός αυτοκινήτων που θα περάσουν πριν αρχίσω τη διάσχιση

$$P(N=0) = P(X_1 > t_0) = e^{-\lambda t_0}$$

$$P(N=1) = P(X_1 \le t_0, X_2 > t) \overset{\text{ανεξ.}}{=} P(X_1 \le t_0)\, P(X_2 > t) = (1-e^{-\lambda t_0})e^{-\lambda t_0}$$

$$P(N=n) = P(X_1 \le t_0, \dots, X_n \le t_0, X_{n+1} > t_0) \overset{\text{ανεξ.}}{=} (1-e^{-\lambda t_0})^n \, e^{-\lambda t_0}$$

πιθ. επιτυχίας (Γεωμετρική)

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, N=n\right]$$

Έχω $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \,\middle|\, N=n\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid N=n] =$ (δεν είναι ανεξ.)

$$= \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i \mid X_1 \le t_0, \dots, X_n \le t_0, X_{n+1} > t_0\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid X_i \le t_0] =$$

X_i ανεξ.

X_i ισόνομες

εξ ορισμού δεσμευμένη

$$= n \cdot E[X_1 \mid X_1 \le t_0] = n \frac{E[X_1 \mathbb{1}\{X_1 \le t_0\}]}{P(X_1 \le t_0)} =$$

$g(x)$

$$= n \frac{\int_0^\infty x \mathbb{1}\{x \le t_0\} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{f_X} dx}{P(X_1 \le t_0)} = n \frac{\frac{1}{\lambda} \int_0^{t_0} \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx}{P(X_1 \le t_0)} =$$

σ.π.π. Erlang(2,λ)

$$= n \frac{\frac{1}{\lambda} P(\underset{\sim \text{Erlang}(2,\lambda)}{S_2} \le t_0)}{P(X_1 \le t_0)} = n \cdot \frac{\frac{1}{\lambda} P(N(t_0) \ge 2)}{P(X_1 \le t_0)} =$$

$$= n \cdot \frac{\frac{1}{\lambda}\left(1 - P(N(t_0)=0) - P(N(t_0)=1)\right)}{P(X_1 \le t_0)} = n \frac{\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0})}{1 - e^{-\lambda t_0}}$$

Άρα
$$E[X] = \boxed{\sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} (1-e^{-\lambda t_0})^{\cancel{n}\, n-1} e^{-\lambda t_0} \cdot n} \cdot \frac{1}{\lambda} \frac{1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\cancel{1 - e^{-\lambda t_0}}}$$

μέση τιμή γεωμετρικής

$$= \frac{1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda} \cdot \boxed{\frac{1}{e^{-\lambda t_0}}} = \frac{e^{\lambda t_0} - 1}{\lambda} - t_0$$

Εναλλακτικά, (Ανανεωτικός συλλογισμός)

Έστω Y ο χρόνος διέλευσης του πρώτου αυτοκινήτου από τη διάβαση

$Y \sim Exp(\lambda)$

$$E[X] = E[E[X \mid Y]] = \int_0^\infty E[X \mid Y=y] \underbrace{\lambda e^{-\lambda y}}_{f_Y} dy$$

Όμως,
$$E[X \mid Y=y] = \begin{cases} 0, & y > t_0 \\ y + E[X], & y \le t_0 \end{cases}$$

$P(S_2 \le t_0)$ $\qquad$ $P(Y \le t_0)$

Άρα,
$$E[X] = \int_0^{t_0} (y + E[X]) \lambda e^{-\lambda y} dy = \int_0^{t_0} y \lambda e^{-\lambda y} dy + E[X] \int_0^{t_0} \lambda e^{-\lambda y} dy$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda} + E[X](1 - e^{-\lambda t_0})$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda e^{-\lambda t_0}}$$ ίδιο με πριν

③ Άσκηση 1

$\{N(t)\}$ ΣΔ Poisson με ρυθμό λ και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι γεγονότων

$E[S_1 \mid N(t) \geq 1] = ;$

1ος τρόπος:

$$E[S_1 \mid N(t) \geq 1] = \sum_{n=0}^{\infty} E[S_1 \mid N(t)=n, N(t)\geq 1]\, P(N(t)=n \mid N(t)\geq 1) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[S_1 \mid N(t)=n] \frac{P(N(t)=n)}{\underbrace{P(N(t)\geq 1)}_{=1-P(N(t)=0)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{E[U_{1:n}]}_{=\frac{t}{n+1}} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!}{1-e^{-\lambda t}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}}{1-e^{-\lambda t}} = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} (e^{+\lambda t} - \lambda t - 1)$$

2ος τρόπος:

$$\underbrace{E[S_1]}_{=\frac{1}{\lambda}} = \underbrace{P(N(t)\geq 1)}_{=1-e^{-\lambda t}} E[S_1 \mid N(t)\geq 1] + \underbrace{P(N(t)=0)}_{=e^{-\lambda t}} \underbrace{E[S_1 \mid N(t)=0]}_{=t+\frac{1}{\lambda}}$$

λύνω ως προς $E[S_1 \mid N(t) \geq 1]$

ΣΜΕΕ 15/03/2017

Στοχαστική Διαδικασία Poisson: Ασκήσεις

① $M/G/\infty$ άρα

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- Χρόνοι παραμονής πελατών ανεξ και ισον με κατανομή $G(x)$
- $M(t)=$ πλήθος παρόντων πελατών τη στιγμή t

$P(M(t)=n)=;$ η $E[M(t)]=;$ η $\lim_{t\to\infty} P(M(t)=n)=;$ η $\lim_{t\to\infty} E[M(t)]=;$

Λύση:

1ος τρόπος:

Έστω $N(t)$: δδ Poisson των αφίξεων των πελατών με χρόνους αφίξεων $S_1, S_2, \dots$ και ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αφίξεων $X_1, X_2, \dots$

Έστω $Y_1, Y_2, \dots$ ανεξ + ισον $\sim G(x)$ οι χρόνοι παραμονής των πελατών

Τότε

$$M(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} 1\{\underbrace{\overset{\text{πότε ήρθε}}{S_i}+\overset{\text{πόσο έκατσε}}{Y_i}}_{\text{χρόνος αναχώρησης του } i\text{-πελάτη}} > t\}$$

$$P(M(t)=n)=P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} 1\{S_i+Y_i>t\}=n\right)=\sum_{m=0}^{\infty} \overset{P(N(t)=m)}{P}\left(\sum_{i=1}^{\overset{m}{N(t)}} 1\{S_i+Y_i>t\}=n \,\middle|\, N(t)=m\right)$$

! S_i και N εξαρτώνται

Θ Campbell

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(N(t)=m) \; P\left(\sum_{i=1}^{m} 1\{U_{i:m}+Y_i>t\}=n\right) =$$

! Αν $f(x_1,\dots,x_n)$ συμμετρική, τότε $f(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$

! $\sum_{i=1}^{m} 1\{U_{i:m}+Y_i>t\} \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{m} 1\{U_i+Y_i>t\}$

$$=\sum_{m=0}^{\infty} P(N(t)=m)\; P\Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \underbrace{1\{U_i+Y_i>t\}}_{=\,I_i}}_{Bin(m,p(t))}=n\Bigg) =$$

ανεξ. και $I_i=\begin{cases} 1, & \text{με πιθ. } P(U_i+Y_i>t) \\ 0, & \text{με πιθ. } P(U_i+Y_i\le t)\end{cases}$

$$\stackrel{?}{} P(U_i+Y_i>t) \overset{\text{δεσμ. στη } U_i}{=} \int_0^t P(U_i+Y_i>t \mid U_i=u) f_{U_i}(u)\,du = \int_0^t P(Y_i>t-u)\frac{1}{t}\,du$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t (1-G(t-u))\,du = p(t)$$

Άρα, $P(M(t)=n) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!}\binom{m}{n} p(t)^n (1-p(t))^{m-n}$

$$= e^{-\lambda t} p(t)^n \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{\cancel{m!}} \frac{\cancel{m!}}{n!\,(m-n)!} (1-p(t))^{m-n}$$ Θέτω $m-n=j$

$$= \frac{e^{-\lambda t} p(t)^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+j}(1-p(t))^j}{j!} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t p(t))^n}{n!} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{[(\lambda t)(1-p(t))]^j}{j!}}_{e^{\lambda(t)(1-p(t))}}$$

$$= e^{-\lambda t p(t)} \frac{(\lambda t p(t))^n}{n!}, \quad n=0,1,2,\dots \Rightarrow M(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t p(t))$$

Άρα,
$E[M(t)] = \lambda t p(t)$ κλπ.

Το $E[M(t)]$ μπορεί να υπολογισθεί απευθείας:

$$E[M(t)] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} 1\{S_i+Y_i>t\}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} P(N(t)=m)\, E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} 1\{S_i+Y_i>t\} \,\middle|\, N(t)=m\right]$$

$$\overset{\text{Campbell}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} P(N(t)=m)\, E\left[\sum_{i=1}^{m} 1\{U_{i:m}+Y_i>t\}\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P(N(t)=m) \sum_{i=1}^{m} P(U_{i:m}+Y_i>t) = \sum_{m=0}^{\infty} P(N(t)=m) \overbrace{\sum_{i=1}^{m} \underbrace{P(U_i+Y_i>t)}_{p(t)}}^{m\cdot p(t)} =$$

$$= E[N(t)]\, p(t)$$

2ος τρόπος (με το θεώρημα μη ομογενούς διάσπασης)

$\{N(t)\}$ Poisson με ρυθμό λ

Κάθε γεγονός που συμβαίνει τη στιγμή x καταγράφεται με $p(x)$ και $\{N_1(t)\}$ η διαδικασία των καταγεγραμμένων γεγονότων τότε $\{N_1(t)\}$ μη ομογενής Poisson ρυθμού $\lambda p(x)$

Έστω $\{N(x)\}$ η σ.δ. των αφίξεων (ομογ. Poisson ρυθμού λ)

Έστω t συγκεκριμένη χρονική στιγμή

Ένας πελάτης που φθάνει σύμφωνα με τη $\{N(x)\}$ "καταγράφεται" αν είναι παρών τη στιγμή t.

Άρα $N_1(x)$ = # καταγεγραμμένων πελατών μέχρι τη στιγμή x

= # πελατών που αφίχθηκαν στο $[0, x]$ και είναι παρόντες τη στιγμή t

$$p(x) = \begin{cases} P(x+Y>t) & x \le t \\ 0 & x > t \end{cases} = \begin{cases} 1 - G(t-x) & , x \le t \\ 0 & , x > t \end{cases}$$

Άρα από Θ. μη ομογ. διάσπασης $\{N_1(t)\}$ είναι Poisson με ρυθμό $\lambda p(x)$

$$M(t) = N_1(t) \sim \text{Poisson}\left(\int_0^t \lambda p(x)\,dx\right)$$

Άρα $M(t) \sim \text{Poisson}\left(\lambda \int_0^t (1 - G(t-x))\,dx\right)$

∇ sos

(2) Άσκηση:

$\{N(t)\}$ (μη) ομογενής δδ Poisson ρυθμού $\lambda(t)$

$S_n \stackrel{d}{=}$;

$(S_1 \mid N(t)=1) \stackrel{d}{=}$;

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \le t) = P(N(t) \ge n) \overset{N(t) \sim Poisson\left(\overbrace{\int_0^t \lambda(x)dx}^{\Lambda(t)}\right)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^k}{k!}$$

$$f_{S_n}(t) = F_{S_n}'(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\left(-\lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^k}{k!}\right) + \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(t)} \frac{\cancel{k}(\Lambda(t))^{k-1}\lambda(t)}{\cancel{k!}\,(k-1)!} \quad j=k-1$$

$$= -\sum_{k=n}^{\infty} \lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^k}{k!} + \sum_{j=n-1}^{\infty} \lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^j}{j!}$$

$$= \lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t>0$$

Όταν $\lambda(t)=\lambda$, παίρνω την σππ της Erlang(n,λ): $f_{S_n} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}$

$$F_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = P(S_1 \le x \mid N(t)=1)$$

Είναι $F_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ ;, & 0<x<t \\ 1, & x \ge t \end{cases}$

Για $0<x<t$: $F_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = P(N(x) \ge 1 \mid N(t)=1) = P(N(x)=1 \mid N(t)=1)$

$$= \frac{P(N(x)=1, N(t)=1)}{P(N(t)=1)} = \frac{P(N(x)=1, N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)} \underset{\text{αυξ.}}{\overset{\text{ανεξ.}}{=\!=}} \frac{P(N(x)=1)P(N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{e^{-\Lambda(x)} \frac{\Lambda(x)^1}{1!} e^{-(\Lambda(t)-\Lambda(x))} \frac{(\Lambda(t)-\Lambda(x))^0}{0!}}{e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)^1}{1!}} = \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)}$$

! $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$

Γενικά, $F_{S_1|N(t)=1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)}, & 0 < x < t \\ 1, & x \ge t \end{cases}$

Στην ομογενή, $F_{S_1|N(t)=1} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 1, & x \ge t \end{cases}$

$(S_1 | N(t)=1) \sim Uniform([0,t])$

③ Άσκηση

$\{N(t)\}$ σδ Poisson ρυθμού λ

$Cov(N(t), N(s)) = ;$

Έστω $t<s$ $\quad Cov(N(t),N(s)) = E[N(t)N(s)] - \underset{\lambda t}{E[N(t)]}\,\underset{\lambda s}{E[N(s)]} =$

$= E[N(t)(N(t)+(N(s)-N(t)))] - \lambda^2 ts = E[N(t)^2] + E[N(t)(N(s)-N(t))] - \lambda^2 ts$

ανεξ. προσ. (ομ. αρ.)

$= E[N(t)^2] + \underset{\lambda t}{E[N(t)]}\,\underset{\lambda(s-t)}{E[N(s)-N(t)]} - \lambda^2 ts = V[N(t)] + E[N(t)]^2 + \lambda^2 t(s-t) -$

$- \lambda^2 ts = \lambda t + (\lambda t)^2 + \lambda^2 t(s-t) - \lambda^2 ts = \lambda t$

ή (με ιδιότητες συνδιακύμανσης)

$Cov(N(t),N(s)) = Cov(N(t), N(t) + (N(s)-N(t))) = Cov(N(t),N(t)) +$

$+ \cancel{Cov(N(t), N(s)-N(t))} = V(N(t)) = \lambda t.$

λόγω ανεξ.

Για $s<t$, $Cov(N(t),N(s)) = \lambda s$. Άρα γενικά, $Cov(N(t),N(s)) = \lambda \min(t,s)$