Στοχαστικές Μέθοδοι στη Ε.Ε. 24/02/17

Στοχαστική Διαδικασία Poisson:

① Διαίσθηση: • $\{N(t)\}$ σ.δ.

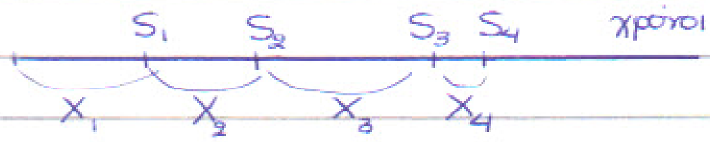
• $N(t)$: # γεγονότων στο $(0,t]$ που συμβαίνουν "εντελώς τυχαία" με ρυθμό λ

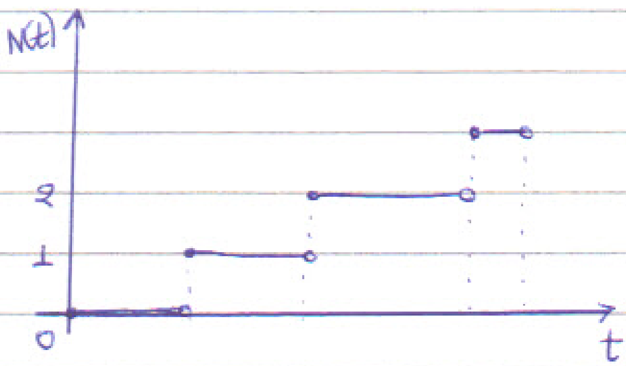
1η ιδιότητα: Δεδομένης χρονικής στιγμής t, $\{N(s): 0 \leq s \leq t\}$ και $\{N(u)-N(t): u>t\}$ ανεξάρτητα

2η ιδιότητα: Μέσος ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών γεγονότων $= \frac{1}{\lambda}$

② Ορισμός I (Ανανεωτικός): Έστω $X_1, X_2, \ldots \sim Exp(\lambda)$ ανεξ. και $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$,

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}$$





Τότε $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ.

③ Βασικές Ιδιότητες:

1) S_n: χρόνος του n-οστού γεγονότος $\sim Erlang(n,\lambda)$

σ.π.π. $f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, \ t>0$

σ.κ. $F_{S_n}(t) = \int_0^t f_{S_n}(u)du = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \ t>0$

$P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n) = 1 - P(N(t) \leq n-1)$

$E(S_n) = \frac{n}{\lambda}$

$Var(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}$

3) $N(t) =$ # γεγονότων ως τη στιγμή t

σ.π. $P(N(t)=n) = P(S_n \le t < S_{n+1}) = P(\{S_n \le t\} \cap \{S_{n+1} \le t\}^c) =$

$AB^c,\ B \subseteq A$

$$= P(S_n \le t) - P(S_{n+1} \le t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - 1 + \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

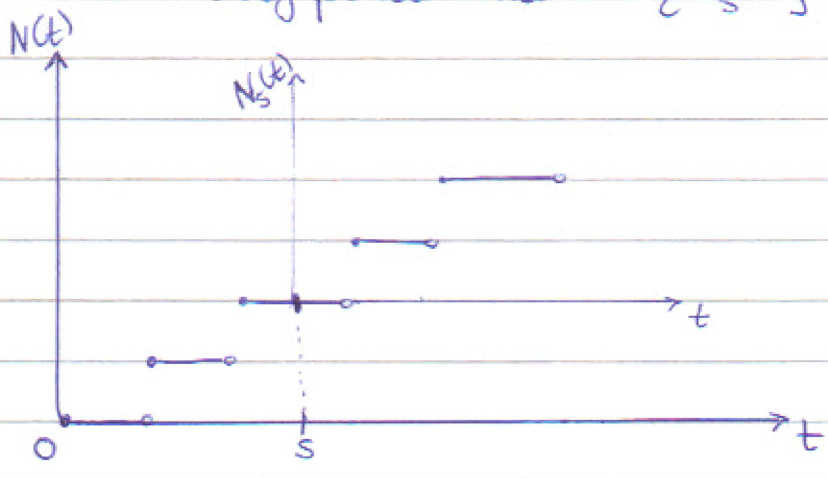
Άρα, $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ και $E[N(t)] = Var[N(t)] = \lambda t$

σ.δ. Poisson με ρυθμό λ $\{N(t)\}$ και ικανοποιεί τον ορισμό I $\longleftrightarrow$ τ.μ. Poisson με ρυθμό λ $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, n=0,1,\dots$

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda \Rightarrow \forall\, t \ge 0$, $N(t)$ τ.μ. Poisson(λt)

4) Αναγεννητική ιδιότητα της σ.δ. Poisson:

Θεώρημα: $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ και $s \ge 0$ χρον. στιγμή τότε $\{N(u): 0 \le u \le s\}$ και $\{N_s(u): u \ge 0\}$ με $N_s(u) = N(s+u) - N(s)$ ανεξάρτητες και η $\{N_s(u)\}$ είναι σ.δ. Poisson ρυθμού λ



Απόδειξη: eclass πράσινες σημειώσεις

Βασική ιδέα: Αν $N(s)=k$, τότε η $\{N(u): 0\le u\le s\}$ καθορίζεται από $X_1, X_2, \dots, X_k$ και $\{X_1+X_2+\dots+X_{k+1}>s\}$

Η $\{N_s(u): u\ge 0\}$ καθορίζεται από $X_{k+2}, X_{k+3}, \dots$ και $X_{k+1}-(s-X_1-\dots-X_k)$ δεδομένου ότι $X_{k+1}>s-X_1-\dots-X_k$

οπότε έχω τη ζητούμενη ανεξαρτησία (λόγω ισχύος αμνημοσύνης για τη X_{k+1})

(5) Απαριθμήτριες διαδικασίες:

$\{N(t)\}$ απαριθμήτρια σ.δ. $\Leftrightarrow$ Οι τιμές των $\{N(t)\}$ είναι $0,1,\dots$ και $N(t)\uparrow$ ως προς t

Μια απαριθμήτρια σ.δ. $\{N(t)\}$ έχει

- ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν $\forall\, t_1<t_2<\dots<t_n$ οι τ.μ. $N(t_1), N(t_2)-N(t_1), \dots, N(t_n)-N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες

  ανεξ. κατάν. σε ξένα διαστήματα

- ομογενείς προσαυξήσεις αν $\forall\, t,s$ η κατανομή της $N(t+s)-N(s)$ δεν εξαρτάται από το s

  ανεξ. κατ. από τα άκρα του διαστ. / εξαρτ. από μήκος

(6) Ορισμός II (Ολικός):

Αν $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια σ.δ. και έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις και $N(t)\sim \text{Poisson}(\lambda t)$ τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται σ.δ. Poisson με ρυθμό λ.

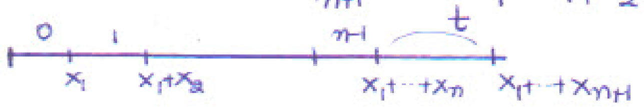
(7) Ισοδυναμία ορισμών I και II

(I)$\Rightarrow$(II): Αναγεννητική ιδιότητα + βασική ιδιότητα (2)

(II)$\Rightarrow$(I): Έστω $\{N(t)\}$ όπως στον ορισμό II και $X_1, X_2, \dots$ οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων.

$$P(X_1>t)=P(N(t)=0)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!}=e^{-\lambda t}\Rightarrow X_1\sim Exp(\lambda)$$

$$P(X_{n+1}>t \mid X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n)= \dots$$



$= P\big(0$ γεγονότα στο $(x_1+\dots+x_n,\ x_1+\dots+x_n+t]\ \big|\$ ιστορία της $N(t)$ στο $[0, x_1+\dots+x_n]\big)$

λόγω ανεξ. προσαυξήσεων

$= P(N(t)=0) = e^{-\lambda t} \Longrightarrow X_{n+1} \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ ανεξ. από τις $X_1,\dots,X_n$

$\downarrow$
λόγω ομογένειας (εξαρτάται από το μήκος του διαστήματος μόνο και όχι την αρχή)

8) Ορισμός III (Τοπικός):

Αν $\{N(t)\}$ απαριθμητική σ.δ. με ανεξ. και ομ. προσαυξήσεις και

$$P(N(h)=n) = \begin{cases} 1-\lambda h + o(h), & n=0 \\ \lambda h + o(h), & n=1 \\ o(h), & n\geq 2 \end{cases}$$

όπου $o(h)$ τ.ω. $\lim_{h\to 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$, τότε $\{N(t)\}$ λέγεται σ.δ. Poisson ρυθμού λ.

9) Ισοδυναμία ορισμών II και III:

(II)$\Rightarrow$(III): $P(N(h)=0) = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^0}{0!} = e^{-\lambda h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^k}{k!} = 1-\lambda h + o(h)$

$$P(N(h)=1) = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^1}{1!} = (1-\lambda h + o(h))\lambda h = \lambda h \underbrace{-\lambda h^2 + h\cdot o(h)} = \lambda h + o(h)$$

$$P(N(h)=n) = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^n}{n!} = o(h), \quad n\geq 2$$

(III)$\Rightarrow$(II): $p_n(t) = P(N(t)=n)$

Κοιτάζω την εξέλιξη της $N(t)$ στο διάστημα $[0,t+h] = [0,t]\cup[t,t+h]$

$$p_0(t+h) = p_0(t)\cdot p_0(h) = p_0(t)\,(1-\lambda h + o(h))$$

$$\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h}$$

$$\xrightarrow{h\to 0^+} \quad p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} p_0(t) = c\,e^{-\lambda t} \\ p_0(0) = 1 = c \end{array}\right\} \ p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Για $n \geq 1$: $p_n(t+h) = p_n(t) \cdot \overbrace{p_0(h)}^{1-\lambda h + o(h)} + p_{n-1}(t) \cdot \overbrace{p_1(h)}^{\lambda h + o(h)} + \overbrace{\sum_{k=2}^{n} p_{n-k}(t) p_k(h)}^{= o(h)}$

$$\Rightarrow p_n(t+h) = p_n(t) - \lambda h p_n(t) + p_{n-1}(t) \lambda h + o(h)$$

$$\Rightarrow \frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

$$\xRightarrow{h \to 0^+} p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$$

Έχουμε $p_0(t) = e^{-\lambda t}$

$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_n(t) \Rightarrow e^{\lambda t} \cdot p_n'(t) + e^{\lambda t} \cdot \lambda p_n(t) = e^{\lambda t} \cdot \lambda p_{n-1}(t) \Rightarrow$

$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} p_n(t)\right) = \lambda p_{n-1}(t) e^{\lambda t} \Rightarrow e^{\lambda t} p_n(t) = \int_0^t \lambda e^{\lambda u} p_{n-1}(u)\, du \Rightarrow$

$p_n(t) = e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda e^{\lambda u} p_{n-1}(u)\, du$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση δείχνω με επαγωγή ότι $p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n = 0, 1, \dots$

! Όχι θεωρητικά θέματα στις εξετάσεις

Στοχαστικές Μέθοδοι στη Ε.Ε. 1/3/2017

① Υπενθυμίσεις (Ορισμοί):

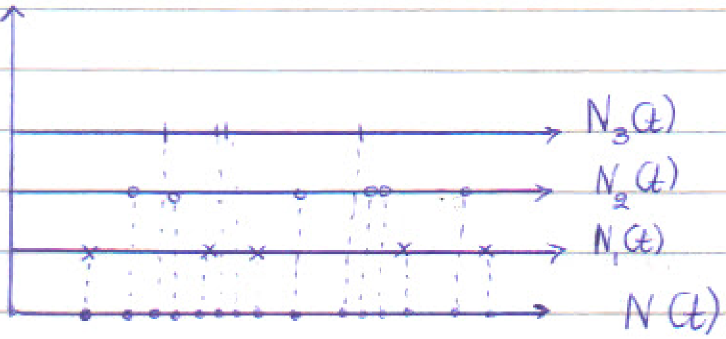
$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ

$\overset{\varphi.1}{\iff}$ Χρόνοι μεταξύ των γεγονότων $\sim Exp(\lambda)$ ανεξ.

$\overset{\varphi.2}{\iff}$ Ανεξ. και ομογενείς προσαυξήσεις ~

$\overset{\varphi.3}{\iff}$ Ανεξ. και ομογ. προσαυξήσεις $P(N(t+h)=i+n \mid N(t)=i) = \begin{cases} \lambda h + o(h), & n=1 \\ 1-\lambda h + o(h), & n=0 \\ o(h) & n\geq 2 \end{cases}$

② Υπέρθεση διαδικασιών Poisson:

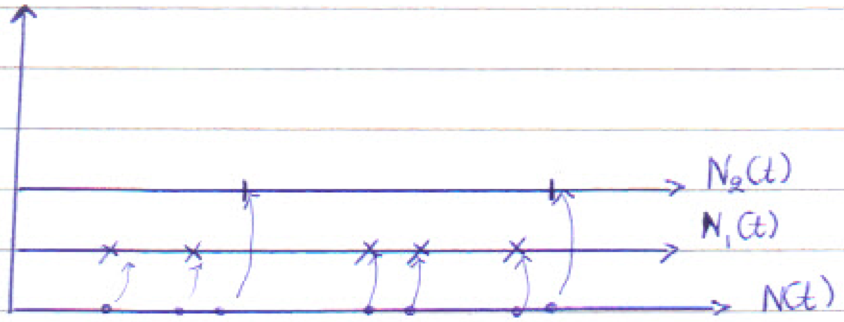


Ορ: Έστω $\{N_i(t)\}$ $i=1,2,\dots$ απαριθμήτριες σ.δ./σ.δ. Poisson και $N(t)=\sum_i N_i(t)$. Τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται υπέρθεση των $\{N_i(t)\}$

Θεώρημα: Αν $\{N_i(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ_i και ανεξάρτητες, τότε η υπέρθεση τους $\{N(t)\}$ είναι σ.δ. Poisson ρυθμού $\sum_i \lambda_i$ και κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ προέρχεται από την $\{N_i(t)\}$ με πιθ. $\lambda_i / \sum_j \lambda_j$

Αν $\{Z_k = i\}$ = k-οστό γεγονός της $\{N(t)\}$ προέρχεται από τη $\{N_i(t)\}$ τότε $Z_1, Z_2, \dots$ είναι ανεξ. ισον. και $P(Z_k=i)=\frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j}$

③ Διάσπαση διαδικασίας Poisson



Ορσ: Έστω $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια σ.δ. και $Z_1, Z_2, \dots$ ανεξ. και ισον. με πιθ.
$P(Z_k = i) = p_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

πιθ. το κάθε γεγονός να είναι τύπου i

Αν $N_i(t) = \#$ γεγονότων τύπου $i = \sum_{k=1}^{N(t)} 1\{Z_k = i\}$ τότε λέμε ότι οι $\{N_i(t)\}$ $i=1,2,\dots,k$ αποτελούν διάσπαση της $\{N(t)\}$.

Θεώρημα: $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson και κάθε γεγονός καταγράφεται ως τύπου i με πιθ. p_i, ανεξ. από τα υπόλοιπα και $N_i(t) = \#$ γεγονότων τύπου i στο $(0,t]$, τότε $\{N_i(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λp_i, $i=1,\dots,k$ και $\{N_i(t)\}$ $i=1,2,\dots,k$ ανεξ.

! $X_1, X_2, \dots \sim Exp(\lambda)$ και $P(N=k) = (1-p)^{k-1} p$, $k \geq 1$
τότε $\sum_{k=1}^{N} X_i \sim Exp(\lambda p)$

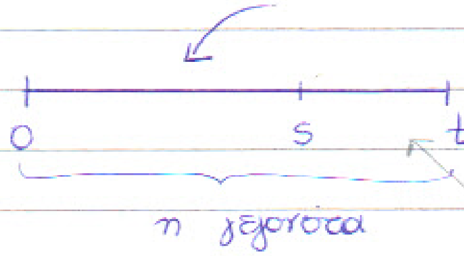
\+ ορισμός I

④ Ασκήσεις:

- $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ

  $0<s<t$

  $N(s) \mid N(t)=n \sim Bin\left(n, \frac{s}{t}\right)$



Απόδ: $$P\left(N(s)=k \mid N(t)=n\right)=\frac{P(N(s)=k, N(t)=n)}{P(N(t)=n)}=\frac{P(N(s)=k, N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} \underset{\text{προσαυξ.}}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}}$$

$$= \frac{P(N(s)=k)\,P(N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} \underset{\text{ιδιότ.}}{\overset{\text{ομογ.}}{=}} \frac{P(N(s)=k)\,P(N(t-s)=n-k)}{P(N(t)=n)} =$$

$$\overset{N(t)\sim Poisson(\lambda t)}{=} \frac{\cancel{e^{-\lambda s}} \frac{(\lambda s)^k}{k!}\, e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}}{\cancel{e^{-\lambda t}} \frac{(\lambda t)^n}{n!}} = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n$$

ομογ. προσ. $\Rightarrow$ $N(b)-N(a)=$ # γεγονότων στο $(a,b] \overset{\text{ομ. πρ.}}{=}$ # γεγονότων σε διάστημα $b-a$

$= N(b-a)-\cancel{N(0)} = N(b-a)$

$$N(b)-N(a) \overset{d}{=} N(b-a)$$

- $\{N_1(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ_1

  $\{N_2(t)\}$ σ.δ. —//— λ_2 ανεξ.

  και $\{N(t)\}$ υπέρθεση τους

$$N_1(t) \mid N(t)=n \sim Bin\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

Απόδ: $$P\left(N_1(t)=k \mid N(t)=n\right)=\frac{P(N_1(t)=k, N(t)=n)}{P(N(t)=n)}=\frac{P(N_1(t)=k,\ \overset{N(t)-N_1(t)}{\overset{\parallel}{N_2(t)}}=n-k)}{P(N(t)=n)}=$$

$$\underset{\text{ανεξ.}}{\overset{N_1, N_2}{=}} \frac{P(N_1(t)=k)\,P(N_2(t)=n-k)}{P(N(t)=n)} = \frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^k/k!\ e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^{n-k}/(n-k)!}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\left((\lambda_1+\lambda_2)t\right)^n/n!}$$

$$= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}, \quad 0 \le k \le n$$

• $\{N_1(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ_1
$\{N_2(t)\}$ ——//—— λ_2 ανεξ.

$S_k^{(i)}$ = χρόνος του k-οστού γεγονότος της $\{N_i(t)\}$, $k=1,2,\dots$, $i=1,2$

αριθμός γεγονότων τύπου 1 μέχρι να συμβεί το πρώτο γεγονός τύπου 2

$N_1(S_1^{(2)})$ = αριθμός γεγονότων $\{N_1(t)\}$ μέχρι το 1ο γεγονός της $\{N_2(t)\}$

είναι $P(N_1(S_1^{(2)})=k) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right) \quad k=0,1,\dots$

Αποδ: 1ος τρόπος (χωρίς χρήση θεωρήματος υπέρθεσης)

$$P(N_1(\underbrace{S_1^{(2)}}_{\sim Exp(\lambda_2)})=k) \overset{ΘΟΠ}{=} \int_0^\infty P(N_1(t)=k \mid S_1^{(2)}=t)\,\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\,dt \overset{N_1(t) \text{ και } N_2(t) \text{ ανεξ}}{=} \int_0^\infty P(N_1(t)=k)\,\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\,dt = \frac{\lambda_1^k \lambda_2}{k!\,(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}} \int_0^\infty \underbrace{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1} t^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}_{\text{σππ Erlang}(k+1,\,\lambda_1+\lambda_2)}\,dt =$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

2ος τρόπος (θεώρημα υπέρθεσης)

Έστω $\{N(t)\}$ υπέρθεση των $\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}$ και $Z_1, Z_2, \dots$ οι τύποι των γεγονότων της

$$P(N_1(S_1^{(2)})=k) = P(Z_1=1, Z_2=1, \dots, Z_k=1, Z_{k+1}=2) \overset{ανεξ}{=} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

ΣΜΕΕ Ι 3/3/17

Διαδικασία Poisson (Θεώρημα Campbell)

① Πρόβλημα: S_n = χρόνος n-οστού γεγονότος $\sim Erlang(n,\lambda)$

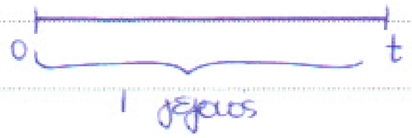
$(S_k \mid N(t)=n)$ = χρόνος k-οστού γεγονότος δεδομένου ότι στο $(0,t]$ έχω n γεγονότα

Πιο γενικά: $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ

$S_1, S_2, \dots$ οι χρόνοι των γεγονότων

$(S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n) \sim$;

Διαίσθηση: $n=1$



πού έχει συμβεί αυτό το γεγονός;

$(S_1 \mid N(t)=1) \sim$;

Εικασία: $(S_1 \mid N(t)=1) \sim Uniform([0,t])$

$E(S_1 \mid N(t)=1) = \frac{t}{2}$

Απόδ: $F_{S_1|N(t)=1}(x) = P(S_1 \le x \mid N(t)=1) =$ ______

· $x<0$: $=0$

· $x>t$: $=1$

· $0 \le x \le t$: $= P(N(x) \ge 1 \mid N(t)=1) = \frac{P(N(x)\ge 1, N(t)=1)}{P(N(t)=1)} = \frac{P(N(x)=1, N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$

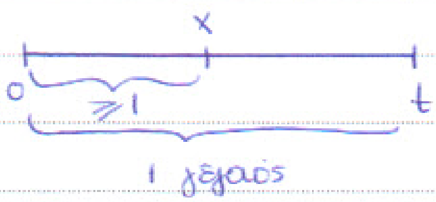
∇ $\boxed{\{S_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}}$

ο χρόνος του n-οστού γεγονότος πριν το t

(μπορεί και π.χ. το S_{n+1} να έχει συμβεί πριν το t)

$= \frac{P(N(x)=1, N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$

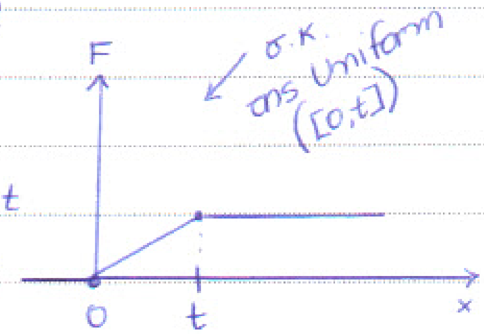
$\overset{\text{ανεξ. προσ.}}{=} \frac{P(N(x)=1)P(N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$



$\overset{\text{στάσ. προσ.}}{=} \frac{\cancel{e^{-\lambda x}} \frac{\lambda x}{1!} \cancel{e^{-\lambda(t-x)}} \frac{[\lambda(t-x)]^0}{0!}}{\cancel{e^{-\lambda t}} \frac{\lambda t}{1!}}$

$= \frac{x}{t}$

Άρα, $F_{S_1|N(t)=1}(x) = P(S_1 \le x \mid N(t)=1) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x}{t}, & 0 \le x \le t \\ 1, & x>t \end{cases}$



② **Θεώρημα Campbell:**

Αν $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \dots$ τότε

$$(S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n) \stackrel{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})$$

όπου $U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n}$ είναι οι διατεταγμένες τ.μ. από ανεξάρτητες ισόνομες $U_1, U_2, \dots, U_n \sim Uniform([0,t])$.

③ Διατεταγμένες τ.μ. – Σύνοψη Θεωρίας:

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.μ. συν. Ορίζω $X_{i:n}$: η i-οστή μικρότερη από αυτές
"i-οστή διατεταγμένη"

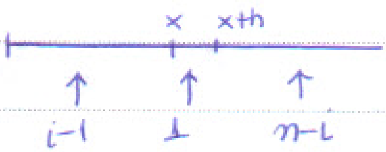
π.χ. $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$,
$X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$

Αν ξέρω τη σκ της $(X_1, \dots, X_n)$ μπορώ να βρω τη σ.κ. της $(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$;
Γενικά όχι. Ναι όμως, αν $X_1, \dots, X_n$ ανεξ και ισον. με σ.κ. $F(x)$ και σ.π.π. $f(x)$.

• $F_{X_{i:n}}(x) = P(X_{i:n} \le x) = P($τουλάχιστον i από τις $X_1, \dots, X_n$ να έχουν τιμή $\le x)$
$$= \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} (F(x))^k (1-F(x))^{n-k}$$

$f_{X_{i:n}}(x) = F'_{X_{i:n}}(x) = \dots$

• $$f_{X_{i:n}}(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P(x \le X_{i:n} \le x+h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\binom{n}{i-1}\binom{n-i+1}{1} F(x)^{i-1} [F(x+h) - F(x)] (1-F(x))^{n-i}}{h}$$



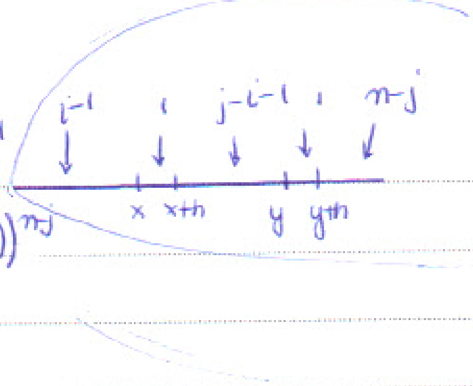
$$= \frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!} F(x)^{i-1} f(x) (1-F(x))^{n-i}$$

Άρα, $X_1, \dots, X_n$ σκ $F(x)$ σππ $f(x)$

$$F_{i:n}(x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F(x)^k (1-F(x))^{n-k}$$

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!} F(x)^{i-1} f(x) (1-F(x))^{n-i}$$

$$f_{X_{i:n},X_{j:n}}(x,y)=\begin{cases}0 & y<x\\[4pt] \dfrac{n!}{(i-1)!\,1!\,(j-i-1)!\,1!\,(n-j)!}F(x)^{i-1}f(x)\big(F(y)-F(x)\big)^{j-i-1}\cdot f(y)\big(1-F(y)\big)^{n-j} & x\le y\end{cases}\qquad i<j$$



• από κοινού σ.π.π.

$$f_{X_{1:n},\dots,X_{n:n}}(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}n!\,f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) & , x_1\le x_2\le\dots\le x_n\\ 0 & , \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

④ Διατεταγμένες τ.μ. από ομοιόμορφες, ανεξ. και ισον.

$U_i \sim \text{Uniform}([0,t])$

$$F(x)=\begin{cases}0 & , x<0\\ \frac{x}{t} & , 0\le x\le t\\ 1 & , x>t\end{cases}\quad \text{και}\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{t} & , 0\le x\le t\\ 0 & , \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

$$F_{U_{i:n}}(x)=\sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{t}\right)^k\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-k}\quad ,0\le x\le t$$

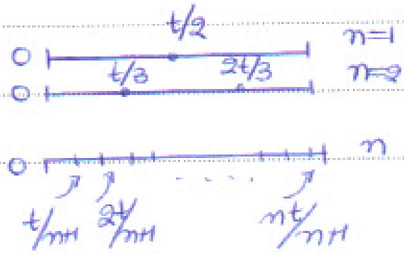
$$f_{U_{i:n}}(x)=\frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!}\left(\frac{x}{t}\right)^{i-1}\frac{1}{t}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-i}\quad ,0\le x\le t$$

$$f_{U_{1:n},U_{2:n},\dots,U_{n:n}}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{cases}\frac{n!}{t^n} & , 0\le x_1<x_2<\dots<x_n\le t\\ 0 & , \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

$$E\left[U_{i:n}\right]=\int_0^t x\, f_{U_{i:n}}(x)\,dx=\frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!}\,\frac{1}{t}\int_0^t x\left(\frac{x}{t}\right)^{i-1}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-i}dx$$

$$\underline{\underline{\frac{x}{t}=u}}\quad \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\cdot t\cdot\underbrace{\int_0^1 u^i(1-u)^{n-i}\,du}_{B(i+1,\,n-i+1)=\frac{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n+2)}}=\frac{n!\,t}{(i-1)!\,\cancel{(n-i)!}}\cdot\frac{i!\,\cancel{(n-i)!}}{(n-1)!}$$

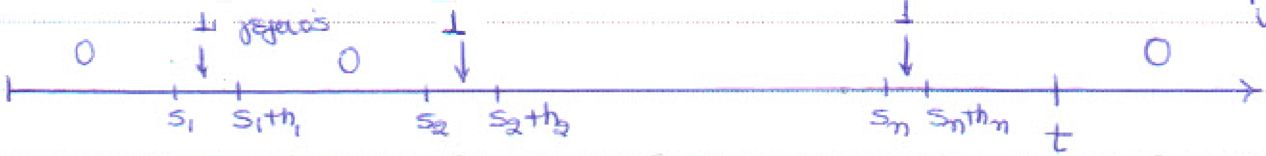
$$=\frac{i\cdot t}{n+1}\implies E\left[U_{i:n}\right]=\frac{i\cdot t}{n+1}$$



(5) Απόδειξη Θεωρήματος Campbell:

$$f_{S_1,S_2,\dots,S_n \mid N(t)=n}(s_1,s_2,\dots,s_n) = \lim_{h_1,\dots,h_n \to 0^+} \frac{P(s_1<S_1\le s_1+h_1,\dots,s_n<S_n\le s_n+h_n \mid N(t)=n)}{h_1\cdots h_n}$$

$$= \lim_{h_1,\dots,h_n \to 0^+} \frac{P(s_1<S_1\le s_1+h_1,\dots,s_n<S_n\le s_n+h_n,\ N(t)=n)}{h_1\cdots h_n\ P(N(t)=n)}$$



(μεταφράζω πόσα γεγονότα έχω σε κάθε διάστημα, όπα σε τα πάνω σε N)

$P(N(s_1)=1)\,P(N(h_1)=1)\,P(N(s_2-s_1-h_1)=0)\,P(N(h_2)=1)\dots P(N(h_n)=1)\,P(N(t-s_n-h_n)=0)$

$$= \lim_{h_1,\dots,h_n \to 0^+} \frac{\cancel{e^{-\lambda s_1}}\ \cancel{e^{-\lambda h_1}}\ \lambda \cancel{h_1}\ \cancel{e^{-\lambda(s_2-s_1-h_1)}}\ \cancel{e^{-\lambda h_2}}\ \lambda \cancel{h_2}\cdots \cancel{e^{-\lambda h_n}}\ \lambda \cancel{h_n}\ \cancel{e^{-\lambda(t-s_n-h_n)}}}{\cancel{h_1}\cancel{h_2}\cdots\cancel{h_n}\ \cancel{e^{-\lambda t}}\ \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \lim_{h_1,\dots,h_n \to 0^+} \frac{\lambda^n}{\lambda^n \frac{t^n}{n!}} = \frac{n!}{t^n} = f_{U_{1:n},U_{2:n},\dots,U_{n:n}}(s_1,s_2,\dots,s_n)$$

(6) Πρακτική σημασία Θ. Campbell

Για υπολογισμούς είναι: $P((S_1,\dots,S_n)\in A \mid N(t)=n) \overset{\text{Θ. Campbell}}{=} P((U_{1:n},\dots,U_{n:n})\in A)$

$$E[f(S_1,\dots,S_n) \mid N(t)=n] = E[f(U_{1:n},\dots,U_{n:n})]$$

(7) Παρατήρηση

$E[S_i \mid N(t)=n] \underset{\text{Campbell}}{\overset{\text{Θ.}}{=}} E[U_{i:n}] = \frac{it}{n+1}$

$1\le i\le n$

Όταν $i\ge n+1$, $E[S_i \mid N(t)=n] = t+\frac{i-n}{\lambda}$

SOS!