15/2/2017

Στοχαστικές Μέθοδοι στη Επιχειρησιακή Έρευνα Ι:

Βιβλίο: « Στοχαστικές Μέθοδοι στη Ε.Ε. », Φακίνος

delos.uoa.gr

Υπενθυμίσεις από Πιθανότητες:

1) Δεσμευμένη μέση τιμή
2) Πιθανογεννήτριες και μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes
3) Εκθετική κατανομή

1) Δεσμευμένη σ.π. ή σ.π.π.:

(X,Y) με σπ $f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$ (διακριτή)

σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$ (συνεχής)

$f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ σ.π. ή σ.π.π. της X δεδομένου $Y=y$

Έχουμε $\sum_x f_{X|Y}(x,y) = 1$, $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$ (διακριτή)

ή $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x,y)\,dx = 1$, $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$ (συνεχής)

Ορίζω $E[X|Y=y] = m_{X|Y}(y) = \begin{cases} \sum_x x\, f_{X|Y}(x|y) & \text{(διακριτή)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx & \text{(συνεχής)} \end{cases}$

δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου $Y=y$ (αριθμός και εξαρτάται από το y)

$E[X|Y] = m_{X|Y}(Y)$: δεσμευμένη μ.τ. της X δεδομένης της Y

τ.μ. συνάρτηση της Y

$$\underset{\text{τ.μ.}}{E}[X \mid \underset{\text{ενδεχόμενο}}{A}] = \frac{E[X \, \underset{\text{δείκτρια του } A}{\mathbb{1}_A}]}{P(A)}$$: δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου του A

αριθμός

Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής:

- Ανάλογο του θεωρήματος ολικής πιθανότητας για υπολογισμό μέσων τιμών

ΘΟΠ: $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \quad , \quad B_i \cap B_j = \phi \, , \, i \neq j$

$$P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) P(A \mid B_n)$$

ΘΔΜΤ: $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \quad , \quad B_i \cap B_j = \phi \, , \, i \neq j$

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) E[X \mid B_n]$$

Για $B_n = \{Y = n\}$:
$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n) E[X \mid Y=n] = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n) \, m_{X|Y}(n) = E[m_{X|Y}(Y)]$$

$$\Longrightarrow E[X] = E\big[E[X \mid Y]\big]$$

Για Y συνεχής, $E[X] = E\big[E[X \mid Y]\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) E[X \mid Y=y] \, dy$

$$E[X] = E\big[E[X \mid Y]\big] = \begin{cases} \sum_{y} P(Y=y) E[X \mid Y=y] & , \text{ Y διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) E[X \mid Y=y] \, dy & , \text{ Y συνεχής} \end{cases}$$

$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) E[X \mid B_n]$, (B_n) διαμέριση του Ω

Εφαρμογή 1: Μέση τιμή γεωμετρικής κατανομής

Ρίψη νομίσματος $\left\langle \begin{array}{l} \xrightarrow{p} K \\ \xrightarrow{1-p} \Gamma \end{array} \right.$ X: # ρίψεων ως την πρώτη K

1ος τρόπος: $P(X=x) = P(\{\underbrace{\Gamma \cdots \Gamma}_{\substack{x-1 \\ \text{φορές}}} K\}) = (1-p)^{x-1} p \quad , \; x = 1, 2, \ldots$

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x \, P(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \, (1-p)^{x-1} p = \frac{1}{p}$$

$$\left(\begin{array}{l} \sum_{x=0}^{\infty} t^x = \frac{1}{1-t} \xRightarrow{\text{παρ.}} \sum_{x=1}^{\infty} x \, t^{x-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \\ \text{Για } t = 1-p : \sum_{x=1}^{\infty} x (1-p)^{x-1} = \frac{1}{p^2} \\ \Rightarrow E[X] = \frac{1}{p} \end{array} \right)$$

2ος τρόπος: (ΘΔΜΤ)

$$Y = \begin{cases} 1 & , \text{1η ρίψη } K \\ 0 & , \text{1η ρίψη } \Gamma \end{cases} \qquad E[X] = \underbrace{P(Y=0)}_{1-p} \underbrace{E[X \mid Y=0]}_{1+E[X]} + \underbrace{P(Y=1)}_{p} \underbrace{E[X \mid Y=1]}_{1}$$

$$E[X] = (1-p) + (1-p)E[X] + p$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{1}{p}$$

Εφαρμογή 2: Μέσος αριθμός ρίψεων νομίσματος μέχρι την εμφάνιση συγκεκριμένης αλληλουχίας

Ρίψη νομίσματος $\swarrow^{1/2} K \quad \searrow^{1/2} \Gamma$

X_1: # ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί πρώτη φορά KK

X_2: .... KΓ

Εδώ ο 1ος τρόπος για τον υπολογισμό της $E[X_1]$ είναι εξαιρετικά δύσκολο

$$E[X_1] = \underset{1/2}{P(\{K\})}\, E[X_1|\{K\}] + \underset{1/2}{P(\{\Gamma\})}\, \underbrace{E[X_1|\{\Gamma\}]}_{1+E[X_1]}$$

$$= \frac{1}{2} E[X_1|\{K\}] + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[X_1] = \frac{1}{2}\ \underset{1/2}{P(\{KK\}|\{K\})}\, \underset{2}{E[X_1|\{KK\}]} + \underset{1/2}{P(\{K\Gamma\}|\{K\})} \cdot \underbrace{E[X_1|\{K\Gamma\}]}_{2+E[X_1]} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[X_1] \Longrightarrow$$

$$E[X_1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} E[X_1] + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[X_1] \Longrightarrow E[X_1] = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$$

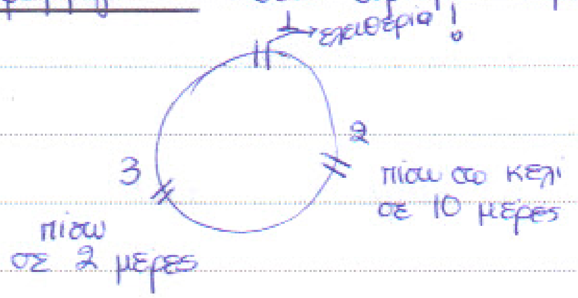
και $E[X_2] = \frac{1}{2} E[X_2|K] + \frac{1}{2} E[X_2|\Gamma] = \frac{1}{2} E[X_2|K] + \frac{1}{2}\left[1 + E[X_2]\right]$

$$\bullet\ E[X_2|K] = \frac{1}{2} \underbrace{E[X_2|KK]}_{1+E[X_2|K]} + \frac{1}{2} \underset{2}{E[X_2|K\Gamma]}$$

$$\Rightarrow E[X_2|K] = 2\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 1 + 2 = 3$$

άρα, $E[X_2] = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[X_2] \Longrightarrow E[X_2] = 2 \cdot 2 = 4$

<u>Εφαρμογή 3</u>: Μέσος αριθμός ημερών ως την ελευθερία



X : # ημερών ως την ελευθερία

Θέτω Y : η πόρτα που διάλεξε την πρώτη φορά.

$$E[X] = P(Y=1)E[X|Y=1] + P(Y=2)E[X|Y=2] + P(Y=3)E[X|Y=3]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3}\left(10 + E[X]\right) + \frac{1}{3}\left(2 + E[X]\right)$$

$$E[X] = 12$$

Στοχαστικές Μέθοδοι στη Ε.Ε. 17/2/2017

Πιθανογεννήτριες - Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjets:

Ορισμός: X τ.μ. με τιμές στο $\{0,1,2,\dots\}$ και στη $f_X(x)=P(X=x)$, $x=0,1,$
Πιθανογεννήτρια της X: $P_X(z)=\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x)z^x = E[z^X]$ (για διακριτές!)

Για $|z|\leq 1$ συγκλίνει

Ιδιότητες: 1) $P_X(z)=P_Y(z) \Leftrightarrow X,Y$ ισόνομες: $f_X(n)=f_Y(n)$, $n=0,1,\dots$

$$f_X(n)=\frac{P_X^{(n)}(0)}{n!},\ n=0,1,\dots \quad (\text{απόδ} \Rightarrow)$$

2) $P_X(1)=1$ (αν $P(X<\infty)=1$) αλλιώς $P_X(1)=P(X<\infty)$

3) $E[\underbrace{X(X-1)(X-2)\dots(X-r+1)}_{r-\text{παράγοντες}}]=E[X_{(r)}]=P_X^{(r)}(1)$

Οπότε $E[X]=P_X'(1)$ και
$$\begin{aligned}Var[X]&=E[X^2]-(E[X])^2\\ &=E[X(X-1)]+E[X]-(E[X])^2\\ &=P_X''(1)+P_X'(1)-[P_X'(1)]^2\end{aligned}$$

4) $X_1,X_2,\dots,X_n$ ανεξ. τ.μ., $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$

$$P_{S_n}(z)=P_{X_1}(z)P_{X_2}(z)\dots P_{X_n}(z)$$

απόδ: $P_{S_n}(z)=E[z^{S_n}]=E[z^{X_1+X_2+\dots+X_n}] \overset{\text{ανεξ}}{=} E[z^{X_1}]E[z^{X_2}]\dots E[z^{X_n}]$
$=P_{X_1}(z)P_{X_2}(z)\dots P_{X_n}(z)$

5) $X_1,X_2,\dots$ ανεξ. και ισον., N ανεξ. των X_i, $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$

τυχαίο άθροισμα

$$P_{S_N}(z)=P_N(P_X(z))$$

απόδ: $P_{S_N}(z) = E\left[z^{S_N}\right] = E\left[z^{\sum_{i=1}^{N} x_i}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E\left[z^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \mid N=n\right]$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\left(P_x(z)\right)^n = \underbrace{P_N}_{\text{σύνθεση}}\left(P_x(z)\right)$$

! Δεν χρειάζεται να θυμόμαστε αποδείξεις

Βασικές Σειρές:

- $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z|<1$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] z^k = \frac{1}{(1+z)^n}$ όπου $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] = \binom{n+k-1}{k}$

Παραγεννήτριες γνωστών κατανομών:

1) $X \sim Bernoulli(p)$ $\quad P(X=n) = \begin{cases} p, & n=1 \\ 1-p, & n=0 \end{cases}$

$P_x(z) = p \cdot z^1 + (1-p) z^0 = 1-p+pz$

2) $X \sim Bin(n,p)$ $\quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,\dots,n$

$P_x(z) \overset{\text{ιδιότ. } 4}{=} (1-p+pz)^n$

3) $X \sim Geom(\rho)$ $\quad P(X=k) = (1-p)p^k, \quad k \geq 0$

$P_x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^k z^k = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} (\rho z)^k = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$

4) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $\quad P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, \; k \geq 0$

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} z^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda z} = e^{-\lambda(1-z)}$$

<u>Ορισμός:</u> $X \geq 0$ τμ.

Ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της X είναι $\tilde{F}_X(s) = E\left[e^{-sX}\right]$

$$= \begin{cases} \sum_x e^{-sx} f_X(x) & X \text{ διακριτή} \\ \int_0^{\infty} e^{-sx} f_X(x)\,dx & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dF_X(x)$$

Συγκλίνει για $Re(s) \geq 0$

<u>Ιδιότητες:</u> 1) $\tilde{F}_X(s) = \tilde{F}_Y(s) \Leftrightarrow X, Y$ ισόνομες

2) $\tilde{F}_X(0) = 1$ (αν $P(X<\infty)=1$)

3) $E[X^r] = (-1)^r \tilde{F}_X^{(r)}(0)$

4) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ. και , $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\tilde{F}_{S_n}(s) = \tilde{F}_{X_1}(s) \ldots \tilde{F}_{X_n}(s)$$

5) $X_1, X_2, \ldots \geq 0$ ανεξ. και ισον., $N \geq 0$ με ακέραιες τιμές και $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$$\tilde{F}_{S_N}(s) = P_N\left(\tilde{F}_X(s)\right)$$

πιθανογεννήτρια της N

Μετασχηματισμός L-S βασικών κατανομών:

1) $X \sim Exp(\lambda)$ $\quad f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

$$\tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \left. \frac{e^{-(s+\lambda)x}}{-(s+\lambda)} \right|_{x=0}^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda+s}, \quad s > -\lambda \quad (s+\lambda>0)$$

2) $X \sim Erlang(n,\lambda)$ $\quad f_X(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x>0$

$\parallel$
άθροισμα
n- ανεξάρτητων
εκθετικών(λ)

$$\tilde{F}_X(s) \overset{(4)}{=} \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n, \quad s>-\lambda$$

Παραδείγματα:

1) X τμ με τιμές στο $\{0,1,\dots\}$ με $P_X(z) = \frac{\overset{\substack{24 \\ \parallel}}{C} - 15z}{54-63z+18z^2}$ (ρητή συνάρτηση)

άγνωστη παράμετρος

$P(X=n) = ;$ (Αναστροφή της πιθανογεννήτριας)

$$P_X(1) = 1 \Rightarrow \frac{C-15z}{54-63z+18z^2} = 1 \Rightarrow C = 24$$

Παραγοντοποιώ παρονομαστή - σπάω σε απλά κλάσματα

$$P_X(z) = \frac{24-15z}{18(2-z)(\frac{3}{2}-z)} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{\frac{3}{2}-z}$$

ο βαθμός του αριθμ. < βαθ. παρον.
(αλλιώς διαίρεση)

Για το A: Πολ/ζω $\cdot(2-z)$ και θέτω για $z=2$

$$\frac{24-15z}{18(\frac{3}{2}-z)} = A + \frac{B(z-2)}{(\frac{3}{2}-z)} \xrightarrow[z=2]{} A = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$$

Ομοίως, $B = \frac{1}{6}$

η/ Κάνω ομώνυμα και εξισώνω τους αριθμητές

$$\frac{24-15z}{18(2-z)\left(\frac{3}{2}-z\right)} = \frac{\left(\frac{3}{2}A+2B\right)-(A+B)z}{(2-z)\left(\frac{3}{2}-z\right)} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{24}{18} = \frac{3}{2}A+2B \\ -\frac{15}{18} = -A-B \end{cases}$$

Τότε, $P_X(z) = \dfrac{\frac{2}{3}}{2-z} + \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{2}-z} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} + \dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}z}$

όμως $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \dfrac{1}{1-z}$

$$\Longrightarrow P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)z^n = \frac{1}{3}\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n z^n$$

$$P(X=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \ n\geq 0$$

2) Αντιστροφή μετασχηματισμού L-S

$X \sim Exp(\lambda)$
$Y \sim Exp(\mu)$ ανεξ. $\quad Z = X+Y \quad f_Z(z) = ;$

$X \sim Exp(\lambda) \Longrightarrow \tilde{F}_X(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda+s}$

$Y \sim Exp(\mu) \Longrightarrow \tilde{F}_Y(s) = \dfrac{\mu}{\mu+s}$

Άρα, $\tilde{F}_Z(s) = \tilde{F}_X(s)\tilde{F}_Y(s) = \dfrac{\lambda\mu}{(\lambda+s)(\mu+s)} = \dfrac{A}{\lambda+s} + \dfrac{B}{\mu+s}$

$\xrightarrow[s=-\lambda]{\cdot(\lambda+s)} A = \dfrac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}$ και ομοίως, $B = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}$

$\tilde{F}_Z(s) = \dfrac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\cdot\dfrac{1}{\lambda+s} + \dfrac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\cdot\dfrac{1}{\mu+s}$. Άρα, $f_Z(x) = \dfrac{\mu}{\mu-\lambda}\lambda e^{-\lambda x} + \dfrac{\lambda}{\lambda-\mu}\mu e^{-\mu x}$, $x>0$

Στοχαστικές Μέθοδοι στη Ε.Ε. 22/02/2017

Η Εκθετική Κατανομή

① Ορισμός (Μοντέλο)

Ιδέα: X χρόνος (ζωής), $X \overset{(i)}{\geq} 0$ συνεχής$^{(ii)}$ και αμνήμονη ιδιότητα$^{(iii)}$

δηλ. $P(X>t+s \mid X>t) = P(X>s)$, $\forall s,t$

Αν $g(t) = P(X>t)$ συνάρτηση επιβίωσης,

Πρέπει (i) $g(0)=1$

(ii) $g(t)$ παραγωγίσιμη

(iii) $g(s) = P(X>t+s \mid X>t) = \dfrac{P(X>t+s)}{P(X>t)} = \dfrac{g(t+s)}{g(t)}$

άρα $g(t+s) = g(t)\,g(s)$

Γενικά, $g(t_1+t_2+\cdots+t_n) = g(t_1)g(t_2)\cdots g(t_n)$ (με επαγωγή)

Αν $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$, $g(1) = \left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \Rightarrow g\left(\frac{1}{n}\right) = \left[g(1)\right]^{1/n}$

$$g\left(\frac{m}{n}\right) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m-\text{φορές}}\Big) = \left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = \left[g(1)\right]^{m/n}$$

Άρα, $g(q) = g(1)^q$ $\forall q>0$ ρητό

Λόγω συνέχειας, $g(t) = \left[g(1)\right]^t$, $\forall t>0$

Έστω $q_n \longrightarrow t$ ακολουθία ρητών, $q_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n$

$$g(t) \underset{\text{συν.}}{=} \lim_{n\to\infty} g(q_n) = \lim_{n\to\infty} \left[g(1)\right]^{q_n} = \left[g(1)\right]^t$$

Αν θέσω, $-\log g(1) = \lambda > 0$, τότε $g(t) = e^{-(-\log g(1))t} = e^{-\lambda t}$

$F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t>0$ σ.κ.

$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t>0$ σ.π.π.

μετασχηματισμός L-S: $\tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_X(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda+s}$ για $s > -\lambda$.

$$E[X^n] = (-1)^n \tilde{F}^{(n)}(0) = (-1)^n \lambda (-1)(-2)\cdots(-n)(\lambda+s)^{-(n+1)}\Big|_{s=0}$$

$$E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$$

Άρα, $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ και $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

2) Ρυθμός βλάβης

Ορισμός: Έστω $X \geq 0$, συνεχής τ.μ. (χρόνος ζωής)

$$\lambda_X(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(t < X \leq t+h \mid X > t)}{h}$$

: hazard/ failure rate (ρυθμός αποτυχίας, βαθμίδα αποτυχίας)

(η πιθανότητα θανάτου σε σημείο t)

$$\lambda_X(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(t < X \leq t+h)}{h\,P(X>t)} = \frac{f_X(t)}{1-F_X(t)}$$

Άρα αν γνωρίζω $F_X(t)$ ή $f_X(t)$, βρίσκω το $\lambda_X(t)$.

Αν γνωρίζω το $\lambda_X(t)$, $\lambda_X(t) = \frac{-(1-F_X(t))'}{1-F_X(t)} = -\left[\log(1-F_X(t))\right]'$

$$\Rightarrow \int_0^t \lambda_X(u)\,du = -\log(1-F(t)) + \cancel{\log(1-F(0))}$$

$$\Rightarrow F_X(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(u)\,du}, \quad t>0$$

$$\xrightarrow{d/dt} f_X(t) = \lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(u)\,du}, \quad t>0$$

Για την εκθετική κατανομή, $\lambda_X(t) = \lambda$, $\forall t > 0$

③ Ιδιότητες Εκθετικής:

1) Αμνήμονη ιδιότητα: $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s) \quad \forall t, s$

2) Ισχυρή αμνήμονη ιδιότητα: $X \sim Exp(\lambda)$

$Y \geq 0$ τμ. ανεξάρτητη από τη X

$\Rightarrow P(X > Y+s \mid X > Y) = P(X > s)$

3) Ιδιότητα της κατανομής του minimum

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ., $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim Exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$

4) Ιδιότητα δείκτη minimum

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ., $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow P\left(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_i\right) = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$

5) Ιδιότητα ανεξαρτησίας κατανομής δείκτη minimum

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ., $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$

$\{N = i\} = \{\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_i\}$

$\Rightarrow N, \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ανεξάρτητες

(το ποιο πετυχαίνει το min είναι ανεξάρτητο από την τιμή του)

Απόδειξη:

1) ✓

2) $$P(X > Y+s \mid X > Y) = \frac{P(X > Y+s)}{P(X > Y)} = \frac{\int_0^\infty \underbrace{P(X > y+s)}_{e^{-\lambda(y+s)}} f_Y(y)\,dy}{\int_0^\infty \underbrace{P(X > y)}_{e^{-\lambda y}} f_Y(y)\,dy} = e^{-\lambda s} \frac{\int_0^\infty \cancel{e^{-\lambda y} f_Y(y)\,dy}}{\int_0^\infty \cancel{e^{-\lambda y} f_Y(y)\,dy}}$$

$= e^{-\lambda s} = P(X > s)$

3) $P(\min(X_1,\dots,X_n)>t)=P(X_1>t,\dots,X_n>t)\overset{\text{ανεξ}}{=}P(X_1>t)\cdots P(X_n>t)=e^{-\lambda_1 t}\cdots e^{-\lambda_n t}$

$=e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t}\Rightarrow \min(X_1,\dots,X_n)\sim \mathcal{E}xp(\lambda_1+\dots+\lambda_n)$

4) $P(\min(X_1,\dots,X_n)=X_i)=P(X_j\geq X_i,\ \forall j\neq i)=P(X_1\geq X_i,\dots,X_n\geq X_i)=$

$$=\int_0^\infty P(X_1\geq t,\dots,X_n\geq t)\,f_{X_i}(t)\,dt\overset{\text{ανεξ}}{=}\int_0^\infty P(X_1\geq t)\cdots P(X_n\geq t)\,f_{X_i}(t)\,dt=$$

δεν υπάρχει το $X_i\geq t$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda_1 t}\cdots e^{-\lambda_{i-1}t}\,e^{-\lambda_{i+1}t}\cdots e^{-\lambda_n}\,\lambda_i e^{-\lambda_i t}\,dt=\lambda_i\int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}\,dt$$

$$=\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}\qquad\qquad \nabla\ \int_0^\infty e^{-\lambda t}=\frac{1}{\lambda}$$

5) $P(N=i,\ \min(X_1,\dots,X_n)>t)=P(\min(X_1,\dots,X_n)=X_i>t)=$

$$=\int_t^\infty P(X_j\geq y\ ,\ j\neq i)\,f_{X_i}(y)\,dy=\int e^{-\lambda_1 y}\cdots e^{-\lambda_{i-1}y}\,e^{-\lambda_{i+1}y}\cdots e^{-\lambda_n y}\,\lambda_i e^{-\lambda_i y}\,dy$$

$$=\lambda_i\int_t^\infty e^{-\sum_{j=1}^n\lambda_j y}\,dy=\lambda_i\frac{e^{-\sum_{j=1}^n\lambda_j t}}{\sum_{j=1}^n\lambda_j}=P(N=i)\,P(\min(X_1,\dots,X_n)>t)$$

Συνέχεια:

6) Ιδιότητα αλλαγής κλίμακας: (μονάδας μέτρησης του χρόνου)

$X\sim\mathcal{E}xp(\lambda)\ ,\ a>0\Rightarrow aX\sim\mathcal{E}xp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

7) Ιδιότητα αθροίσματος συγκεκριμένου αριθμού

$X_1,\dots,X_n\sim\mathcal{E}xp(\lambda)$ ανεξ. $\Rightarrow S_n=\sum_{i=1}^n X_i\sim \text{Erlang}(n,\lambda)$

$\equiv \text{Gamma}(n,\lambda)$

όπου $\quad f_{S_n}(t)=\dfrac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t},\ t>0$

$$F_{S_n}(t)=1-\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\ ,\ t>0$$

8) Ιδιότητα αθροίσματος γεωμετρικού αριθμού

$X_1, \dots X_n \underset{N}{\sim} Exp(\lambda)$ ανεξ. και N ανεξ των X_i ώστε $P(N=n)=p(1-p)^{n-1}, n \geq 1$

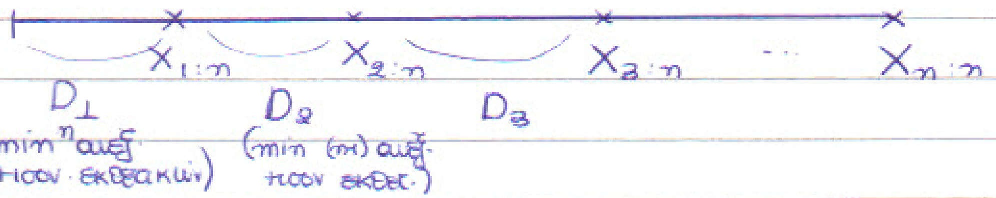
$\Rightarrow S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim Exp(\lambda p)$

9) Ιδιότητα διαστημάτων (spacings)

$X_1, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$ ανεξ.

Έστω $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ οι αντίστοιχες διατεταγμένες

$D_1 = X_{1:n}$, $D_2 = X_{2:n} - X_{1:n}$, $D_3 = X_{3:n} - X_{2:n}$, ...



Τότε D_i ανεξάρτητες και $D_1 \sim Exp(n\lambda)$

$D_2 \sim Exp((n-1)\lambda)$

$D_3 \sim Exp((n-2)\lambda)$

$\vdots$

$D_n \sim Exp(\lambda)$