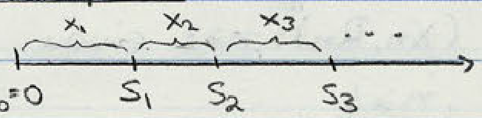
15° Μάθημα 5/4/2017

Ανανεωτική Θεωρία - Νόμος μεγάλων αριθμών - Κεντρικό οριακό θεώρημα, Στοιχειώδης ανανεωτική θεωρία με αμοιβές

1) Πλαίσιο



$S_0=0$, $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{χρόνος } n\text{-οστού γεγονότος}}}{S_n}=\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\{S_0, S_1, S_2, \dots\}$ αναν. ακολουθία.

$N(t)=\sup\{n\geq 0 : S_n \leq t\}$, $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία.

$F_{S_n}(x)=G^{*(n)}(x)$

$P_n(t)=P(N(t)=n)=G^{*(n)}(t)-G^{*(n+1)}(t)$

$M(t)=E[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty} G^{*(n)}(t) \longrightarrow$ ανανεωτική συνάρτηση.

2) Θεωρία Πιθανοτήτων - Υπενθυμίσεις

- Νόμος Μεγάλων Αριθμών: $X_1, X_2, \dots$ ανεξ. ισόνομες και $E[X]=\mu<\infty$

  Τότε: $P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}=\mu\right)=1$
- Κεντρικό οριακό θεώρημα: $X_1, X_2, \dots$ ανεξ. ισόνομες, $E[X]=\mu$, $Var[X]=\sigma^2$

  Τότε: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ και $\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq x\right]=\Phi(x)$

  όπου $\Phi(x)$ η σ.κ. της $N(0,1)$.

3) ΝΜΑ και ΚΟΘ στην ανανεωτική θεωρία

$\{N(t)\}$ αναν. διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \dots$, $E[X_i]=\mu$
$Var[X_i]=\sigma^2$

ΝΜΑ: Αν $\mu<\infty$ τότε $P\Big(\underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}}_{\text{μακροπρόθεσμος ρυθμός γεγ. ανά χρονική μονάδα.}}\Big)=1$

ΚΟΘ: Αν $\mu, \sigma^2<\infty$ τότε

$$\lim_{t\to\infty} P\left[\frac{N(t)-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\sigma^2 t/\mu^3}} \leq x\right]=\Phi(x)$$

4) Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με αμοιβές

ΣΑΘΑ: $\{N(t)\}$ αναν. διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \dots$ και χρόνους γεγ. $S_1, S_2, \dots$ Επιπλέον υπάρχει μια $\{R(t)\}$ σ.δ. "συσσωρευμένων αμοιβών" με την ιδιότητα $(X_n, R_n): n \geq 1$ είναι ανεξ. και ισόνομα όπου $R_n = R(S_n) - R(S_{n-1})$, $n \geq 1$

η αμοιβή που "συσσωρεύεται" στο $(S_{n-1}, S_n]$.

και $E[X_n] = \mu$, $E[R_n] = r$.

Τότε: $\lim_{t \to \infty} \frac{R(t)}{t} \to$ Μακροπρόθεσμη μέση αμοιβή ανά χρ. μονάδα.

$$\frac{r}{\mu} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]}$$

5) Εφαρμογή 1

Σε μια αποθήκη φθάνουν αντικείμενα σύμφωνα με σ.δ. Poisson (λ).
Κάθε x χρ. μονάδες η αποθήκη αδειάζει με κόστος K.
Επίσης κάθε αντικείμενο επιφέρει κόστος h ανά χρ. μονάδα παραμονής του στην αποθήκη και επάγει κόστος k για την εκκαθάρισή του.

i) Ποιό είναι το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος διαχείρισης της αποθήκης ανά χρ. μονάδα: $C(x) = ;$

ii) Βέλτιστο x.

Λύση

Έστω $\{N(t)\}$ η αναν. διαδικασία των εκκαθαρίσεων της αποθήκης με σταθ. ενδιάμεσους χρόνους $(\mu = x)$. Έστω $R(t)$ το κόστος διαχείρισης στο $(0,t]$. Ζητάμε το $C(x) = \lim_{t \to \infty} \frac{E[R(t)]}{t}$.

Είναι $X_n = x$ (εδώ είναι σταθερό) και $R_n = K + k\overbrace{(M(S_n) - M(S_{n-1}))}^{M} + h\sum_{i=1}^{n}(x - Y_i)$

όπου $M(t) = \#$ αντικειμένων στο $(0,t]$, $M = \#$ αντικ. στο $(S_{n-1}, S_n]$ και έστω $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ οι χρόνοι άφιξης των αντικ. μετά την S_{n-1}.

Άρα (X_n, R_n), $n \geq 1$ ανεξ., ισόνομες όποτε το ΣΑΘΑ είναι εφαρμόσιμο.

$C(x) = \frac{r}{\mu}$. Είναι $\mu = x$ και:

$$r = E[R_n] = E\left[K + kM + h\sum_{i=1}^{M}(x - Y_i)\right] = K + kE[M] + h\sum_{m=0}^{\infty} P(M = m) E\left[\sum_{i=1}^{M}(x - Y_i) \mid M = m\right] =$$

$$\underset{\text{Campbell}}{\overset{\Theta}{=}} K + k\lambda x + h\sum_{m=0}^{\infty} P(M = m)\left(xm - \sum_{i=1}^{m} \frac{ix}{m+1}\right) = K + k\lambda x + h\sum_{m=0}^{\infty} P(M = m)\left(xm - \frac{mx}{2}\right) =$$

$$= K + k\lambda x + hE[M] \cdot \frac{x}{2}$$

Άρα $C(x) = \frac{r}{\mu} = \frac{K + k\lambda x + h\lambda \frac{x^2}{2}}{x} = \frac{K}{x} + k\lambda + \frac{h\lambda x}{2}$

ii) Έχω $\frac{dC(x)}{dx} = -\frac{K}{x^2} + \frac{h\lambda}{2}$, $\frac{d^2C(x)}{dx^2} = \frac{2K}{x^3} > 0$ (συνθήκη ελαχίστου).

οπότε λύνω την εξίσωση $\frac{dC(x)}{dx} = 0 \iff x = \sqrt{\frac{2K}{h\lambda}}$

6) Εφαρμογή 2

Ίδιες παράμετροι με πριν, K, k, h, λ, όμως η αποθήκη εκκαθαρίζεται κάθε φορά που μαζεύονται m προϊόντα.

1) Μακρ. μέσο κόστος ανά χρ. μονάδα $= C(m)$

2) Βέλτιστο m;

Λύση

Έστω $\{N(t)\}$ η ανανεωτική διαδικασία των εκκαθαρίσεων της αποθήκης $\{M(t)\}$ η σ.δ. Poisson των αφίξεων προϊόντων.

$R(t)$= Κόστος διαχείρισης ως τη στιγμή t.

$X_n \sim Erlang(m,\lambda)$, χρόνος μεταξύ $(m-1)$-οστής και m-οστής εκκαθάρισης της αποθήκης. (= χρόνος για να μαζευτούν m αντικείμενα).

$R_n = K + mk + h\sum_{i=1}^{m}(m-i)\frac{1}{\lambda} = K + km + \frac{h}{\lambda}\cdot\frac{(m-1)m}{2}$

Τα (X_n, R_n), $n \geq 1$ είναι ανεξ. και ισόνομα, επομένως το ΣΑΘΑ είναι εφαρμόσιμο και άρα $C(m) = \lim_{t\to\infty}\frac{E[R(t)]}{t} \overset{ΣΑΘΑ}{=} \frac{E[R_n]}{E[X_n]} = \frac{K + km + \frac{h(m-1)m}{2}}{m/\lambda} =$

$= k + km + \frac{h}{\lambda}\frac{(m-1)m}{2}.$

$C(m) = \frac{K\lambda}{m} + k\lambda + \frac{h(m-1)}{2}.$

Βρίσκω το m όπως πριν ($m \in \mathbb{Z}$)

Η $C(m)$ είναι κυρτή για $m \in \mathbb{R}$, επομένως το ελάχιστό της είναι $\lfloor m^* \rfloor$ ή $\lfloor m^* \rfloor + 1$ όπου m^*: $\frac{dC(m^*)}{dm} = 0$.

16° Μάθημα 26/4/2017.

Ανανεωτική Θεωρία, Τα 3 βασικά εργαλεία

1) Στοιχειώδη ανανεωτικό θεώρημα με αμοιβές (ΣΑΘΑ)

Αν έχω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με χρ. αφ. $S_1, S_2, \dots$

$\{R(t)\}$ διαδ. "αμοιβών" ώστε $\{(X_n, R_n)\}_{n \geq 1}$ όπου $X_n = S_n - S_{n-1}$

και $R_n = R(S_n) - R(S_{n-1})$ είναι ανεξ. και ισόνομα, τότε

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]} = \frac{r}{\mu}.$$

2) Ανανεωτική εξίσωση

Ανανεωτικές εξισώσεις προκύπτουν δεσμεύοντας στον χρόνο του 1ου γεγονότος S_1 σε ένα στοχ. φαινόμενο με αναγεννητικό χαρακτήρα (ανανεωτικός συλλογισμός).

$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \dots \sim G(x)$

και $M_G(t) = E[N(t)]$ η ανανεωτική συνάρτηση.

Η ανανεωτική εξίσωση:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{αγν. συν.}}}{H(t)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{γνωστή} \\ \text{συνάρτηση}}}{D(t)} + \int_0^t H(t-u)\, d\underset{\substack{\uparrow \\ \text{γνωστή συν.} \\ \text{κατανομής}}}{G(u)} \quad \text{ή} \quad H(t) = D(t) + (H * G)(t)$$

συμβ. συνέλιξης.

3) Παράδειγμα 1 - Ανανεωτική εξίσωση για την $M_G(t)$

Έστω ότι θέλω να μελετήσω την $H(t) = E[N(t)]$ για $\{N(t)\}$ αν. διαδ.

$H(t) = \int_0^\infty E[N(t) \mid S_1 = u]\, dG(u)$. (Θ.Α.Μ.Τ)

$$E[N(t) \mid S_1 = u] = \begin{cases} 0 &, u > t \\ 1 + \underbrace{E[N(t-u)]}_{H(t-u)} &, u \leq t \end{cases}$$

Άρα $H(t) = \int_0^t (1 + H(t-u))\, dG(u) = G(t) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u) \rightarrow$ Ανανεωτική εξίσωση.

εδώ $D(t) = G(t)$.

4) Αναν. εξίσωση για την $E[S_{N(t)+1}]$ - Παράδειγμα 2.

$H(t) = E[S_{N(t)+1}]$: Μέσος χρόνος γεγονότος που έπεται της στιγμής t.

$$\Rightarrow H(t) = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u]\, dG(u)$$

$$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = \begin{cases} u & , u > t \\ u + E[S_{N(t-u)+1}] & , u \le t \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(t) = \underset{\mu}{\underbrace{\int_0^\infty u\, dG(u)}} + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$, εδώ έχω αναν. εξίσωση με $D(t) = \mu$

5) Λύση ανανεωτικής εξίσωσης

Η αναν. εξ. $H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u) = D(t) + (H * G)(t)$

Λύση: $H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, dM_G(u)$

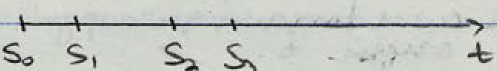
Απόδειξη

$H(t) = D(t) + (H*G)(t) \overset{L-S}{\Longrightarrow} \tilde{H}(s) = \tilde{D}(s) + \tilde{H}(s)\tilde{G}(s) \Rightarrow \tilde{H}(s) = \tilde{D}(s)\frac{1}{1-\tilde{G}(s)}$

Όμως $\tilde{M}_G(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$ Οπότε $\tilde{H}(s) = \tilde{D}(s)\left(1 + \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}\right) = \tilde{D}(s) + \tilde{D}(s)\cdot\tilde{M}_G(s)$

$$\Longrightarrow H(t) = D(t) + (D * M_G)(t)$$

6) Ερμηνεία αναν. εξίσωσης - λύση



H(t): Συνολική επίδραση μετά από χρόνο t από όλα τα γεγονότα.

D(t): Επίδραση μετά από χρόνο t από 1 γεγονός.

$$\underset{\text{Συνολική επίδραση τη στιγμή t}}{H(t)} = \underset{\text{επίδραση από το γεγ. στο } S_1}{D(t)} + \underset{\text{επίδραση από } S_1, S_2, \ldots \text{ μέχρι τη στιγμή t.}}{\int_0^t H(t-u)\, dG(u)}$$

Για την λύση: $\underset{\text{Συνολική επίδραση μέχρι χρόνο t.}}{H(t)} = \underset{\text{επίδραση από γεγ. } S_n.}{\sum_{n=0}^\infty \int_0^t D(t-u)\, dG_{S_n}(u)} = \sum_{n=0}^\infty \int_0^t D(t-u)\, d(G^{*(n)}(u)) =$

$= D(t) + \int_0^t D(t-u)\, dM_G(u)$ διότι $M_G(t) = \sum_{n=1}^\infty G^{*(n)}(t)$

7) Οριακή λύση αναν. εξίσωσης. Βασικό Αναν. Θεώρημα

Έχω $H(t)=D(t)+\int_0^t H(t-u)\,dG(u)$ και η λύση της εξίσωσης

$$H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-u)\,dM_G(u)$$

$\lim_{t\to\infty} H(t) = ;$

ΒΑΘ: Αν η $D(t)$ γράφεται ως διαφορά μη αρνητικών, μονότονων φραγμένων συν. και $\int_0^\infty |D(t)|<\infty$ και η $G(t)$ είναι απεριοδική (η αντίστοιχη τ.μ. X_i δεν παίρνει τιμές σε κάποιο dN_0) π.χ. συνεχής

Τότε $\lim_{t\to\infty} H(t)=\dfrac{\int_0^\infty D(t)dt}{\mu}$, $\mu \leftarrow E[X_i]$

Διαισθητική αιτιολόγηση: $\lim_{t\to\infty} H(t)=\lim_{t\to\infty}\left(D(t)+\int_0^t D(t-u)\,dM_G(u)\right)$

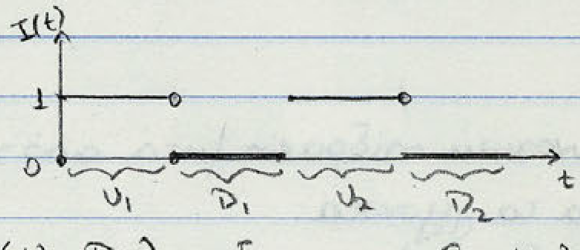
$$=\lim_{t\to\infty}\cancel{D(t)}^{\,0}+\lim_{t\to\infty}\int_0^t D(t-u)\,dM_G(u)=\lim_{t\to\infty}\int_0^t D(t-u)\frac{du}{\mu}\overset{x=t-u}{=\!=}$$

λόγω $\int|D(t)|dt<\infty$.

$\downarrow$ $M_G(u)\approx \frac{u}{\mu}$

$$= \frac{1}{\mu}\lim_{t\to\infty}\int_0^t D(x)\,dx$$

8) Εφαρμογή - Εναλλασσόμενη αναν. διαδικασία



Μηχανή που εναλλάσ. μεταξύ περιόδων λειτουργίας (U) και αργίας (D)

(U_n, D_n) ανεξ., ισον. $\sim G_{U,D}(t,s)$

$I(t)=\begin{cases}1 & \text{αν η μηχανή λειτουργεί τη στιγμή } t.\\ 0 & \text{διαφορετικά}\end{cases}$

1) Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου λειτουργίας της μηχανής
$\lim_{t\to\infty}\dfrac{E[\int_0^t I(u)du]}{t}$

2) Πιθανότητα λειτουργίας της μηχανής τη στιγμή $t = P(I(t)=1)$

3) Οριακή πιθανότητα λειτουργίας της μηχανής, $\lim_{t\to\infty}P(I(t)=1)$ ← ΒΑΘ.

Λύση

1) Ορίζω διαδ. αμοιβής $R(t)=\int_0^t I(u)du$.

Έχουμε $(X_n, R_n) = (U_n + D_n, U_n)$ ανεξ. ισόνομα. Άρα το ΣΑΘΑ είναι εφαρμόσιμο

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_1]}{E[X_1]} = \frac{E[U]}{E[U]+E[D]}$$

2) $H(t) = P(I(t)=1) = \int_0^\infty P(I(t)=1 \mid X_1 = u)\, dG_{U+D}(u)$

$$P(I(t)=1 \mid X_1 = u) = \begin{cases} P(U_1 > t \mid U_1 + D_1 = u), & u > t \\ \underset{P(I(t-u)=1)}{\overset{\parallel}{H(t-u)}}, & u \le t \end{cases}$$

Άρα $H(t) = \underbrace{\int_t^\infty P(U_1 > t \mid U_1 + D_1 = u)\, dG_{U+D}(u)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$

Θα το τελειώσουμε την επόμενη φορά.