

# Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

## Φυλλάδιο Ασκήσεων 7

Ανανεωτική εξίσωση - Βασικό ανανεωτικό θεώρημα

- (1) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία  $\{N(t)\}$  με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων  $G(t)$ , μέση τιμή ενδιάμεσων χρόνων  $\tau$  και διασπορά ενδιάμεσων χρόνων  $\sigma^2$ . Έστω, επίσης  $M(t) = E[N(t)]$ ,  $t \geq 0$  η αντίστοιχη ανανεωτική συνάρτηση και  $H(t) = M(t) - \frac{t}{\tau}$ ,  $t \geq 0$ .
  - (α') Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την  $H(t)$  και να λυθεί.
  - (β') Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} (M(t) - \frac{t}{\tau})$  (συναρτήσει των  $\tau$  και  $\sigma$ ).
- (2) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία  $\{N(t)\}$  με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων  $G(t)$  και έστω  $H(t) = E[N(t)(N(t) - 1)]$ ,  $t \geq 0$ . Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την  $H(t)$  και να λυθεί.
- (3) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία  $\{N(t)\}$  με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων  $G(t)$  και έστω  $H(t) = P(N(t) \text{ είναι περιττός})$ ,  $t \geq 0$ .
  - (α') Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την  $H(t)$  και να λυθεί.
  - (β') Να υπολογιστεί η  $P(N(t) \text{ είναι περιττός})$  στην περίπτωση που η  $\{N(t)\}$  είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό  $\lambda$ .
  - (γ') Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(N(t) \text{ είναι περιττός})$ .
- (4) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία  $\{N(t)\}$  με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων  $G(t)$  και ροές  $r$ -τάξης ενδιάμεσων χρόνων  $E[X^r] = \mu'_r$ ,  $r \geq 1$ . Έστω επίσης  $A(t) = t - S_{N(t)}$  ο αναδρομικός χρόνος ανανέωσης (παρελθών χρόνος ανανέωσης ή ηλικία της ανανεωτικής διαδικασίας) τη χρονική στιγμή  $t$  και  $B(t) = S_{N(t)+1} - t$  ο προδρομικός χρόνος ανανέωσης (υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης της ανανεωτικής διαδικασίας). Θέτουμε  $H(t) = E[A(t)B(t)]$ ,  $t \geq 0$ .
  - (α') Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την  $H(t)$  και να λυθεί.
  - (β') Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[A(t)B(t)]$  (συναρτήσει των  $\mu'_r$ ).
- (5) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία  $\{N(t)\}$  με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων  $G(t)$  και ροές  $r$ -τάξης ενδιάμεσων χρόνων  $E[X^r] = \mu'_r$ ,  $r \geq 1$ . Έστω επίσης  $A(t) = t - S_{N(t)}$  ο αναδρομικός χρόνος ανανέωσης (παρελθών χρόνος ανανέωσης ή ηλικία της ανανεωτικής διαδικασίας) τη χρονική στιγμή  $t$ . Θέτουμε  $H(t) = E[A(t)^2]$ ,  $t \geq 0$ .
  - (α') Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την  $H(t)$  και να λυθεί.
  - (β') Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[A(t)^2]$  (συναρτήσει των  $\mu'_r$ ).