

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Ορισμοί διαδικασίας Poisson - Βασικοί υπολογισμοί

- (1) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E[N(t)(N(t) - 1)(N(t) - 2) \cdots N(t - k + 1)]$.
- (2) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση $Cov[N(t), N(s)]$.
- (3) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(N(t) = k | N(t + s) = k + m), t \geq 0, s \geq 0, k \geq 0, m \geq 0$.
- (4) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(N(t) \text{ είναι περιττός}), t \geq 0$.
- (5) Υποθέτουμε ότι πελάτες φθάνουν σε μια τράπεζα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 8 πελάτες την ώρα. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:
- (α') Η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μέσα σε ένα οκτάωρο λειτουργίας της τράπεζας.
 - (β') Η πιθανότητα κανείς πελάτης να μη μπει στην τράπεζα τα τελευταία 15 λεπτά μιας εργάσιμης μέρας.
 - (γ') Η συνδιακύμανση του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μεταξύ 9.00 και 11.00 και του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα την ίδια μέρα μεταξύ 10.00 και 11.00.
 - (δ') Η συνδιακύμανση του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μεταξύ 9.00 και 11.00 και του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα την επόμενη μέρα μεταξύ 10.00 και 11.00.
- (6) Θεωρούμε $\{N_1(t) : t \geq 0\}$ και $\{N_2(t) : t \geq 0\}$ δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Έστω A_i να είναι ο αριθμός των γεγονότων στη διαδικασία $\{N_i(t)\}$ πριν το πρώτο γεγονός στην άλλη διαδικασία, $i = 1, 2$.
- (α') Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις πιθανότητας των $A_i, i = 1, 2$.
 - (β') Να εξεταστεί αν οι A_1 και A_2 είναι ανεξάρτητες.