Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι
Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Δεσμευμένη μέση τιμή - Πιθανογεννήτριες - Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes - Η εκθετική κατανομή

(1) Ένας φοιτητής έχει n βιβλία, αριθμημένα ως $1, 2, \ldots, n$. Το βιβλίο k έχει ακριβώς i τυπογραφικά λάθη με πιθανότητα $k^i/(k+1)^{i+1}$, όπου $i = 0, 1, 2, \ldots$ και $k = 1, 2, \ldots, n$. Ο φοιτητής διαλέγει ένα βιβλίο στην τύχη (ομοιόμορφα) και το διαβάζει. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των τυπογραφικών λαθών που θα βρει.

(2) Μια κάλπη περιέχει a λευκά και b μαύρα σφαιρίδια. Αφού τραβήξουμε ένα σφαιρίδιο, το επανατοποθετούμε στην κάλπη αν είναι λευκό. Αν, όμως, είναι μαύρο, τότε βάζουμε στη θέση του ένα λευκό (από κάποια άλλη κάλπη). Έστω X_n ο αριθμός των λευκών σφαιριδίων στην κάλπη, αφού η διαδικασία έχει επαναληφθεί n φορές.

(α΄) Αποδείξτε ότι

$$E[X_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) E[X_n] + 1.$$

(β΄) Βρείτε έναν 'κλειστό' τύπο για την $E[X_n]$.

(3) Κάθε φορά που ρίπτεται ένα νόμισμα, προσγειώνεται ως 'κεφαλή' με πιθανότητα p και ως 'γράμματα' με πιθανότητα $1 - p$. Να υπολογιστεί ο μέσος αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθεί μια σειρά από r συνεχόμενες κεφαλές.

(4) Έστω X μια μη-αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή με πιθανογεννήτρια

$$P_X(z) = \frac{c}{6 - z - z^2}.$$

(α΄) Να προσδιοριστεί η σταθερά c.
(β΄) Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E[X]$.
(γ΄) Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x) = P(X = x)$, $x = 0, 1, 2, \ldots$.
(δ΄) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X$ είναι άρτιος$)$.

(5) Έστω X, Y και Z ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με ρυθμούς λ, λ και μ αντίστοιχα, με $\lambda \neq \mu$. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της $X + Y + Z$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της.

(6) Ένα σύστημα έχει δυο εξαρτήματα και χαλάει μόλις κάποιο από τα εξαρτήματα χαλάσει. Ο χρόνος ζωής του πρώτου εξαρτήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή $Exp(\lambda)$ (δηλαδή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ t \geq 0$), ενώ ο χρόνος ζωής του δεύτερου εξαρτήματος ακολουθεί την κατανομή $Gamma(n, \mu)$ (δηλαδή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_2(t) = \mu^n t^{n-1} e^{-\mu t}/(n-1)!,\ t \geq 0$). Υποθέτοντας ότι οι χρόνοι ζωής των εξαρτημάτων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, να βρεθεί ο μέσος χρόνος ζωής του συστήματος των δυο εξαρτημάτων.