13/5/2016

Ασκήσεις

Φυλ 1 | Ασκ 1

$\frac{1}{k+1}\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^i$: γεωμετρική

n βιβλία: 1, 2, …, n

P(βιβλίο κ έχει i λάθη) $= \frac{k^i}{(k+1)^{i+1}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $i = 0, 1, \ldots$

Επιλογή βιβλίου στην τύχη (ομοιόμορφα)

E[# λαθών στο επιλ. βιβλίο] = ;

Var ["] = ;

Πείραμα τύχης 2 σταδίων

1ο στάδιο → Επιλογή βιβλίου, Y = Αριθμός βιβλίου

2ο στάδιο → Μέτρηση λαθών, X = # λαθών

- $$E[X] = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{E[X|Y=k]}_{=\sum_{i=0}^{\infty} i\, P(X=i|Y=y)} \cdot \underbrace{P[Y=k]}_{=1/n}$$

Όμως, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} i\, P(X=i|Y=k) = \sum_{i=0}^{\infty} i\, \frac{k^i}{(k+1)^{i+1}} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{\infty} i\left(\frac{k}{k+1}\right)^i$

Έχουμε $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}$, $|t|<1 \overset{d/dt}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} i t^{i-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$

$$\overset{\times t}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} i t^i = \frac{t}{(1-t)^2}$$

$$\overset{t=\frac{k}{k+1}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} i\left(\frac{k}{k+1}\right)^i = \frac{\frac{k}{k+1}}{\left(\frac{1}{k+1}\right)^2} = \frac{k(k+1)^2}{k+1} = k(k+1)$$

Τελικά, $\displaystyle E[X] = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$

• Για την $Var[X]$.

1ος τρόπος:

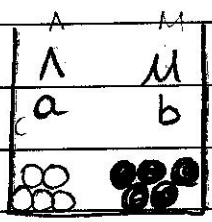
$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Υπολογίζω το: $E[X^2] = \sum_{k=1}^{n} E[X^2 | Y=k]\cdot P(Y=k)$

2ος τρόπος:

$$Var[X] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$$

Φυλ 1 / Ασκ 2



Επιλογή σφαιριδίου → Επανατοποθέτηση στην κάλπη αν είναι Λ

→ Αντικατάσταση με Λ στην κάλπη αν είναι Μ

a) Αποδείξτε $E[X_{n+1}] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_n]+1$

b) Τύπος για $E[X_n]$

a) $E[X_{n+1} | X_n] = E[E[X_{n+1} | X_n = y]]$

$$= \sum_{y} E[X_{n+1} | X_n = y]\cdot P(X_n = y)$$

• $E[X_{n+1} | X_n = y] = \underbrace{\frac{y}{a+b}}_{\text{πιθ. επιλ. Λ όταν } n+1 \text{ επαναλ}} \cdot y + \underbrace{\frac{a+b-y}{a+b}}_{\text{πιθ. επιλογής Μ στην } n+1 \text{ επαναλ}} (y+1) = y + 1 - \frac{y}{a+b}$

$$= \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) y + 1$$

• Άρα $F[X_{n+1}] = \sum_{y}\left(\left(1-\frac{1}{a+b}\right)y+1\right)P(X_n=y) = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_n]+1$

β) Έχω $E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right) E[X_{n-1}] + 1$

$$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)\left(\left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_{n-2}]+1\right)+1$$

$$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 E[X_{n-2}] + \left(1-\frac{1}{a+b}\right) + 1$$

$$\dots = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n \underbrace{E[X_0]}_{\text{μέση τιμή των σφαιριδίων πριν γίνει τίποτ}} + \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^{n-1} + \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^{n-2} + \dots$$

$\left(1+t+t^2+\dots+t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t}\right)$

$$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n \cdot a + \frac{1-\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n}{\frac{1}{a+b}}$$

$$= a+b-b\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n$$

2ος τρόπος:

$E[X_{n+1}] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_n]+1$

Λύνω την: $y = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)y+1 \Rightarrow y = a+b$

Αφαιρώντας:

$E[X_{n+1}] - y = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)(E[X_n]-y)$

$\Rightarrow E[X_n] - y = (E[X_0]-y)\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n$

$\Rightarrow E[X_n] = y + (E[X_0]-y)\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n \overset{y=a+b}{=\!=} a+b-b\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n$

Φυλ 1 | Ασκ 3

Ρίψη νομίσματος → Κ με πιθ p

→ Γ με πιθ $1-p$

X_r = # ρίψεων ως την εμφάνιση r συνεχόμενων κεφαλών

1ος τρόπος: Δέσμευση στην X_{r-1}

$$E[X_r] = \sum_y E[X_r \mid X_{r-1} = y]P(X_{r-1} = y)$$

• $E[X_r \mid X_{r-1} = y] = p(y+1) + (p-1)(y+1+E[X_r]) = y+1+(1-p)E[X_r]$

• Άρα,

$$E[X_r] = \sum_y (y+1+(1-p)E[X_r])P(X_{r-1} = y)$$

$$= E[X_{r-1}] + 1 + (1-p)E[X_r]$$

$$\Rightarrow E[X_r] = \frac{1}{p}E[X_{r-1}] + \frac{1}{p}$$

Λύνω αναδρομικά:

$$E[X_r] = \frac{1}{p^2}E[X_{r-2}] + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{1}{p^3}E[X_{r-3}] + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{1}{p^{r-1}}\underbrace{E[X_1]}_{1/p \text{ γεωμετρική}} + \frac{1}{p^{r-1}} + \frac{1}{p^{r-2}} + \dots + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^{r-1}} + \dots + \frac{1}{p}$$

2ος τρόπος: Δέσμευση στην 1η εμφάνιση Γ

Y = ρίψη που εμφανίζονται 1η φορά γράμματα

$$E[X_r] = \sum_y E[X_r \mid Y = y]P[Y = y]$$

• $E[X_r \mid Y = y] = \begin{cases} r, & y \geq r+1 \\ y + E[X_r], & 1 \leq y \leq r \end{cases}$

$$\cdot E[X_r] = \sum_{y=1}^{r} (y + E[X_r])\, p^{y-1}(1-p) + \sum_{y=r+1}^{\infty} r\cdot p^{y-1}(1-p)$$

$$= \sum_{y=1}^{r} y p^{y-1}(1-p) + E[X_r]\sum_{y=1}^{r} p^{y-1}(1-p) + r\sum_{y=r+1}^{\infty} p^{y-1}(1-p)$$

$$\cdot \sum_{y=1}^{r} y p^{y-1}(1-p) = ;$$

$$\sum_{y=0}^{r} t^{y} = \frac{1-p^{y+1}}{1-p} \overset{d/dt}{\Rightarrow} \sum_{y=1}^{r} y\, t^{y-1} = \dots$$

$$\cdot \sum_{y=1}^{r} p^{y-1}(1-p) = ;$$

$$\cdot \sum_{y=r+1}^{\infty} p^{y-1}(1-p) = ;$$

Φυλ 1 / Ασκ 4

$X \geq 0$ αρεp τ.μ., $P_X(z) = \dfrac{c}{6-z-z^2}$

α) $c = ;$

β) $E[X] = ;$

γ) $P[X=x] = ;$

δ) $P[X$ άρτιος$]$

α) $P_X(1) = 1 \Rightarrow c = 4$

β) $E[X] = P'_X(1)$

γ) $P_X(z) = \dfrac{4}{6-z-z^2} = \dfrac{4}{(2-z)(3-z)} = \dfrac{A}{2-z} + \dfrac{B}{3+z} \Rightarrow A = 4/5$, $B = 4/5$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) z^n = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2-z} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3+z} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{4}{15}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{3}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) z^n$$

$$\Rightarrow P(X=n) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \; n \geq 0$$

δ) $P[X = \text{άρτιος}] = \sum_{n=\text{άρτιος}} P(X=n)$

$P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)$

$P_X(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P(X=n)$

$P_X(1) + P_X(-1) = 2\sum_{n\,\text{άρτιος}} P(X=n)$

$\Rightarrow P(X\ \text{άρτιος}) = \dfrac{P_X(1)+P_X(-1)}{2} = \dfrac{\frac{4}{4}+\frac{4}{6}}{2} = \dfrac{5}{6}$

ή $P(X\ \text{άρτιος}) = \sum_{k=0,\dots}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + \frac{4}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^{2k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} + \frac{4}{15}\left(\frac{1}{9}\right)^{k}\right)$ γεωμ

Φυλ 1 / Ασκ 5

$X \sim \lambda$, $Y \sim \lambda$, $Z \sim \mu$ ανεξ. Exp

α) $\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) = ;$

β) σ.π.π $f_{X+Y+Z}(y) = ;$

α) $\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) = \tilde{F}_X(s)\tilde{F}_Y(s)\tilde{F}_Z(s) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2 \dfrac{\mu}{\mu+s} = \dfrac{\lambda^2\mu}{(\lambda+s)^2(\mu+s)}$

β) $\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) = \dfrac{A}{\lambda+s} + \dfrac{B}{(\lambda+s)^2} + \dfrac{\Gamma}{\mu+s}$

Βρίσκω τα Α, Β, Γ κάπως να γνωστά

αντιστοιχία σε Erlang (2, λ)

$\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) = \dfrac{A}{\lambda}\,\dfrac{\lambda}{\lambda+s} + \dfrac{B}{\lambda^2}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2 + \dfrac{\Gamma}{\mu}\,\dfrac{\mu}{\mu+s}$

$f_{X+Y+Z}(s) = \dfrac{A}{\cancel{\lambda}}\cdot\cancel{\lambda} e^{-\lambda y} + \dfrac{B}{\cancel{\lambda^2}}\cdot\dfrac{\cancel{\lambda^2}}{1} y^1 e^{-\lambda y} + \dfrac{\Gamma}{\cancel{\mu}}\cancel{\mu} e^{-\mu y}$

$= Ae^{-\lambda y} + Bye^{-\lambda y} + \Gamma e^{-\mu y}, \quad y \geq 0$