8/4/2016

3 βασικά εργαλεία (συνέχεια)

2) Ανανεωτική εξίσωση

~> Ανανεωτικός συλλογισμός:

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. και μελετώ κάτι γι' αυτήν πχ μια $H(t)$ τότε δεσμεύοντας στο χρόνο S_1 του 1ου γεγονότος της $\{N(t)\}$ προκύπτει εξίσωση της μορφής:

$$\boxed{H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-x)\,dG(x)}$$

$$= D(t) + (H * G)(t)$$

άγνωστη συνάρτηση

γνωστή συνάρτηση

κατανομή του S_1 και γενικά των $\underbrace{X_1, X_2, \dots}_{\text{ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ γεγονότων της } \{N(t)\}}$

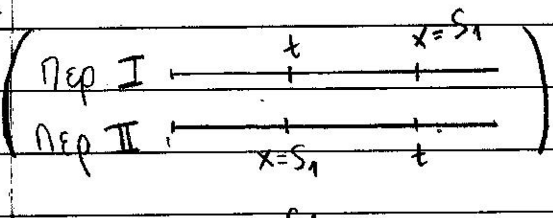
→ Ανανεωτική Εξίσωση για την $H(t)$

Παράδειγμα 1

$\{N(t)\}$ αναν διαδ. με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $G(t)$ και $H(t) = E[N(t)]$ η αναν. συνάρτηση.

Έχω, $H(t) = E[N(t) | S_1 = x] = \int_0^\infty E[N(t)] | S_1 = x]\,dG(x)$

Όμως, $E[N(t) | S_1 = x] = \begin{cases} 0, & x > t \\ 1 + \underbrace{E[N(t-x)]}_{H(t-x)}, & x \leq t \end{cases}$



Άρα $H(t) = \int_0^t (1 + H(t-x))\,dG(x) + \int_t^\infty 0\,dG(x)$.

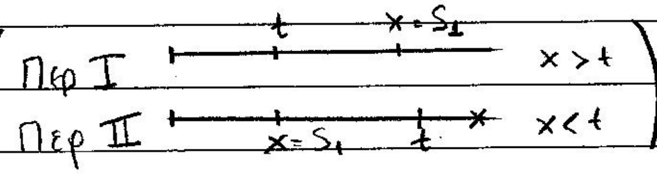
$= G(t) + \int_0^t H(t-x)\,dG(x)$ ανανεωτική εξίσ. με $D(t) = G(t)$

Παράδειγμα 2.

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με κατ. ενδιαμ. χρονων $G(t)$ και
$H(t) = E[S_{N(t)+1}]$ = Μεσος χρονος εμφανισης του $1^{ου}$ γεγ. μετά τη χρονική στιγμή t

$$H(t) = E[S_{N(t)+1}] = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = x]\, dG(x)$$

Όμως, $$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = x] = \begin{cases} x & , x > t \\ x + \underbrace{E[S_{N(t-x)+1}]}_{H(t-x)} & , x < t \end{cases}$$



Άρα, $$H(t) = \int_0^t (x + H(t-x))\, dG(x) + \int_t^\infty x\, dG(x)$$

$$= \int_0^\infty x\, dG(x) + \int_0^t H(t-x)\, dG(x)$$

$= \tau$: μέσος ενδιάμεσος χρόνος

Ανανεωτική εξίσωση με $D(t) = \tau$

▷ 2 βασικά ερωτήματα

Έστω $H(t) = D(t) + (H * G)(t)$ αναν. εξισ.

i) $H(t) = ;$ (λυση)

ii) $\lim_{t \to \infty} H(t) = ;$ (οριακή λύση)

i) Λυση της Αναν. Εξισ.

Εστω $\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με κατανομή ενδιαμ. χρονων $G(t)$ και
$M_G(t) = E[N(t)]$ η αναν. συνάρτηση

Έστω $\underset{\text{αγν. συν.}}{H(t)} = \underset{\text{γν. συν}}{D(t)} + \underset{\text{γν. συν.}}{(H * G)(t)}$ αναν. εξισ.

Τότε η λύση της είναι:

$$H(t) = D(t) + (D * M_G)(t)$$
$$= D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dM_G(x)$$

Αποδ

Υπενθύμιση: $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$ και $\tilde{M}(s) = \dfrac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$

Έχω, $H(t) = D(t) + (H * G)(t)$

$$\Leftrightarrow \tilde{H}(s) = \tilde{D}(s) + \tilde{H}(s)\tilde{G}(s)$$
$$\Leftrightarrow \tilde{H}(s) = \frac{\tilde{D}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \tilde{D}(s) \cdot \frac{1}{1-\tilde{G}(s)} = \tilde{D}(s)\left(1 + \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}\right)$$
$$= \tilde{D}(s) + \tilde{D}(s)\tilde{M}_G(s)$$
$$\Leftrightarrow H(t) = D(t) + (D * M_G)(t)$$

δεν θα χρησιμοποιηθεί

"Οικονομική" ερμηνεία Αναν. Εξισ. - Λύσης

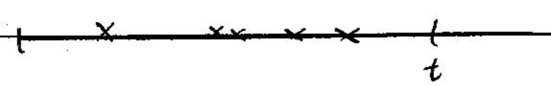
Εξισ: $H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-x)\, G(x)$

Λύση: $H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dM_G(x)$

$H(t)$: Επίδραση από όλο το γεγονός τη στιγμή t

$D(t)$: Επίδραση από 1 γεγονός t χρονικές μονάδες μετά

$S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$: χρόνοι γεγονότων



1ος τρόπος: $H(t) = \underbrace{\text{επίδραση από το γεγονός στο } S_0}_{=\, D(t)} + \underbrace{\text{επίδραση από τα υπόλοιπα}}_{=\, \int_0^t H(t-x)\, \underbrace{dF_{S_1}(x)}_{dG(x)}}$

2ος τρόπος: $H(t) = \sum_{n=0}^{\infty}$ επίδραση από το γεγονός στο S_n

$$= D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dF_{S_1}(x) + \int_0^t D(t-x)\, dF_{S_2}(x) + \dots$$

$$= D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dM_G(x) \quad \left(M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t) \right)$$

3) Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

Αν $H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-x)\, dG(x)$ ανανεωτ. εξισ. και:

i) $D(t)$ γράφεται ως διαφορά δύο μη-αρνητικών, φραγμένων μονότονων συναρτήσεων.

ii) $\int_0^{\infty} |D(t)|\, dt < \infty$

Τότε:

• Περ I: Αν $G(x)$ περιοδική: $\lim_{k\to\infty} H(t+kd) = \dfrac{d \cdot \sum_k D(t+kd)}{\tau}$

(λέμε $Y \sim G(x)$ περιοδική αν $\exists d: \sum_{i\in\mathbb{Z}} P(Y = kd) = 1$)

αυτή μας ενδιαφέρει • Περ II: Αν $G(x)$ όχι περιοδική: $\boxed{\lim_{t\to\infty} H(t) = \dfrac{\int_0^{\infty} D(t)\,dt}{\tau}}$

(εδώ ανήκουν όλες οι συνεχείς)

όσο έχουμε συνεχείς κατανομές ενδιαμέσων χρόνων εφαρμόζουμε την Περ II. Μέσος της $G(x)$ (Μέσος ενδιαμ. χρό…

Διαισθητικά (η απόδειξη): Κάτι τέτοιο πρέπει να ισχύει γιατί

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \lim_{t\to\infty} \left(D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dM_G(x) \right)$$

$$\simeq 0 + \int_0^t D(t-x) \frac{1}{\tau}\, dx \quad \left(M_G(x) \simeq \frac{x}{\tau} \right)$$

$t-x=u$ $$= \frac{1}{\tau} \lim_{t\to\infty} \int_0^t D(u)\, du$$

$$= \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} D(u)\, du$$

SOS. Εφαρμογή: Η Εναλλασσόμενη Ανον. Διαδ.

Μηχάνημα που εναλλάσσεται σε περιοδ. λειτ. και βλάβης.

Περίοδος λειτ: $U_1, U_2, \dots \sim G_U$

Περίοδος βλάβης: $D_1, D_2, \dots \sim G_D$

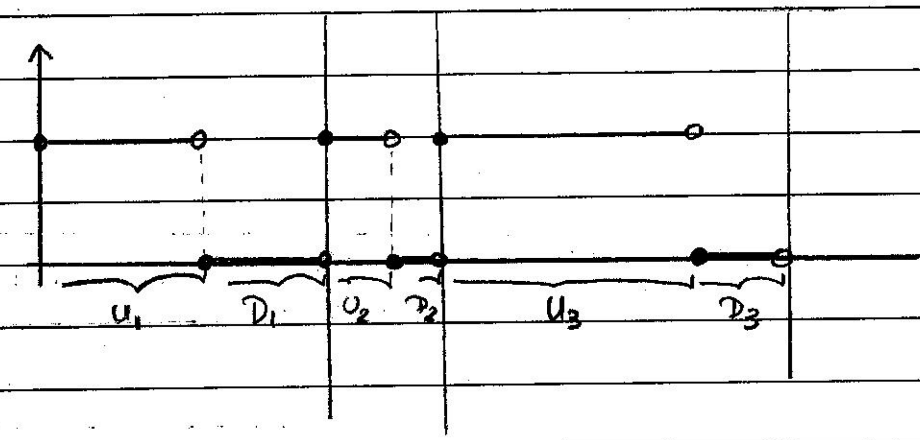
(U_i, D_i) ανεξ. ισον.

$Z(t) =$ Κατ. της μηχ τη στιγμή t.

1) Ποιο είναι το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου που το σύστημα λειτουργεί $= \lim_{t\to\infty} \frac{E[\text{στο } [0,t]]}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t Z(u)du]}{t}$ ← ΣΑΘΑ

2) Πιθ. λειτουργίας τη στιγμή $t = P(Z(t)=1)$ ← αναν. εξισ + λυση

3) Οριακή πιθ. λειτουργίας $= \lim_{t\to\infty} P(Z(t)=1)$ ← ΒΑΘ



1) Θέτω $R(t) = \int_0^t Z(u)du$

διαδ. αμοιβής: $R_n = R(S_n) - R(S_{n-1}) = U_n$

$$X_n = U_n + D_n$$

Τα ζεύγη (X_n, R_n), $n \geq 1$ ανεξ, ισον. και

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t Z(u)du]}{t} \overset{\text{ΣΑΘΑ}}{=} \frac{E[R_n]}{E[X_n]} = \frac{E[U]}{E[U]+E[D]}$$

$$\frac{E[\text{Χρονος λειτ 1 φορα}]}{E[\text{Χρον. λειτ 1 φορα}] + E[\text{Χρονος επισκ. 1 φορα}]}$$