18/3/2016

5. Μηχάνημα με χρόνο ζωής $X \sim \exp(\lambda)$

Το μηχάνημα επιθεωρείται κατά μέσο όρο κάθε $t = \frac{1}{\mu}$ χρονικές μονάδες.

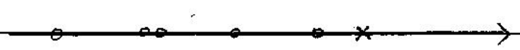
Ερώτημα: Y: χρόνος που ανακαλύπτουμε ότι το μηχάνημα είναι χαλασμένο (στιγμή επιθεώρησης)

$E[Y] =$; (i) αν η διαδικασία επιθ. είναι ντετερμινιστική

(ii) αν " " " είναι Poisson

Ποια διαδικασία επιθ. μας συμφέρει;

(i) 

(ii) 

(i) $E[Y] = E[E[Y|X]] = \int_0^\infty E[Y|X=x] f_X(x)dx =$

Όμως, $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x>0$

$E[Y|X=x] = nt$, αν $(n-1)t \leq x < nt$, $n = 1, 2, \dots$

(όταν το μηχάνημα χαλάει τη χρονική στιγμή x θα το βρούμε στην επόμενη επιθεώρηση

$$E[Y] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)t}^{nt} nt \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nt \left[-e^{-\lambda x}\right]_{x=(n-1)t}^{x=nt}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -nt \left(e^{-\lambda(n-1)t} - e^{-\lambda nt}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nt e^{-\lambda nt} \left(e^{\lambda t} - 1\right)$$

$$= \left(e^{\lambda t} - 1\right) t \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\lambda nt}$$

$$= \left(e^{\lambda t} - 1\right) \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2} \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}\right)$$

$$= \frac{t}{1 - e^{-\lambda t}}$$

(ii) $E[Y] = E[X] + \underbrace{E[Y-X]}_{\text{υπολειπόμενος μιας } \sim Exp(\mu)} = \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu}$

Έστω $E[Y_1] = \dfrac{t}{1-e^{-\lambda t}} = \dfrac{1}{\mu(1-e^{-\lambda/\mu})}$

$$E[Y_2] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

Έχουμε $E[Y_2] - E[Y_1] = \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{\mu(1-e^{-\lambda/\mu})} = \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1-e^{-\lambda/\mu}-1}{\mu(1-e^{-\lambda/\mu})}$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda/\mu}}{\mu(1-e^{-\lambda/\mu})} = \frac{\mu(1-e^{-\lambda/\mu}) - \lambda e^{-\lambda/\mu}}{\lambda\mu(1-e^{-\lambda/\mu})}$$

$$= \frac{\mu - (\lambda+\mu)e^{-\lambda/\mu}}{\lambda\mu(1-e^{-\lambda/\mu})} > 0$$

↳ χρησιμοποιώ ότι $e^x \geq 1+x$

Άρα $E[Y_2] > E[Y_1]$ άρα οι τακτικοί χρόνοι επιθ. είναι καλύτεροι από τους τυχαίους.

6. $\{N(t)\}$ ο.δ. Poisson(λ), $Cov(N(t), N(s)) =$;

Έστω $s<t$. Τότε $Cov(N(s),N(t)) = E[N(s)N(t)] - \underbrace{E[N(s)]}_{\lambda s}\underbrace{E[N(t)]}_{\lambda t}$

Έχω $E[N(s)N(t)] = E[N(s)(N(s)+N(t)-N(s))]$

$= E[(N(s))^2 + N(s)\cdot(N(t)-N(s))]$

$\overset{\text{ανεξ. προσ.}}{=} E[(N(s))^2] + E[N(s)]\cdot E[N(t)-N(s)]$

$= Var[N(s)] + (E[N(s)])^2 + E[N(s)]\cdot E[N(t)-N(s)]$

$= \lambda s + \lambda^2 s^2 + \lambda s \cdot \lambda(t-s)$

$= \lambda s + \lambda^2 st$

Τελικά, $Cov(N(s),N(t)) = \lambda s + \lambda^2 st - \lambda s \lambda t = \lambda s$

Γενικά, $Cov(N(s),N(t)) = \lambda \min(s,t)$

7. Πελάτες φτάνουν σε τράπεζα σύμφωνα με ανεξ διαδ. Poisson

Ρυθμοί αφίξεων	Μέσος χρ. εξυπηρέτησης
$\lambda_1 = 10$ πελ/ώρα → Καταθέσεις	3'
$\lambda_2 = 12$ πελ/ώρα → Αναλήψεις	2'
$\lambda_3 = 8$ πελ/ώρα → Άλλες συναλλαγές	10'

X = Χρ. εξυπ. ενός πελάτη

$E[X] = ;$

Y = τύπος πελάτη
1 → κατάθεση
2 → ανάληψη
3 → άλλες συναλλαγές

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \sum_{i=1}^{3} P(Y=i)\, \underbrace{E[X|Y=i]}_{\text{γνωστό (2η στήλη)}}$$

πιθανότητα ένα γεγονός στην υπέρθεση των τριών Poisson να είναι τύπου i $= \dfrac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j}$

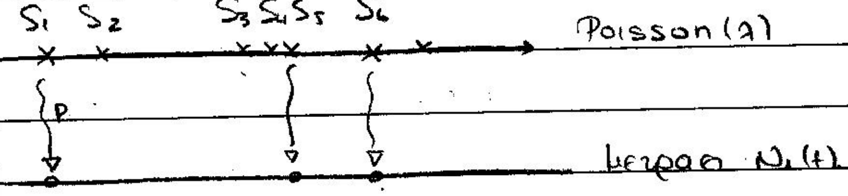
$$= \frac{10}{30} \cdot 3 + \frac{12}{30} \cdot 2 + \frac{8}{30} \cdot 10 = \frac{15}{15} + \frac{12}{15} + \frac{40}{15} = \frac{67}{15}$$

Εναλλακτική λύση για την 6.

$$Cov(N(s), N(t)) = Cov(N(s), N(s) + N(t) - N(s))$$
$$= Cov(N(s), N(s)) + Cov(N(s), N(t) - N(s))$$
$$= Var(N(s)) + 0 \quad \text{ανεξ.}$$
$$= \lambda s$$

Μη ομογενής διάσπαση της σ.δ. Poisson (Σημαντικό αποτέλεσμα)

Θεώρημα: $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ και κάθε γεγονός της καταγράφεται ως τύπου 1 με πιθ $p(t)$, αν συμβεί τη στιγμή t, ανεξ από τα άλλα και $N_1(t) = \#$ γεγ. τύπου 1 στο $(0,t]$ τότε $N_1(t)$ τ.μ. Poisson ρυθμού $\lambda \int_0^t p(u)\,du$



<u>Απόδειξη</u>

μου λέει αν το γεγονός που έχει γίνει τη χρ. στιγμή S_i έχει καταγραφεί

$$N_1(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} I(S_i) \qquad \text{όπου} \qquad I(t) = \begin{cases} 1, & \text{με πιθ } p(t) \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$$

Υπενθύμιση: $N \sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow P_N(z) = e^{-\lambda(1-z)}$

$$\left(P_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n = e^{-\lambda} e^{\lambda z} \right)$$

Έχω
$$P_{N_1(t)}(z) = E\left[z^{N_1(t)}\right] = E\left[E\left[z^{N_1(t)} \mid N(t)\right]\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) \cdot E\left[z^{N_1(t)} \mid N(t)=n\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) \cdot E\left[z^{\sum_{i=1}^{n} I(S_i)} \mid N(t)=n\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) \cdot E\left[z^{\sum_{i=1}^{n} I(U_{i:n})}\right]$$

όπου $U_{i:n}$ οι διατετ. τ.μ. από n ανεξ. $U_i \sim \text{Uniform}([0,t])$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) \cdot E\left[z^{\sum_{i=1}^{n} I(U_i)}\right]$$

αν τις πάρω διατεταγμένες ή όχι τις πάρω αν έχω το άθροισμα όλων είναι το ίδιο και αφού είναι ισόνομες:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) \left(E\left[z^{I(U)}\right]\right)^n$$
$$= P_{N(t)}\left(E\left[z^{I(U)}\right]\right)$$
$$= e^{-\lambda t\left(1 - E[z]^{I(U)}\right)}$$

Έχω
$$E\left[z^{I(U)}\right] = \int_0^t \underbrace{E\left[z^{I(U)} \mid U=x\right]}_{z^1 p(x) + z^0(1-p(x))} \cdot \overset{f_U(u)}{\frac{1}{t}}\, dx = \int_0^t (1 - p(x)(1-z))\, dx$$
$$= \frac{1}{t}\left(t - (1-z)\int_0^t p(x)\,dx\right)$$

Τελικά, $P_{N_1(t)}(z) = e^{-\lambda t\left(1 - 1 + (1-z)\frac{1}{t}\int_0^t p(x)dx\right)} = e^{-\lambda \int_0^t p(x)\,dx\,(1-z)}$

$\Rightarrow N_1(t) \sim \text{Poisson}\left(\lambda \int_0^t p(u)\,du\right)$ [illegible]

Άσκηση

$1 \leq k \leq n-1 : \quad E[S_k \mid S_n = t] = ;$

<u>1η λύση</u>

$$E[S_k \mid S_n = t] = \lim_{h \to 0^+} E[S_k \mid N(t-h) = n-1,\ N(t) = n]$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{E[S_k \mathbb{1}\{N(t-h) = n-1,\ N(t) = n\}]}{P(N(t-h) = n-1,\ N(t) = n)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{E[S_k \mathbb{1}\{N(t-h) = n-1,\ N(t) = n\}]}{P(N(t-h) = n-1)\, P(N(t) - N(t-h) = 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{E[S_k \mathbb{1}\{N(t) = n\} \mid N(t-h) = n-1]}{P(N(h) = 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{E[S_k \cdot \mathbb{1}\{N(t) - N(t-h) = 1\} \mid N(t-h) = n-1]}{P(N(h) = 1)}$$

αυτό δεν λέει για το διάστ... ανε...

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{E[S_k \mid N(t-h) = n-1] \cdot \cancel{P(N(t) - N(t-h) = 1 \mid N(t-h) = k)}}{\cancel{P(N(h) = 1)}}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{k(t-h)}{(n-1)+1} = \frac{kt}{n}$$

<u>2η λύση</u>

(*) Για να τις κάνω ανεξάρτητες: $f_{S_n, S_k}(x, t) = f_{(S_k, S_n - S_k)}(x, t-x)$

$$E[S_k \mid S_n = t] = \int_0^t x\, f_{S_k \mid S_n}(x \mid t)\, dx = \int_0^t x\, \frac{f_{S_k, S_n}(x, t)}{f_{S_n}(t)}\, dx$$

(*)

$$= \int_0^t \frac{x\, \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot x^{k-1} e^{-\lambda x} \cdot \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k-1)!} (t-x)^{n-k-1} e^{-\lambda(t-x)}}{\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, t^{n-1} e^{-\lambda t}}\, dx$$

ολοκληρώνω σπίτι → οδηγεί γάμμα