9/3/2016

Ισοδυναμία ορισμών ΙΙ, ΙΙΙ

(ΙΙ) $\Rightarrow$ (ΙΙΙ) πρεπει νδ την δευτερη ιδιοτητα

Εχουμε $P(N(h)=0) = e^{-\lambda h} = 1-\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h^3)}{3!} + \dots$

$$= 1-\lambda h + o(h), \quad h\to 0^+$$

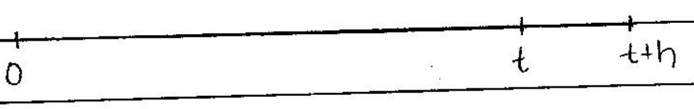
(αλλιως αρκει νδο $\frac{e^{-\lambda h}-(1-\lambda h)}{h} \to 0, \ h\to 0^+$)

$$P(N(h)=1) = e^{-\lambda h}\lambda h = \lambda h - (\lambda h^2) + \frac{(\lambda h)^3}{2!} - \frac{(\lambda h)^4}{3!} + \dots$$

$$= \lambda h + o(h), \quad h\to 0^+$$

Τέλος, $\sum_{n=2}^{\infty} P(N(h)=n) = 1-e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h} = o(h), \ h\to 0^+$

(ΙΙΙ) $\Rightarrow$ (ΙΙ)



$P_n(t) = P(N(t)=n), \ n=0,1,\dots$

$$P_n(t+h) = P(N(t+h)=n) = \sum_{k=0}^{n} P(N(t)=k)\,P(N(t+h)=n \mid N(t)=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(N(t)=k)\,\underbrace{P(N(t+h)-N(t)=n-k \mid \cancel{N(t)=k})}_{P(N(h)=n-k)}$$

λογω ανεξ προσαυξησεων

λογω ομογενων προσαυξ

$$= P(N(t)=n)\cdot P(N(h)=0) + P(N(t)=n-1)\,P(N(h)=1) + o(h)$$

$$= P(N(t)=n)\cdot(1-\lambda h+o(h)) + P(N(t)=n-1)(\lambda h+o(h)) + o(h)$$

$$= P_n(t)(1-\lambda h) + P_{n-1}(t)\lambda h + o(h), \quad h\to 0^+, \ n\ge 1$$

Για $n=0$:

$$P_0(t+h) = P_0(t)(1-\lambda h) + o(h) \quad , h \to 0^+$$

Έχουμε:

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0^+} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \quad (1)$$

Επίσης,

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0^+} p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$$
$n \geq 1$

Για να προχωρήσω θέλω νδο: $p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n \geq 0$

1ος τρόπος: με επαγωγή.

2ος τρόπος: με πιθανογεννήτριες

Έστω $P_{N(t)}(z) = E[z^{N(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n$.

Παίρνω την $(1) \times z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2) \times z^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n'(t) z^n =$

$$= -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n + \lambda z \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t) z^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} P_{N(t)}(z) = -\lambda(1-z) P_{N(t)}(z)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\log P_{N(t)}(z)) = -\lambda(1-z)$$

$$\Rightarrow \log P_{N(t)}(z) = -\lambda t(1-z)$$

$$\Rightarrow P_{N(t)}(z) = c e^{-\lambda t(1-z)}$$

Για $z=1$: $c=1$.

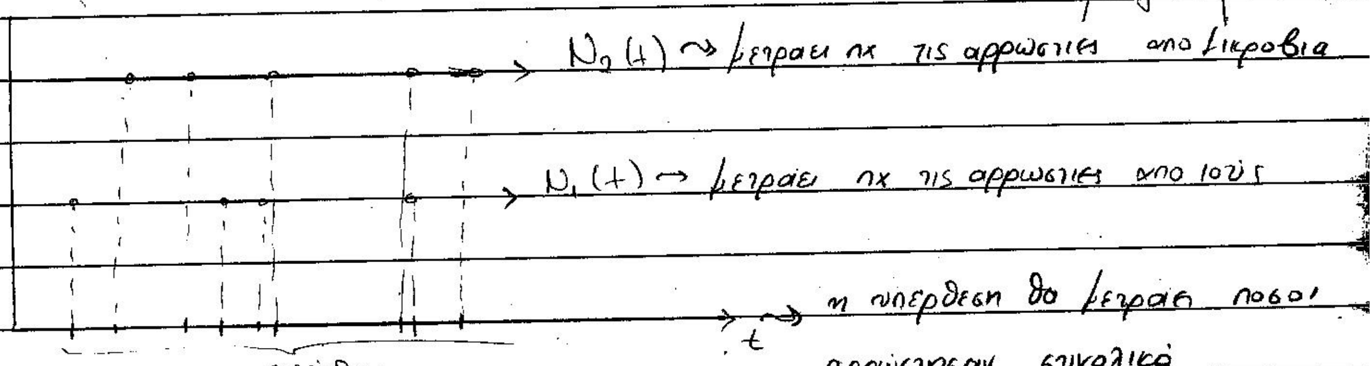
$$P_{N(t)}(z) = e^{-\lambda t(1-z)} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t z} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} z^n$$

$$\Rightarrow P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n=0,1,\dots$$

Υπέρθεση - Διάσπαση διαδικασιών Poisson

Υπέρθεση • $\{N_j(t)\}$ σ.δ. Poisson(λ_j), $j=1,2\dots$

Αν $N(t) = \sum_j N_j(t)$ τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται υπέρθεση των $\{N_j(t)\}$



• $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson(λ) και κάθε γεγονός της καταγράφεται ως τύπου j με πιθανότητα P_j ανεξ από τα υπόλοιπα.

Αν $N_j(t)$ = # γεγον. τύπου j στο $[0,t]$ τότε οι $\{N_j(t)\}$, $j=1,2,\dots$ αποτελούν μία διάσπαση της $\{N(t)\}$ σύμφωνα με την $(P_j : j=1,2,\dots)$

πχ. ασθενείς πηγαίνουν στο νοσοκομείο. Έρχεται με πυρετό τον στέλνουν στο παθολογικό, έρχεται με αμυγδαλίτιδα → στον ΩΡΛ. (παθολογικό, ΩΡΛ: διασπάσεις)

Θεωρήματα Υπέρθεσης - Διάσπασης

I. $\{N_j(t)\}$ σ.δ. Poisson(λ_j), $j=1,2\dots$ ανεξ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Η υπέρθεση } \{N(t)\} \text{ είναι σ.δ. Poisson}(\textstyle\sum_j \lambda_j)}$

II. $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson (λ)
$(P_j ; j = 1, 2, \ldots)$ διακριτή σ.π

$\Rightarrow$ Η διάσπαση $\{N_j(t)\}$, $j = 1, 2, \ldots$
i) $\{N_j(t)\}$ σ.δ. Poisson $(\lambda \cdot P_j)$
ii) $\{N_j(t)\}$ ανεξ.

III. $\{N_j(t)\}$ σ.δ. Poisson (λ_j), $j = 1, 2, \ldots$
ανεξ.
$\{N(t)\}$ η υπέρθεση τους
Z_k = τύπος του k-οστού γεγον.
της $\{N(t)\}$
(του πρώτου γεγ. είναι 1 (αν ανήκει στην $N_1(t)$)
του δεύτερου γεγ. είναι τύπος 3 (αν ανήκει στην $N_3(t)$))

$\Rightarrow$ i) $\boxed{P(Z_k = j) = \dfrac{\lambda_j}{\sum \lambda_i}}$

ii) Z_k, $k = 1, 2, \ldots$
ανεξ. τ.μ.

<u>Αποδείξεις - αιτιολογήσεις.</u>

$\boxed{\mathrm{I}}$ <u>Δουλεύοντας με τον ορισ. I :</u>

Χρόνος μέχρι το 1^{o} γεγ. της υπέρθεσης = min{ χρόνων $1^{ων}$ γεγ. των σ.δ. Poisson (λ_j) }

$= \min(\mathcal{E}xp(\lambda_1), \mathcal{E}xp(\lambda_2), \ldots, \mathcal{E}xp(\lambda_n)) \sim \mathcal{E}xp \sum_j \lambda_j$

Χρόνος μεταξύ $(n-1)^{ου}$ και $n^{ου}$ γεγον. της υπέρθεσης =
min (ενός ενδιάμεσου $\mathcal{E}xp(\lambda_j)$ για κάποιο j, υπολειπόμενων $\mathcal{E}xp(\lambda_i)$ $i \neq j$)
$\sim \mathcal{E}xp(\sum_j \lambda_j)$

Η ανεξαρτησία λόγω της αμνήμονης

Δουλεύοντας με τον ορισ. II :

Έστω $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$

Οι $N_1(t_1), N_1(t_2) - N_1(t_1), \ldots, N_1(t_n) - N_1(t_{n-1})$ ανεξ. (μεταξύ τους λόγω των ανεξ. προσαυ.

$N_2(t_1), N_2(t_2) - N_2(t_1), \ldots, N_2(t_n) - N_2(t_{n-1})$ ανεξ.

$\vdots$

$N_j(t_1), N_j(t_2) - N_j(t_1), \ldots, N_j(t_n) - N_j(t_{n-1})$

όλες ανεξάρτητες από υπόθεση

Οπότε και οι:

$$N(t_1), \quad N(t_2)-N(t_1), \quad \dots, \quad N(t_n)-N(t_{n-1})$$

$$\sum_j N_j(t_1) \quad \sum_j (N_j(t_2)-N_j(t_1)) \quad \sum_j (N_j(t_n)-N_j(t_{n-1}))$$

ανεξάρτητες.

Άρα η $\{N(t)\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Ομογένεια προσαυξ. $N(s+t)-N(s) = \#$ γεγονότων της υπερθ. στο $(s, s+t]$ (θέλω νδο δεν εξαρτάται από το s)

$$= \sum_j (N_j(s+t)-N_j(s))$$

$\overset{d}{=}$ ← ομογενής προσαυξήσεις την $\{N_j(t)\}$

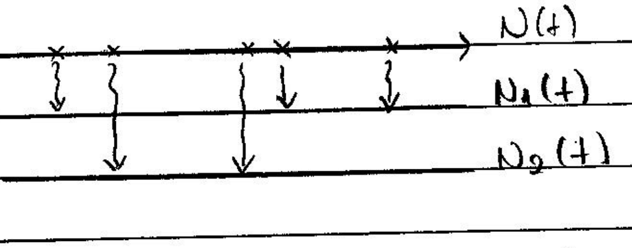
$N_j(t)$

κατανομή ανεξάρτητη του s

Άρα η $\{N(t)\}$ έχει ομογ. προσαυξήσεις

Ακολουθούν Poisson $N(t) = \sum_j N_j(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_j t)$ ανεξ. $\Rightarrow N(t) \sim \text{Poisson}(\sum_j \lambda_j t)$

$\boxed{\text{II}}$



Αν $X_1, X_2,$ είναι οι ανεξ. $Exp(\lambda)$ χρόνοι της $\{N(t)\}$. Τότε ο χρόνος του $1^{ου}$ γεγονότος της $\{N_j(t)\}$ είναι $\sum_{i=1}^{N} X_i$ με $P(N=n) = (1-p_j)^{n}$

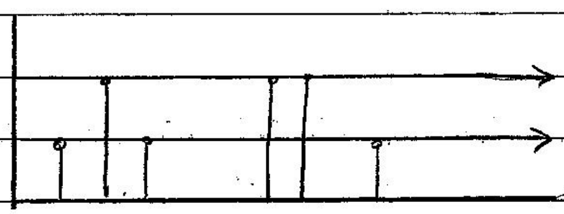
$n=1,2,\dots$

Έχουμε $P_N(z) = \dfrac{p_j z}{1-(1-p_j)z}$

και $\tilde{F}_X(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda+s} \Rightarrow \tilde{F}_{\sum X_i}(s) = \dfrac{\lambda p_j}{s+\lambda p_j}$

δλδ το $1^{ο}$ γεγον. της $\{N_j(t)\}$ συμβαίνει σε $Exp(\lambda p_j)$ και

III



$P(Z_1 = j) = P($1ο γεγ. της υπερθεσης να είναι τυπου $j)$

$= P($min(χρονων των 1ων γεγ. των $\{N_j(t)\}$) να πιανε

στο πρωτο γεγονος της $N_j(t))$

$= P(X_j = \min(X_1, X_2, \dots, X_n))$ οπου X_i: 1ο γεγ. της $\{N_i(t)\}$

$= \lambda_j / \sum_i \lambda_i$