4/3/2016

Η διαδικασία Poisson

Ιδέα της Poisson

(Να μοντελοποιηθεί η ιδέα να συμβαίνουν τα γεγονότα στο χρόνο)

$N(t)$ = # γεγονότων που συμβαίνουν "εντελώς τυχαία" ως τη στιγμή t με ρυθμό λ

$\{N(t),\ t \geq 0\}$, Poisson στοχαστική διαδικασία με ρυθμό λ

• "εντελώς τυχαία"

$\Downarrow$

Ο χρόνος ως το επόμενο γεγονός κάποια στιγμή t δεν εξαρτάται από την μέχρι τώρα ιστορία

δλδ: οι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων έχουν την αμνημονικότητα (δλδ είναι εκθετικές κατανομές)

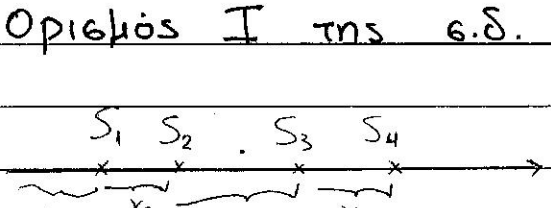
• ρυθμός λ

$\Downarrow$

$\frac{\text{\# γεγονότων}}{\text{χρονική μονάδα}} = \lambda \Rightarrow$ συχνότητα γεγονότων $= \lambda \Rightarrow$

μέσος χρόνος μεταξύ 2 γεγονότων $= \frac{1}{\lambda}$ ← η περίοδος από τη φυσική

Ορισμός I της σ.δ. Poisson (Ανανεωτικός)



Αν $\{X_n,\ n=1,2,\dots\}$ ανεξ. ισονομ. $Exp(\lambda)$ και $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$,

$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\} = \#\ S_n$ με $S_n \leq t$

↳ πόσα γεγονότα έχουν συμβεί μέχρι την στιγμή t

Τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται σ.δ. Poisson με ρυθμό λ.

Κατανομές των S_n, $N(t)$

X_n: χρόνος μεταξύ $n-1$ και n-οστού γεγονότος
S_n: χρόνος n-οστού γεγονότος
$N(t)$: πλήθος γεγονότων μέχρι τη στιγμή t.

$X_n \sim Exp(\lambda)$, $f_{X_n}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x>0$, $F_{X_n}(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x>0$

$S_n \sim Erlang(n,\lambda)$ $f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, x>0$

$$F_{S_n}(x) = \int_0^x \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u} du$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$$

$N(t) \sim Poisson(\lambda t)$

$P(N(t)=n) = P(\overbrace{S_n \leq t < S_{n+1}}^{AB^c})$ για να έχουν συμβεί τη χρονική στιγ/η n γεγο

$= \underbrace{P(S_n \leq t)}_{A} - \underbrace{P(S_{n+1} \leq t)}_{B}$ πρέπει το παραπάνω

($S_{n+1}^{\leq t} \in S_n^{\leq t}$: αν συμβεί το $S_{n+1} \leq t$ τότε θα ισχύει $S_n \leq t$)

$$= \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) - \left(1 - \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Τ.μ. Poisson και σ.δ. Poisson

X τ.μ. Poisson $(\lambda) \Leftrightarrow P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, \ldots$

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson(λ) $\Leftrightarrow$ $N(t) = \#$ γεγονότων στο $[0,t]$ εντελώς τυχαία με ρυθμό λ

τ.μ. $N(t) \sim$ Poisson(λt)

για κάθε σταθερό t η τ.μ. $N(t) \sim$ Poisson(λt)

Αναγεννητική ιδιότητα της Poisson

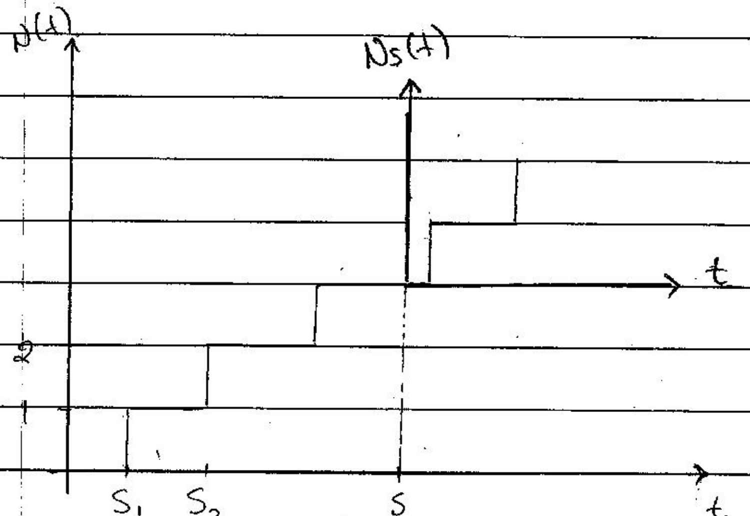
Θεώρημα:

Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ και $s>0$. Ορίζουμε:

$N_s(t) = N(s+t) - N(s)$, $t>0$

$= \#$ γεγονότων στο $[s, s+t]$

$= \#$ γεγονότων μετά το s, σε χρονικό διάστημα μήκους t



Τότε η $\{N(t): 0 \leq t \leq s\}$ και η $\{N_s(t): t \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητες. Επίσης η $\{N_s(t)\}$ είναι σ.δ. Poisson(λ).

Αιτιολόγηση της ιδιότητας

$\{N(t): 0 \leq t \leq s\}$	$\{N_s(t): t \geq 0\}$
καθορίζεται: $X_1, X_2, \ldots, X_k$	καθορίζεται από: $X_{k+1} - \left(s - \sum_{i=1}^{k} X_i\right)$
$: X_{k+1} > s - \sum_{i=1}^{k} X_i$	$X_{k+2}, X_{k+3}, \ldots$

το k είναι το τελευταίο γεγονός που συμβαίνει

Έχω: $X_{k+2}, X_{k+3}, \ldots$ είναι προφανώς ανεξάρτητες της $\{N(t): 0 \leq t \leq$

Επίσης, $P(X_{r+1} - (s - \sum_{i=1}^{r} X_i) > t \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_r = x_r; X_{r+1} > s - \sum_{i=1}^{r} x_i)$

ανεξαρτησία X_i

$X_{r+1} \sim exp(\lambda)$ αμνήμονη

$= P(X_{r+1} > t + s - \sum_{i=1}^{r} x_i \mid \cancel{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_r = x_r}, X_{r+1} > s - \sum_{i=1}^{r} x_i)$

$= P(X_{r+1} > t) = e^{-\lambda t} \longrightarrow X_{r+1} - (s - \sum_{i=1}^{r} X_i) \sim exp(\lambda)$ και ανεξάρτητο της $\{N(t): 0 < t < s\}$

Ιδιότητα Ανεξαρτήτων και Ομογενών Προσαυξήσεων

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson(λ)

Τότε αν $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ οι τ.μ.:

$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ λέγονται προσαυξήσεις

Τότε,

distribution

1) Η $\{N(t)\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

2) Η $\{N(t)\}$ έχει ομογενείς προσαυξήσεις, δλδ $N(t+s) - N(s) \overset{d}{=} N(t)$

↳ πόσα γεγονότα θα γίνουν σε ένα διάστημα t εξαρτάται μόνο από το

(μήκος του κομμάτι) διάστημα t και όχι στο σημείο στο οποίο βρίσκεται.

δλδ πόσα γεγονότα θα συμβούν από τη χρονική στιγμή 1 έως την 2 θα είναι στοχαστικά ίδιο με το πόσα θα συμβούν από την 5 έως την 6.

Ορισμός II της σ.δ. Poisson

(ολίγος) διαισθητικά δεν είναι καλός ορισμός αλλά είναι υπολογιστικά.

Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ. με $N(t) \in \{0, 1, \dots\}$ $\forall t$, $N(t) \nearrow$

$\{N(t)\}$ απαριθμήτρια (παίρνει τιμές $\{0,1,\dots\}$ και $\nearrow$)

Η $N(t)$ λέγεται σ.δ. Poisson(λ):

i) Έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις

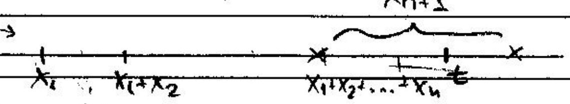
ii) $P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n = 0, 1, \dots$ ($N(t) \overset{\text{τ.μ.}}{\sim}$ Poisson(λt) $\forall t$)

Ισοδυναμία ορισμών Ι, ΙΙ

(Ι) ⇒ (ΙΙ) ✓ όλα τα προηγούμενα

(ΙΙ) ⇒ (Ι) Πρέπει ξεκινώντας από τις ιδιότητες (i), (ii) του ορ. να δείξω ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων της $\{N(t)\}$ είναι ανεξ. $\exp(\lambda)$

$P(X_1>t) = P(N(t)=0) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} \Rightarrow X_1 \sim \exp(\lambda)$

$P(X_{n+1}>t \mid X_1=x_1,\ X_2=x_2, \dots, X_n=x_n) =$ 

↳ διαγράφω τη δέσμευση λόγω (i).

$= P($στο διάστημα $[x_1+\dots+x_n,\ x_1+x_2+\dots+x_n+t]$ όχι γεγονότα$)$

→ διάστημα μήκους t

όχι γεγονότα

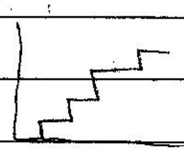
$= e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^0}{0!}$

$= e^{-\lambda t}$

Άρα,

X_{n+1} ανεξ. των $X_1, X_2, \dots, X_n$, $X_{n+1} \sim \exp(\lambda)$.

Ορισμός ΙΙΙ της σ.δ. Poisson (Τοπικός)

Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ. με $N(t) \in \{0,1,2,\dots\}$, $N(t) \nearrow$ 

Η $N(t)$ λέγεται σ.δ. Poisson(λ):

i) Έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις

ii)
$$P(N(h)=n) = \begin{cases} 1-\lambda h + o(h), & n=0 \\ \lambda h + o(h), & n=1 \\ o(h), & n \geq 2 \end{cases}$$
όπου $\dfrac{o(h)}{h} \to 0$ καθώς $h \to 0^+$

↳ στηρίζεται στο να διακριτοποιήσουμε το χρόνο.