2/3/2016

Η εκθετική κατανομή

Η ιδέα της εκθετικής κατανομής (Υπολογισμός χρόνου ζωής με την αμνήμονη ιδιότητα)

X: χρόνος ζωής χωρίς μνήμη (έχω φτάσει σε μια ηλικία, η πιθ. να ζήσω δεν εξαρτάται από την ηλικία)

$X \geq 0$

X συνεχής

Αμνήμονη ιδιότητα:

$P(A|B)$, $P(X > s+t \mid X > s) = \underbrace{P(X > t)}_{g(t)}$ δείχνει ότι είναι ανεξάρτητη του s.

ορισμός δεσμευμένης $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{g(t+s)}{g(s)}$

Έστω $g(t) = P(X > t)$ τότε: θέλω η $g(t)$ να έχει τις παραπάνω ιδιότητες

$g(0) = 1$

$g(t)$ = συνεχής

$g(t+s) = g(t) \cdot g(s)$

↓ προκύπτει με επαγωγή

Έχουμε τότε: $g(t_1 + t_2 + \dots + t_n) = g(t_1) g(t_2) \cdots g(t_n) \quad \forall\, t_1, t_2, \dots, t_n$

$$g\Big(\underbrace{\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} + \dots + \tfrac{1}{n}}_{n \text{ φορές}}\Big) = g(1) = g\left(\tfrac{1}{n}\right)^n \Rightarrow g\left(\tfrac{1}{n}\right) = g(1)^{1/n}$$

$$g\left(\frac{m}{n}\right) = g\Big(\underbrace{\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} + \dots + \tfrac{1}{n}}_{m \text{ φορές}}\Big) = g\left(\tfrac{1}{n}\right)^m = g(1)^{m/n}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι: $g(x) = g(1)^x$, $x \in \mathbb{Q}$

Αν $x \in \mathbb{R}$ $\exists \{x_n\} \in \mathbb{Q}$ με $x_n \to x$ οπότε $g(x) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) \overset{g \text{ συνεχής}}{=} \lim_{n\to\infty} g(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty} g(1)^{x_n} = g(1)^x$$

Άρα αναγκαστικά $g(t) = g(1)^t = e^{-\overbrace{(-\log g(1))}^{\lambda} t}$

Συμπέρασμα: Κάθε τ.μ. X με $X \geq 0$ συνεχής και την αμνήμονη ιδιότητα έχει συνάρτηση επιβίωσης $g(t) = P(X > t) = e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ για κάποιο $\lambda > 0$.

$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$

σ.π.π. $f_X(t) = F_X'(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$

$X \sim exp(\lambda)$ ....

Η έννοια του ρυθμού βλάβης

$X \geq 0$ συνεχής τ.μ. $\leftrightarrow$ χρόνος ζωής

ρυθμός βλάβης του X

$\lambda_X(t)$: βαθμίδα αποτυχίας (hazard, failure rate)

$= \lim\limits_{\delta t \to 0^+} \dfrac{P(t < X \leq t+\delta t \mid X > t)}{\delta t}$ Στιγμιαίος ρυθμός θανάτ

$= \dfrac{\lim\limits_{\delta t \to 0^+} \frac{P(t<X\leq t+\delta t)}{\delta t}}{P(X>t)}$

$= \dfrac{f_X(t)}{1-F_X(t)}$

Για την εκθετική ισχύει: $X \sim exp(\lambda)$

$\lambda_X(t) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$ σταθερό ανεξάρτητο του λ.

$X \sim exp(\lambda) \iff \lambda_X(t) = \lambda$ σταθερό

Για μια τ.μ. $X \geq 0$, συνεχή ο $\lambda_X(t)$ προσδιορίζει τις $\overbrace{F_X(t)}^{σ.κ}$, $\overbrace{f_X(t)}^{σ.π.π}$

διότι $\lambda_X(t) = \dfrac{f_X(t)}{1-F_X(t)} = \dfrac{F_X'(t)}{1-F_X(t)} = -(\log(1-F_X(t)))'$

Ολοκληρώνοντας έχω: $-\int_0^t \lambda_X(u)\,du = \log(1-F_X(t)) - \cancel{\log(1-\overbrace{F_X(0)}^{0})}$

$\Rightarrow F_X(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_X(u)\,du}, \quad t \geq 0$

$\Rightarrow f_X(t) = \lambda_X(t)\, e^{-\int_0^t \lambda_X(u)\,du}, \quad t \geq 0$

Ιδιότητες εκθετικής

1) $X \sim \exp(\lambda) \Rightarrow E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}, \quad E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$

Αποδ

$$\tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_X(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x} dx = \lambda \frac{e^{-(s+\lambda)x}}{-(s+\lambda)}\Bigg|_0^\infty$$

$$= \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

$$E[X^n] = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0) = (-1)^n (-1)(-2)\cdots(-n)\cdot \lambda \cdot (s+\lambda)^{-(n+1)} = \frac{n!}{\lambda^n}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

2) Ιδιότητα minimum

$$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ ανεξ.} \\ X_i \sim \exp(\lambda_i), \quad i=1,2,\ldots n \end{array}\right\} \Rightarrow \min(X_1, \ldots, X_n) \sim \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

Αποδ

$$P(\min(X_1, \ldots, X_n) > t) = P(X_1 > t, X_2 > t, \ldots, X_n > t) = P(X_1 > t)P(X_2 > t) \cdots P(X_n > t)$$

$$= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \cdots e^{-\lambda_n t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)t}$$

$$\Rightarrow \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

3) Ιδιότητα δείκτη του minimum

$$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ ανεξ} \\ X_i \sim \exp(\lambda_i), \quad i=1,2,\ldots, n \end{array}\right\} \Rightarrow P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_i) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}$$

Αποδ

$$P(X_i = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = P(X_j \geq X_i, \ j \neq i) =$$

$$= \int_0^\infty P(X_j \geq X_i, j \neq i \mid X_i = x) f_{X_i}(x)dx \quad \text{θολ.}$$

$$= \int_0^\infty P(X_j \geq x, j \neq i)\, \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x} \cdots e^{-\lambda_n x}}{e^{-\lambda_i x}} \lambda_i e^{-\lambda_i x}$$

$$= \lambda_i \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)x}\, dx$$

$$= \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}$$

4) Ιδιότητα ανεξαρτησίας minimum και δείκτη

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ
$X_i \sim exp(\lambda_i)$, $i=1,2,\dots,n$
$\{N=i\} \overset{αν}{=} \{\min(X_1,\dots,X_n)=X_i\}$

$\Rightarrow N, \min(X_1,\dots,X_n)$ ανεξάρτη[τα]

Αποδ

Αρκεί να δείξω ότι: $P(N=i, \min(X_1,\dots,X_n)>x) = P(N=i)P(\min(X_1,\dots,X_n)>x)$

$\Leftrightarrow P(X_j \geq X_i > x,\ j\neq i) = P(N=i)P(\min(X_1,X_2,\dots,X_n)>x)$

$\Leftrightarrow \int_x^\infty \underbrace{P(X_j \geq u,\ j\neq i)}_{\substack{\text{όπως πριν: ανεξ.}\\ e^{-\lambda_1 u}\cdots e^{-\lambda_n u}}} \underbrace{f_x(u)}_{\lambda_i e^{-\lambda_i u}}\,du = P(N=i)P(\min(X_1,X_2,\dots,X_n)>x)$

$\Leftrightarrow \lambda_i \cdot \int_x^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)u}\,du = P(N=i)P(\min(X_1,X_2,\dots,X_n)>x)$

$\Leftrightarrow \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)x} = P(N=i)P(\min(X_1,X_2,\dots,X_n)>x)$ ισχύ[ει]

5) Ιδιότητα κλίμακας

$X \sim exp(\lambda)$, $a>0 \Rightarrow a\cdot X \sim exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

Αποδ

$P(aX \leq t) = P(X \leq \frac{t}{a}) = 1 - e^{-\lambda\frac{t}{a}} = 1 - e^{-\left(\frac{\lambda}{a}\right)t}$

6) Ισχυρή αμνήμονη ιδιότητα

$X \sim exp(\lambda)$
$Y \geq 0$ ανεξ της X

$\Rightarrow P(X > Y+s \mid X > Y) = P(X>s)$

Αποδ

7) Ιδιότητες αθροίσματος

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim exp(\lambda)$, X_i ανεξ $\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{S_n} \sim$ Erlang (n,λ) = Gamma

$$\sigma.\pi.\pi.\ f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x>0$$

8) Ιδιότητα τυχαίου αθροίσματος

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ $\sim exp(\lambda)$

N ανεξ. των X_i

$P(N=n) = (1-p)p^{n-1}, \ n\geq 1$

$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{N} X_i}_{S_N} \sim exp(\lambda(1-p))$

Αποδ

$\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$

$P_N(z) = \frac{(1-p)z}{1-pz}$

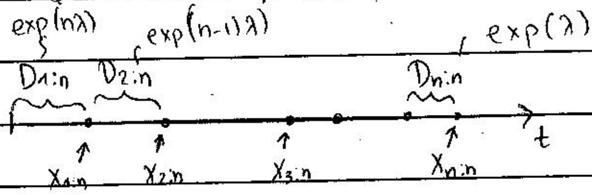
$$\Rightarrow \tilde{F}_{S_N}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s)) = \frac{(1-p)\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-p\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda(1-p)}{s+\lambda(1-p)}$$

9) Ιδιότητα διαστημάτων (spacings)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ $\sim exp(\lambda)$

$X_{1:n}, X_{2:n}, \dots X_{n:n}$ είναι οι αντίστοιχες διατετ. τ.μ.

$D_{1:n} = X_{1:n}, \ D_{2:n} = X_{2:n} - X_{1:n}, \dots, D_{n:n} = X_{n:n} - X_{n-1:n}$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow D_{i:n} \sim exp((n-i+1)\lambda), \ i=1,2,\dots,n$ ανεξ