26/2/2016

Πιθανογεννήτριες

Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes

Ορισμός

$X \geq 0$ διακριτή με τιμές στο $\{0, 1, 2, \dots\}$ η πιθανογεννήτρια της X

$$\boxed{P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) z^n = E[z^X]}$$

Ιδιότητες

1) $P_X(z)$ συγκλίνει τουλάχιστον στον $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

2) Η $P_X(z)$ προσδιορίζει μονοσήμαντα την σ.π. $P(X=n)$

(ή $P_X(z) = P_Y(z) \Leftrightarrow X, Y$ ισόνομες)

Βρίσκω αντιστοίχους της πιθανογεν.

$$P(X=n) = \frac{P_X^{(n)}(0)}{n!} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \leftarrow \text{από Taylor.}$$

3) $P_X(1) = 1$

4) $E[X(X-1)\cdots(X-n+1)] = P_X^{(n)}(1)$

καθοδική ροπή n-τάξης

$P_X(z) = E[z^X]$

$P_X'(z) = E[X z^{X-1}]$

$P_X''(z) = E[X(X-1) z^{X-2}]$

$\vdots$

$P_X^{(n)}(z) = E[X(X-1)\cdots(X-n+1) z^{X-n}]$

άρα $P_X^{(n)}(1) = E[X(X-1)\cdots(X-n+1) \cdot 1]$

Άρα,

$E[X] = P_X'(1)$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 \\ &= P_X''(1) + P_X'(1) - (P_X'(1))^2 \end{aligned}$$

5) $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με τιμές στο $\{0, 1, \dots\}$

αν $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ τότε $P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) \cdots P_{X_n}(z)$

Απόδειξη

$$P_{S_n}(z) = E[z^{S_n}] = E[z^{\sum_{i=1}^n X_i}] = E\left[\prod_{i=1}^{n} z^{X_i}\right] \overset{\text{ανεξάρτητες}}{=} \prod_{i=1}^{n} E[z^{X_i}] = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z)$$

6) $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με τιμές στο $\{0, 1, \dots\}$

N τ.μ. με τιμές στο $\{0, 1, \dots\}$ ανεξάρτητη των X_i

αν $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ τότε $P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$

σύνθεση

η πιθανογ. των X_i

Απόδειξη

θ Δ Μ Τ

$n \leftarrow$ αντικαθιστώ αφού $N=n$

$$P_{S_N}(z) = E[z^{S_N}] = E[z^{\sum_{i=1}^{N} X_i}] = E\left[E[z^{\sum_{i=1}^{N} X_i} \mid N]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \mid \cancel{N=n}]\, P(N=n)$$

δεν υπάρχει N πια

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i}]\, P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_X(z)^n P(N=n) = P_N(P_X(z))$$

Βασικές σειρές

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}, \quad |t| < 1$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n$ ... "n"
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left[{n \atop k}\right] t^k = (1-t)^{-n}, \quad |t| < 1$ $\quad \left[{n \atop k}\right] \to \binom{n+k-1}{k}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$

Πιθανογεννήτριες κλασσικών κατανομών

1) $X \sim Bernoulli(p)$ $\qquad P(X=n) = \begin{cases} p, & n=1 \\ 1-p, & n=0 \end{cases}$

$P_X(z) = pz + 1 - p$

2) $X \sim Bin(n,p)$ $\qquad P(X=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \le k \le n$

$P_X(z) = (pz + 1 - p)^n$ (χρησιμοποιώ την ιδιότητα 5)

3) $X \sim Geom(p)$ $\qquad P(X=n) = (1-p)p^n, \quad n \ge 0$ πιθανότητα επιτυχίας p
πλήθος επιτυχιών μέχρι την πρώτη αποτυχία.

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)p^n z^n = \frac{1-p}{1-pz} \quad \left(= (1-p)\sum_{n=0}^{\infty} (pz)^n\right)$$

4) $X \sim Poisson(\lambda)$ $\qquad P(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} z^n = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{-\lambda(1-z)}$$

Παραδείγματα

1) X τ.μ. ακέραια ≥ 0 με πιθανογεννήτρια: $P_X(z) = \dfrac{c-15z}{54-63z+18z^2}$

$P(X=n) = ;$

Εύρεση του c: (με την χρήση ιδιοτήτων 1,3) $P_X(1) = 1 \Rightarrow \dfrac{c-15}{54-63+18} = 1 \Rightarrow c = 24$

θέλω να εμφανιστεί $\dfrac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$

παραγοντοποιώ τον παρανομαστή $P_X(z) = \dfrac{24-15z}{54-63z+18z^2} = \dfrac{24-15z}{18(2-z)(\frac{3}{2}-z)} = \dfrac{A}{2-z} + \dfrac{B}{\frac{3}{2}-z}$

$A \times (2-z): \quad \dfrac{24-15z}{18(\frac{3}{2}-z)} = A + \dfrac{B(2-z)}{\frac{3}{2}-z} \overset{z=2}{\Rightarrow} A = \dfrac{2}{3}$

$B \times (\frac{3}{2}-z): \quad \dfrac{24-15z}{18(2-z)} = \dfrac{A(\frac{3}{2}-z)}{2-z} + B \overset{z=\frac{3}{2}}{\Rightarrow} B = \dfrac{1}{6}$

Άρα, $P_X(z) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2-z} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{\frac{3}{2}-z}$

Χρησιμοποιώ τη γεωμετρική σειρά. $P_X(z) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} + \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{2z}{3}} = \dfrac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{2}\right)^n + \dfrac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{2z}{3}\right)^n$

συντελεστές $\sum a_n z^n$

$P(X=n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

2) $X_1 \sim Geom(p_1)$, δηλ. $P(X_1 = n) = (1-p_1)p_1^n, \; n = 0, 1, \dots$

$X_2 \sim Geom(p_2)$, δηλ. $P(X_2 = n) = (1-p_2)p_2^n, \; n = 0, 1, \dots$ } ανεξάρτητες

$Z = X_1 + X_2, \quad P(Z=n) = ;$

Περίπτωση 1: $p_1 \neq p_2$

$P_Z(z) = P_{X_1}(z) \cdot P_{X_2}(z) = \dfrac{1-p_1}{1-p_1 z} \cdot \dfrac{1-p_2}{1-p_2 z} = \dfrac{A}{1-p_1 z} + \dfrac{B}{1-p_2 z}$

Περίπτωση 2: $p_1 = p_2$ $= \dfrac{(1-p)^2}{(1-pz)^2}$

Περίπτωση 1: $p_1 \neq p_2$

$A = \dfrac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_2\frac{1}{p_1})} = \dfrac{p_1(1-p_1)(1-p_2)}{p_1-p_2}$

$$B = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-p_1\left(\frac{1}{p_2}\right)} = \frac{p_2(1-p_1)(1-p_2)}{p_2-p_1}$$

$$\binom{2+k-1}{k} = \ldots$$

$$P(Z=n) = Ap_1^n + Bp_2^n$$

$$\left(\text{στρέφεται } \frac{1}{(1-t)^2} = (1-t)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{2 \atop k} \right] t^k \right)$$

Περίπτωση II : $p_1 = p_2 = p$.

$$P_Z(z) = \frac{(1-p)^2}{(1-pz)^2} = (1-p^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)p^n z^n$$

$$P(Z=n) = (n+1)(1-p^2)p^n \quad , \; n = 0, 1, \ldots$$

Μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes L-S

χρησιμοποιείται περισσ… τερο στις συνεχείς τμ … στις διακριτές έχουμε … πιθανογεννήτριες

$X \geq 0$ τ.μ. τότε ορίζεται ο μετασχ. L-S :

$$\boxed{\tilde{F}_X(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_X(x)} = \begin{cases} \sum_x e^{-sx} f_X(x) & , X \text{ διακριτή} \\ \int_0^{\infty} e^{-sx} f_X(x)\,dx & , X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

$$= E[e^{-sX}]$$

Ιδιότητες Μετασχ. L-S

1) $\tilde{F}_X(s)$ συγκλίνει τουλάχιστον στο $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) \geq 0\}$

2) Η $\tilde{F}_X(s)$ προσδιορίζει μονοσήμαντα την σ.κ. ή την σ.π. ή την σ…

3) $\tilde{F}_X(0) = 1$

4) $E[X^n] = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0)$

5) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες.
αν $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ τότε $\tilde{F}_{S_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} \tilde{F}_{X_i}(s)$

αλλαγή η ιδιότητα. 6) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες
N ανεξάρτητη των X_i, ακέραια.
αν $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ τότε $\tilde{F}_{S_N}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s))$

Μετασχηματισμός L-S της $exp(\lambda)$

$X \sim exp(\lambda)$, σ.π.π. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$

Μετασχ. L-S: $\tilde{F}_X(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot \lambda e$ ⊛

$$\boxed{\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}}$$

πχ: Έστω τ.μ. Y με μετασχ. L-S: $\tilde{F}_Y(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{s+3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{s+5}$

σ.π.π $f_Y(y) =$;

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{3 \cdot e^{-3y}}_{exp(3)} + \frac{2}{3} \underbrace{5e^{-5y}}_{exp(5)} , \quad y > 0$$

1ο φυλλάδιο ασκήσεων

Ώρες γραφείου Τη & Πα : 11:30-12:30.

⊛ $\lambda \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x}\,dx = \lambda \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-(s+\lambda)x}}{-(s+\lambda)}\right)' dx = \frac{\lambda}{s+\lambda} \left[-\frac{1}{e^{(s+\lambda)x}} \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{s+\lambda}$