24/2/2016

Στοχαστικές μέθοδοι στην Επιχ. Έρευνα

① Περιεχόμενο

- Στοχαστικες διαδικασιες : Poisson
- Ανανεωτικες διαδικασιες
- Θεωρια ουρών αναμονής

② Πηγές

Φακινος Δ. ΣΜΕΕ

Kulkarni V (2010) Modeling & Analysis of Stochastic Systems

E-class

delos.uoa.gr (ζωντανή μετάδοση)

Επανάληψη στις Πιθανότητες

Δεσμευμένη μέση τιμή

Πιθανογεννήτριες, Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes

Εκθετική κατανομή

Δεσμευμενη μέση τιμή

$f_{X,Y}(x,y) \leftarrow$ απο κοινού σ.π ή σ.π.π των X, Y

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} P(X=x,\ Y=y) & (X,Y) \text{ διακριτες} \\ \frac{\partial}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) & (X,Y) \text{ συνεχεις} \end{cases}$$

$f_X(x) \leftarrow$ περιθώρια

$$f_X(x) = \begin{cases} \sum_y f_{X,Y}(x,y), & (X,Y) \text{ διακ} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy, & (X,Y) \text{ συνεχης} \end{cases}$$

$f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ δεσμευμένη σ.π. ή σ.π.π. της Y δεδομένου X=x

$$m_{Y|X}(x) = E[Y|X=x] = \begin{cases} \sum_y y f_{Y|X}(y|x), & Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy, & Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

↳ πχ. αν Y = ύψος, X = βάρος τότε E = μέσο βάρος

αν X = 1,60 τότε βρίσκω το μέσο βάρος αυτών που εχ
1,60.

αριθμός που εξαρτάται από το x, καλύτερη πρόβλεψη της Y αν γνωρίζω ότι X=x

▶ Δεσμευμένη μέση τιμή της Y δεδομένου ότι X=x.

Η $m_{Y|X}(X)$ είναι τυχαία μεταβλητή. Είναι η καλύτερη συνάρτηση της X που προσεγγίζει την Y

▶ Δεσμευμένη μέση τιμή της Y δοθείσης της X.

Γράφεται αλλιώς και: $E[Y/X]$

Θεώρημα διπλής μέσης τιμής

$$E[Y] = E[\underbrace{E[Y|X]}_{m_{Y|X}(X)}] = \begin{cases} \sum_x m_{Y|X}(x) f_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} m_{Y|X}(x) f_X(x) dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Εφαρμογή 1

Ρίψη ζαριού (δίκαιο εξάεδρο) και ρίψη νομίσματος όσες φορές έδειξε το ζάρι (πιθανότητα K p (πιθανότητα να φέρει κεφαλή p)

Y = # K που εμφανίζονται

$E[Y] = ;$

πιθανότητα να φέρει y

$$E[Y] = \sum_{y=0}^{6} y \cdot f_Y(y), \quad f_Y(y) = \sum_{x=y}^{6} \frac{1}{6} \underbrace{\binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y}}_{\text{διωνυμική κατανομή}}$$

δεν συμφέρει αυτός ο τρόπος.

X = ένδειξη του ζαριού

δηλώνει δ.ο.π. $P(X=x)$

$$E[Y] = E[\,E[Y|X]\,] = \sum_{x=1}^{6} E[Y|X=x]\, f_X(x) \quad (2)$$

$$P(X=x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, \dots, 6$$

$$E[Y|X=x] = x \cdot p \quad (1)$$ ← μέση τιμή της διωνυμικής

Διωνυμική

$$(Y|X=x) \sim Bin(x, p)$$

$$(2) \overset{(1)}{\Rightarrow} E[Y] = \sum_{x=1}^{6} x p \frac{1}{6} = \frac{6 \cdot 7}{2} p \frac{1}{6} = \frac{7p}{6}$$

Εφαρμογή 2

Νόμισμα ρίχνεται συνεχεια μέχρι την 1η Κ (επιτυχια)

Y = # ριψεων ως την 1η Κ

πιθανότητα Κ σε 1 ρίψη = p

$E[Y]$ = ;

Αμεσος υπολογισμος:

$$f_Y(y) = P(Y=y) = (1-p)^{y-1} p, \quad y = 1, 2, \dots$$

$$E[Y] = \sum_{y=1}^{\infty} y (1-p)^{y-1} \cdot p$$

$$\left(\text{Έχω } \sum_{y=0}^{\infty} t^y = \frac{1}{1-t} \overset{d/dt}{\Rightarrow} \sum_{y=1}^{\infty} y t^{y-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \overset{t=1-p}{\Rightarrow} \sum_{y=1}^{\infty} y (1-p)^{y-1} = \frac{1}{p^2} \right.$$

$$\left. \overset{\cdot p}{\Rightarrow} E[Y] = \frac{1}{p} \right)$$

Υπολογισμος με θ.Δ.Μ.Τ

$$X = \begin{cases} 1, & \text{αν η 1η ριψη Κ} \\ 0, & \text{αν η 1η ριψη Γ} \end{cases}$$

$$E[Y] = \underbrace{P(X=0)}_{1-p} \cdot \underbrace{E[Y|X=0]}_{1+E[Y]} + \underbrace{P(X=1)}_{p} \cdot \underbrace{E[Y|X=1]}_{\text{πληθος ριψεων μεχρι να εμφανισθ. κορωνα, στο } X=1 \text{ αρα } Y=1 \Rightarrow}$$

$$E[Y] = (1-p)(1+E[Y]) + \frac{1}{p}\cdot 1 \Rightarrow pE[Y] = 1 \Rightarrow E[Y] = \frac{1}{p}$$

Εφαρμογή 3 (το πρόβλημα των συναντήσεων)

Έχουμε n ανθρώπους με τα καπέλα τους. Παίρνει ο καθένας 1 στην τύχη.

Ερώτημα 1:

M_n = # αυτών που πήραν το καπέλο τους

$E[M_n] = ;$

Ερώτημα 2:

Αν όσοι βρίσκουν το καπέλο τους υποχωρούν έτσι:

R_n = # γύρων ώστε όλοι να φύγουν με το καπέλο τους

$E[R_n] = ;$

$n = 2$

	1^{os}	2^{os}	
περίπτωση να πάρουν τα καπέλα	1^{ou}	2^{ou}	$\rightarrow M_2 = 2$
	2^{ou}	1^{ou}	$\rightarrow M_2 = 0$

$$E[M_2] = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2} 0 = 1$$

$n = 3$

1^{os}	2^{os}	3^{os}	
1^{ou}	2^{ou}	3^{ou}	$\rightarrow M_3 = 3$
1^{ou}	3^{ou}	2^{ou}	$M_3 = 1$
2^{ou}	1^{ou}	3^{ou}	$M_3 = 1$
2^{ou}	3^{ou}	1^{ou}	$M_3 = 0$
3^{ou}	1^{ou}	2^{ou}	$M_3 = 0$
3^{ou}	2^{ou}	1^{ou}	$M_3 = 1$

$$E[M_3] = 1$$

Εικασίες: $E[M_n] = 1$

$E[R_n] = n$

1) $M_n = \sum_{i=1}^{n} I_i$, $I_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i \text{ βρει το καπέλο του} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$\Downarrow$

$$E[M_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} I_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Big(\underbrace{E[I_i]}_{= P(I_i = 1)}\Big) = n\cdot\frac{1}{n} = 1$$

2) $E[R_n] = \sum_x x\, P(R_n = x)$ Χ αδύνατον να λυθεί έτσι

Με Θ.Δ.Μ.Τ.:

δεσμεύω στη τ.μ.: $X = \#$ ατόμων που βρήκαν το καπέλο τους στον 1° γύρο.

$$E[R_n] = E[E[R_n|X]] = \sum_{x=0}^{n} P(X=x)\, \underbrace{E[R_n|X=x]}_{1+E[R_{n-x}]}$$

1 γύρος + μεση τιμή καινούργια

$$= 1 + \sum_{x=0}^{n} P(X=x)\, E[R_{n-x}]$$

θδο ισχυει $E[R_n] = n$ με επαγωγή στο n:

- Για $n = 0, 1$ ισχυει
- Εστω ότι η υποθεση ισχυει μεχρι n. Τότε:

$$E[R_n] = 1 + \underbrace{P(X=0)E[R_n]}_{x=0 \text{ το αθροισμα}} + \sum_{x=1}^{n} P(X=x)(n-x) \Rightarrow$$

$(*)\ \sum_{x=0}^{n} P(X=x) = 1$

$P(X=0) + \sum_{x=1}^{n} P(X=x) = 1$

$$E[R_n] = \cancel{1} + P(X=0)E[R_n] + n\overbrace{(1-P(X=0))}^{\sum P(X=x)\ (*)} - \cancel{E[X]}$$

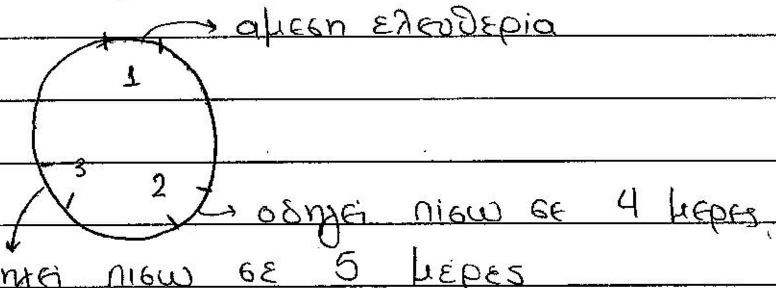
μεση τιμή των ατόμων που βρηκαν το καπελο στον 1 γυρο $= 1$

$\sum_{x=1}^{n} P(X=x) = 1 - P(X=0)$

$$\Rightarrow (1 - P(X=0))E[R_n] = (1 - P(X=0)) \cdot n$$

$$\Rightarrow E[R_n] = n$$

Εφαρμογή 4 (απελευθέρωση φυλακισμένου)



Συνεχεις επιλογές πορτας ως την ελευθερια

$Y = \#$ ημερων ως την ελευθερια

$E[Y] = ;$

X = Αρχική επιλογή πόρτας

$$E[Y] = \underbrace{P(X=1)}_{1/3}\underbrace{E[Y|X=1]}_{0} + \underbrace{P(X=2)}_{1/3}\underbrace{E[Y|X=2]}_{4+E[Y]} + \underbrace{P(X=3)}_{1/3}\underbrace{E[Y|X=3]}_{5+E[Y]}$$

$$\Rightarrow E[Y] = 3 + \frac{2}{3}E[Y]$$

$$\Rightarrow E[Y] = 9$$